3 GEOMETRÍA

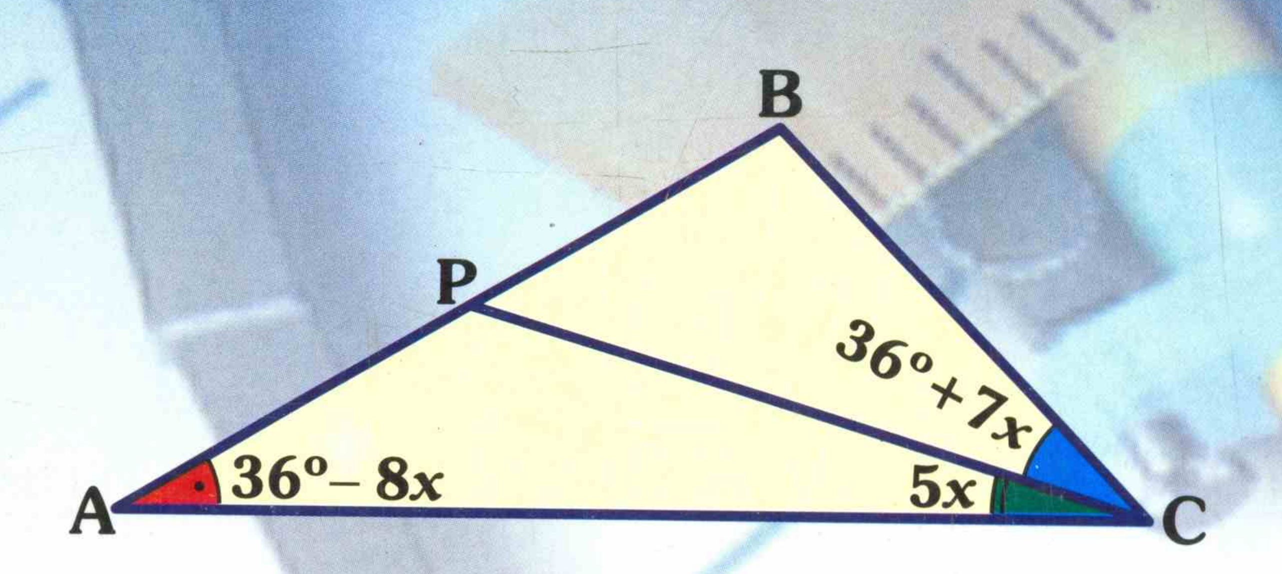
CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

TEORÍA - DEMOSTRACIONES TRAZOS AUXILIARES

600 PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS

Dev Sáez Ayala

JULIO ORIHUELA BASTIDAS



En el gráfico, AP=BC. Calcule x.



GEOMETRÍA

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

TEORÍA - DEMOSTRACIONES

300 Problemas Resueltos
300 Problemas Propuestos

Incluye Problemas de Olimpiadas

Prof.: JULIO ORIHUELA BASTIDAS



Agradecimiento

- Al apoyo incondicional de toda mi familia.
- A todo el grupo de la Editorial Cuzcano, por su apoyo y confianza.
- A los profesores Luis Saavedra, Renzo Pardo y Richard Huamaní.
- A todos mis alumnos y exalumnos de las distintas instituciones educativas, en especial a los estudiantes: Milenka, Diana, Paola, Raúl, Edgard, Martín, Luis, Alexander, Omar Michel y Wilbert.
- Un agradecimiento especial al alumno Juan Carlos Mamani, por la creación del problema expuesta en la portada.

Índice

Congruencia de Triángulos

CONGRUENCIA DE FIGURAS



CONGRUENCIA DE FIGURAS



CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

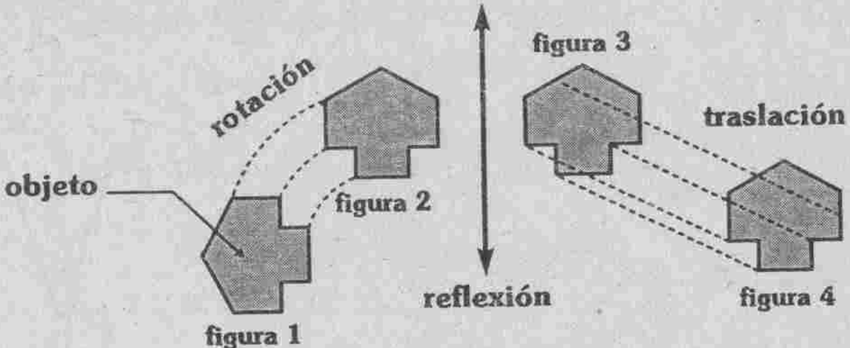
GEOMETRÍA

"El universo es un libro escrito en el lenguaje de las matemáticas, siendo sus caracteres triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible comprender una sola palabra; sin ellos sólo se conseguirá vagar por un oscuro laberinto"

Galileo Galilei

NOCIONES PRELIMINARES

El concepto de congruencia tiene su origen con el de igualdad. La realidad nos sugiere conceptos puros que en la propia realidad no existen. Así los conceptos de recta y plano, sugeridos por un rayo de luz o un estanque helado. Los "cambios" que nuestra intuición percibe de los objetos, es decir los "movimientos" nos dan la idea de la congruencia.



La figura 1 se mueve, realizando movimientos de rotación (figura 2), reflexión (figura 3) y traslación (figura 4), de tal forma que la figuras "coinciden".

Intuitivamente hablando, dos figuras son congruentes si tienen la misma forma[1] e igual tamaño[2].

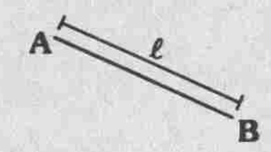
Dentro del desarrollo axiomático griego, las nociones primarias se construían con fundamento en el mundo exterior, es decir se pretendían que los axiomas respondieran a la realidad, este tipo de axiomática se ha denominado axiomática material.

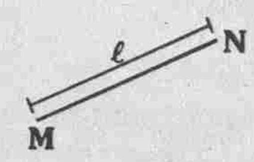
En oposición a la axiomática material, se estructura lo que se ha denominado un sistema axiomático formal.

(1) y (2) acerca de tamaño y forma, ver anexos.

SEGMENTOS CONGRUENTES

Dos segmentos son congruentes, si tienen la misma longitud.





En el gráfico, los segmentos AB y MN son congruentes.

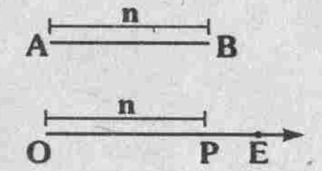
Notación:

$$\overline{AB} \cong \overline{MN}$$

AXIOMA DE LA CONSTRUCCIÓN DE UN SEGMENTO

Dado un segmento AB y el rayo OE, de origen O. Entonces existe en $\overrightarrow{OE}$ un único punto P tal que:

$$\overline{AB} \cong \overline{OP}$$

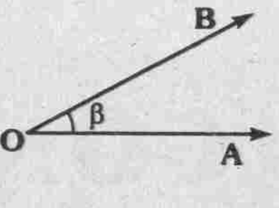


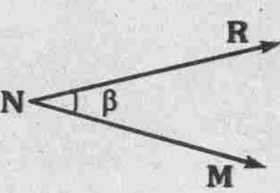
En términos prácticos este axioma afirma la posibilidad de construir o transportar un segmento, haciendo uso del compás.

ÁNGULOS CONGRUENTES

Dos ángulos son congruentes cuando tienen la misma medida.

$$\measuredangle AOB \cong \measuredangle MNR$$





En el gráfico, los ángulos AOB y MNR son congruentes.

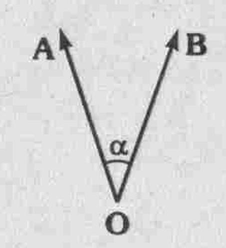
Notación:

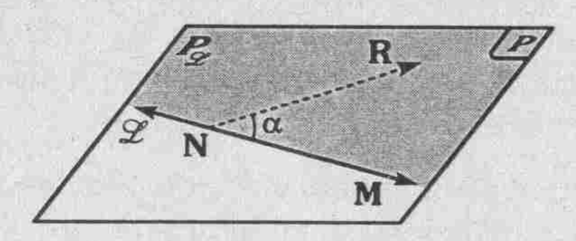
$$\measuredangle AOB \cong \measuredangle MNR$$

AXIOMA DE LA CONSTRUCCIÓN DE UN ÁNGULO

Sea el ángulo AOB y M un punto en la recta $\mathscr{L}$, situado a su vez en el plano P, sea $P_{\mathscr{L}}$ uno de los semiplanos y $\overrightarrow{NM}$ un rayo en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, entonces existe un único rayo NR en $P_{\mathscr{L}}$, tal que:

$$\measuredangle AOB \cong \measuredangle MNR$$



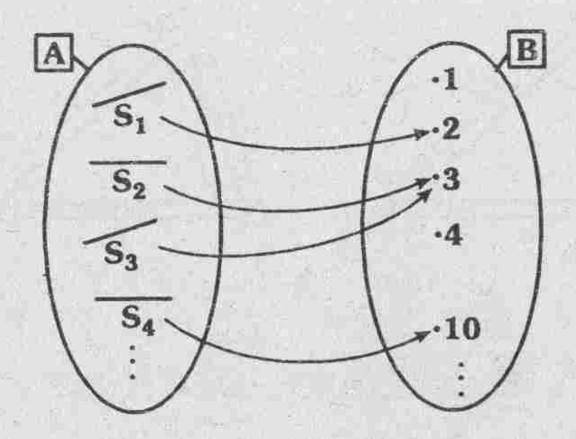


Similar que el axioma anterior, este axioma nos da la posibilidad de la construir un ángulo.

Nota

- *Es cierto que dos segmentos son congruentes si y solo si tienen la misma medida, lo mismo para ángulos, pero en el caso de triángulos, la definición no es tan sencilla, pues no hay una medida que "defina" un triángulo.*

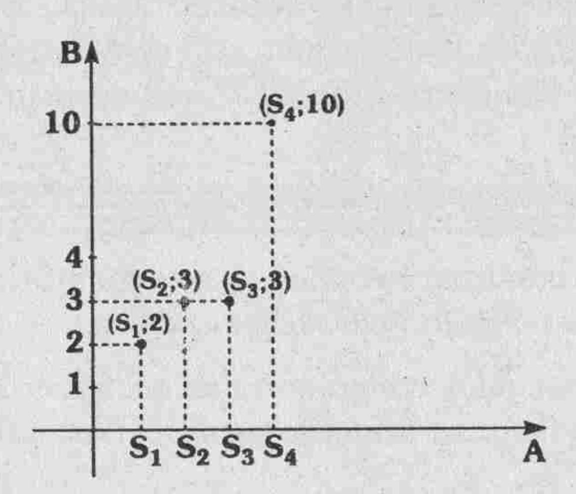
- *El siguiente gráfico, nos "ilustra" fácilmente la congruencia de segmentos.*



A={Conjunto de todos los segmentos}

B = $\mathbb{R}^+$, *en cm.* (Por elegir alguna unidad).

Se puede hacer una correspondencia entre los segmentos y los números reales que representarán sus longitudes, tal que si dos segmentos tengan igual la segunda componente, dichos segmentos serán congruentes.



En este gráfico, se cumple:

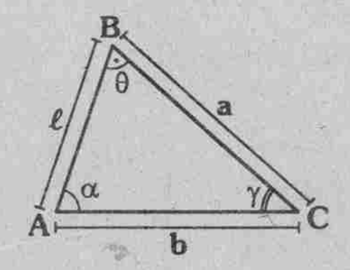
$$\boxed{S_2 \cong S_3}$$

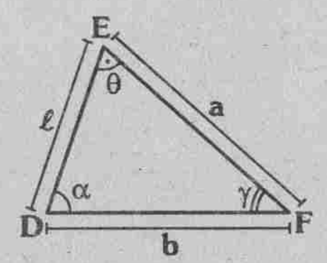
- *Un gráfico similar se puede hacer para ángulos y sus medidas, pero como se ha mencionado no es posible usar algo análogo para triángulos.*

TRIÁNGULOS CONGRUENTES

DEFINICIÓN

Dos o más triángulos son congruentes, si tienen los lados de uno de ellos respectivamente de igual longitud a los de otro y los ángulos interiores opuestos a dichos lados de igual medida.





En el gráfico:

$$\overline{AB} \cong \overline{DE}; \overline{BC} \cong \overline{EF}; \overline{AC} \cong \overline{DF}; \sphericalangle BAC \cong \sphericalangle EDF;\ \sphericalangle ABC \cong \sphericalangle DEF \text{ y } \sphericalangle ACB \cong \sphericalangle DFE.$$

Notación:

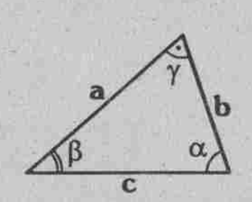
$$\boxed{\Delta ABC \cong \Delta DEF}$$

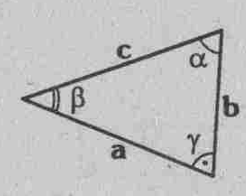
La definición anterior establece que dos triángulos son congruentes si tanto los lados como los ángulos se presentan en pares congruentes.

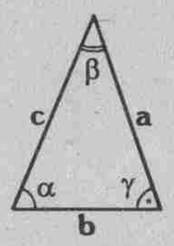
Notar del gráfico, la correspondencia entre vértices: $A-D$, $B-E$ y $C-F$, así como de los ángulos, pero no todos los textos siguen esta convención, cuando se afirma que el ΔABC está en correspondencia con el ΔDEF no respetan las reglas anteriores de correspondencia.

Nota

- *Como regla práctica, cuando dos triángulos son congruentes diremos que a los "lados iguales se oponen ángulo iguales" y viceversa.*
- *En los ejercicios los triángulos congruentes se encontrarán en distintas posiciones, no perder de vista "lados y ángulos iguales". (Ver gráficos).*







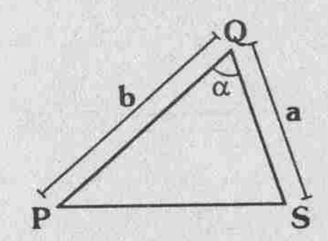
Observe que en todas las posiciones, el opuesto a "α" es "a" y así para cada lado y ángulo.

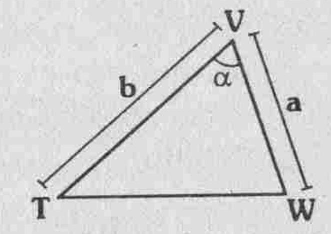
CRITERIOS DE CONGRUENCIA

Los siguientes criterios, establecen condiciones mínimas para la congruencia de dos triángulos.

AXIOMA LADO - ÁNGULO - LADO(LAL)

Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente de igual longitud y el ángulo determinado por ellos de igual medida, entonces los triángulos son congruentes.



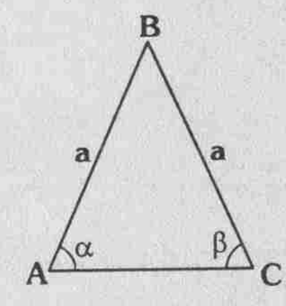


En el gráfico, PQ=TV; QS=VW y m∢PQS = m∢TVW

$$\Rightarrow \boxed{\Delta PQS \cong \Delta TVW}$$

TEOREMA DEL TRIÁNGULO ISÓSCELES

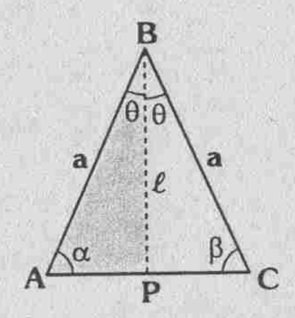
Si un triángulo tiene dos lados de igual longitud, entonces los ángulos opuestos a dichos lados tienen igual medida.



En el gráfico, si $\boxed{AB = BC \Rightarrow \alpha = \beta}$

Demostración:

Este teorema fue enunciado en la publicación de triángulos (Fascículo N°2), pero carecíamos de argumentos para su demostración, ahora sí los tenemos:



Se traza la bisectriz interior BP, con ello tenemos: $\Delta ABP \cong \Delta CBP$ (LAL)

Por lo expuesto (regla práctica), en ambos triángulos, el opuesto a $\overline{BP}$, se tendrá:

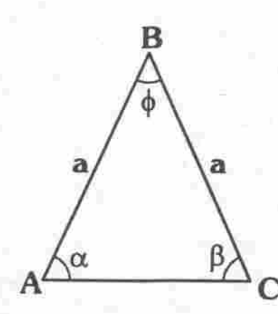
$$\alpha = \beta$$

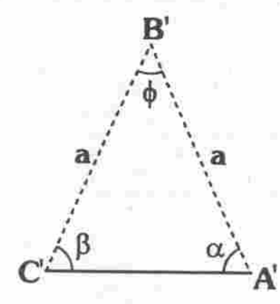
Además, el opuesto a "θ", se tiene:

$$AP = PC$$

Otra forma:

Aunque un poco desconcertado, cuando se ve por primera vez, es que no es común plantear la congruencia consigo mismo, lo cual no está prohibido.





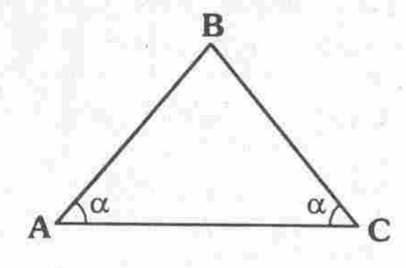
Para mayor facilidad, graficamos el triángulo CBA (aunque no es necesario). Sólo para observar, los dos triángulos.

$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta C'B'A'$ por LAL $\Rightarrow \alpha = \beta$



Observación

El recíproco también es cierto, es decir, si un triángulo tiene dos ángulos interiores de igual medida, entonces los lados opuestos tienen igual longitud.



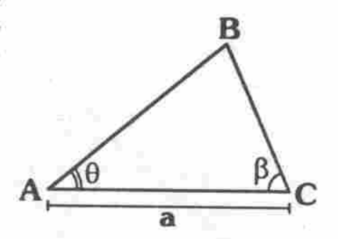
En el gráfico, si:

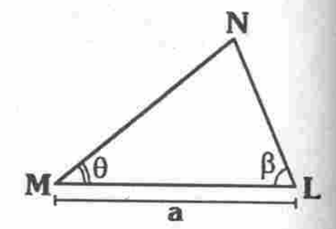
$$m\measuredangle BAC = m\measuredangle ACB$$

$$\Rightarrow AB = BC$$

TEOREMA ÁNGULO-LADO-ÁNGULO (ALA)

Si dos triángulos tienen un lado de igual longitud y los ángulos adyacentes a este lado respectivamente de igual medida, entonces dichos triángulos son congruentes.



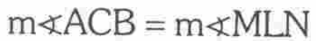


En el gráfico:

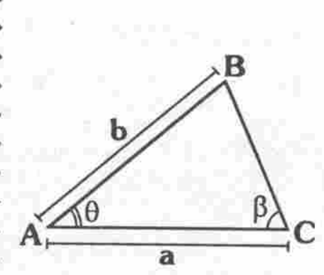
$AC = ML$; $m\measuredangle BAC = m\measuredangle NML$ y

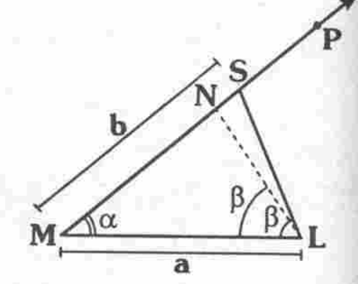
$m\measuredangle ACB = m\measuredangle MLN$

$$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta MNL$$



Demostración:





Consideramos el rayo $\overrightarrow{MP}$ que contiene a $\overline{MN}$.

- Por axioma de segmentos, existe en $\overrightarrow{MP}$ el punto (S), tal que AB=MS.
- Por LAL: $\Delta ABC \cong \Delta MSL$,
- Entonces: $m\measuredangle ACB = m\measuredangle MLS = \beta$
- Pero: $m\measuredangle MLN = \beta$

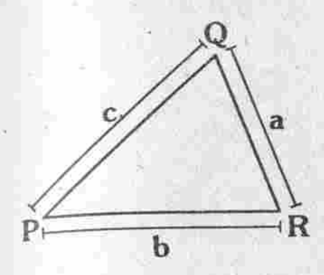
Por el axioma de la construcción de ángulos: el rayo $\overrightarrow{LS}$ debe ser único

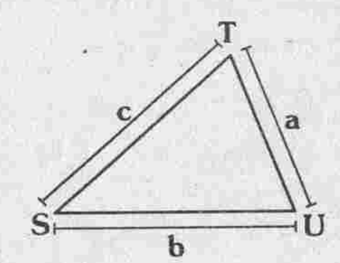
$$\Rightarrow N = S$$

$$\therefore \Delta ABC \cong \Delta MNL$$

TEOREMA LADO-LADO-LADO (LLL)

Si dos triángulos tienen sus tres lados respectivamente de igual longitud, entonces dichos triángulos son congruentes.





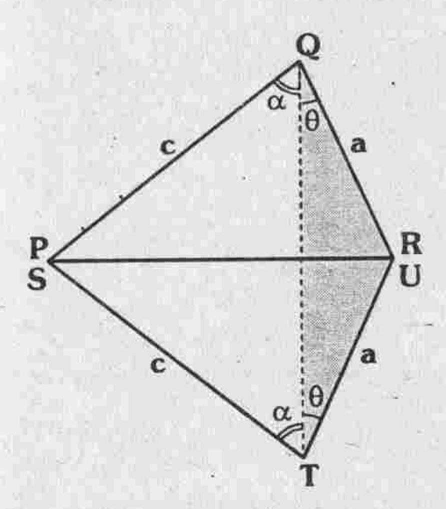
En el gráfico, si:

PQ=ST , QR=TU y PR=SU

$\Rightarrow$ $\boxed{\Delta PQR \cong \Delta STU}$

Demostración:

Vamos a demostrar el teorema LLL, a partir del teorema del triángulo isósceles.



Ubicamos los triángulos como se muestran, puesto que PR=SU, PQ=ST y QR=UT, tenemos que los triángulos PQT y QRT son isósceles.

Por LAL, se concluye:

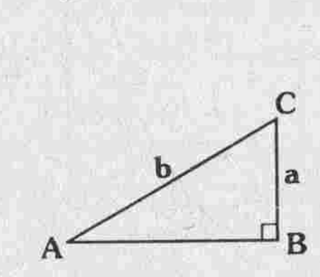
$$\Delta PQR \cong \Delta STU$$

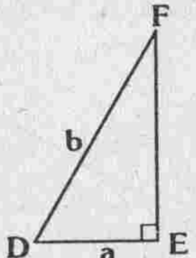


*Es común encontrar en la mayoria de textos, que se refieran a los criterios expuestos, como "**Casos de congruencia**", en esta publicación se trata de dar un cierto orden e ir introduciendo de a poco el análisis axiomático, por esta razón no usaremos tal nombre.*

TEOREMA

Si dos triángulos rectángulos que tengan sus hipotenusas y un cateto de igual longitud respectivamente, entonces dichos triángulos son congruentes.



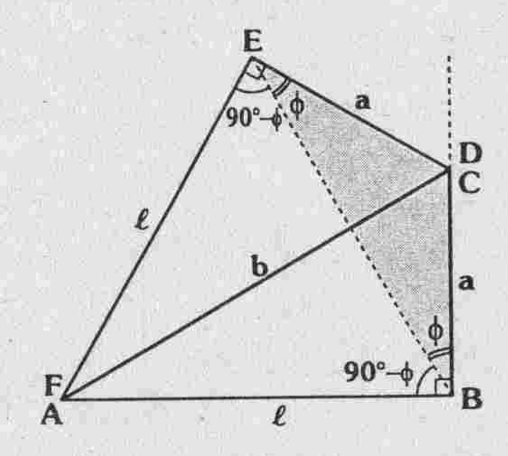


En el gráfico, se tiene:

m∢ABC = m∢DEF = 90° ; AC=DF y BC=DE

$\Rightarrow$ $\boxed{\triangle ABC \cong \triangle FED}$

Demostración:



Ubicamos los triángulos como se muestra, pues AC=FD.

- Como DE=CB $\Rightarrow$ el ΔEDB es isósceles

  $\Rightarrow m\sphericalangle DEB = m\sphericalangle EBD$
- Como $m\sphericalangle FED = m\sphericalangle ABD = 90°$

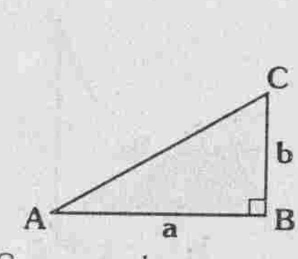
  $\Rightarrow m\sphericalangle FEB = m\sphericalangle ABE = 90° - \phi$
- Luego el ΔEAB es isósceles $\Rightarrow$ FE = AB

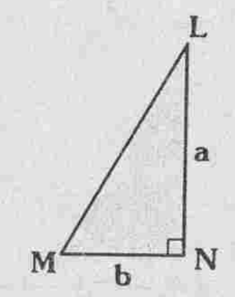
  $\therefore \triangle FED \cong \triangle ABC$



Observación

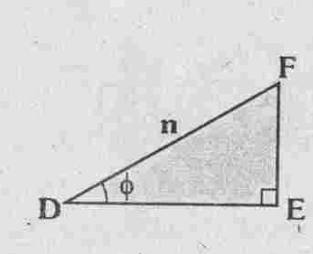
Los siguientes triángulos rectángulos son congruentes, la prueba es inmediata por LAL o ALA.

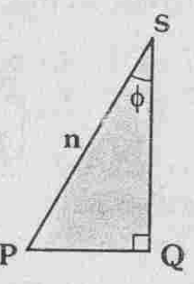




Se cumple:

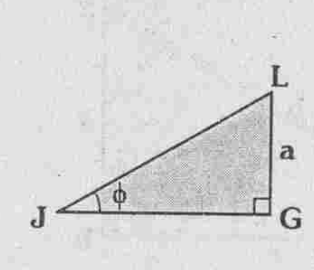
$\triangle ABC \cong \triangle LNM$

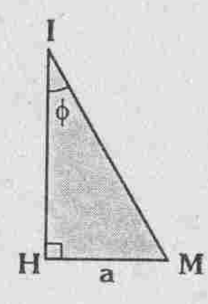




Se cumple:

$\triangle DEF \cong \triangle SQP$





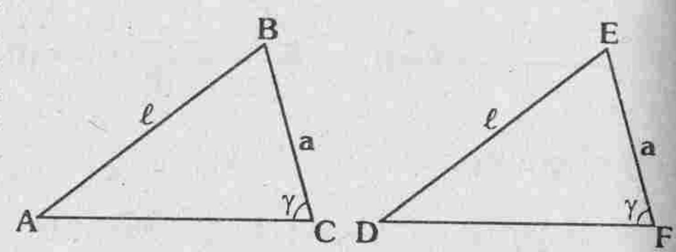
Se cumple:

$\triangle LGJ \cong \triangle MHI$

TEOREMA LADO-LADO-ÁNGULO MAYOR

Si dos triángulos tienen dos lados de igual longitud respectivamente y el ángulo opuesto al mayor de dichos lados de igual medida, entonces los triángulos son congruentes.

(Este teorema se encontrará en muchos textos como "4to caso")



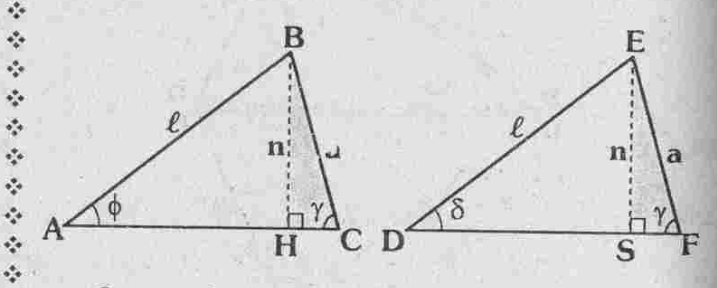
En el gráfico, sea $\ell > a$, AB=DE, BC=EF y $m\sphericalangle BCA = m\sphericalangle EFD$

$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta DEF$

Demostración:

Utilicemos los teoremas anteriores, para "γ" se presentan los siguientes casos:

- Si $\gamma = 90°$, ya fue probado.
- Si $\gamma < 90°$, se tiene:



- Como $\ell > a \Rightarrow \gamma > \phi$ y si:

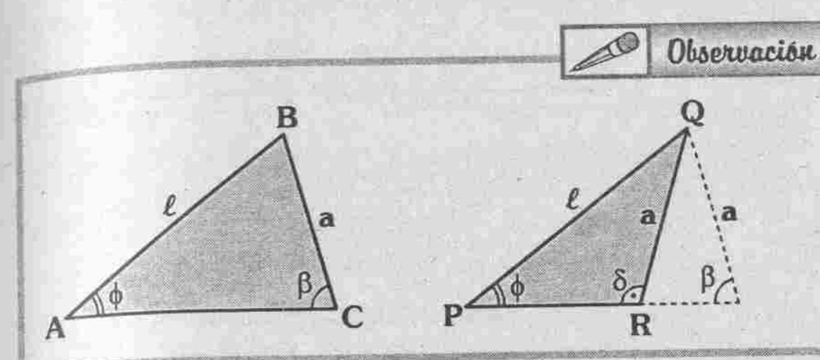
  $\gamma < 90° \Rightarrow \phi < 90°$, lo mismo para "$\delta$".
- Al trazar las alturas desde B y E, se tendrá: H en $\overline{AC}$ y S en $\overline{DF}$.
- Luego:

  $\triangle BHC \cong \triangle ESF \Rightarrow$ BH=ES, HC=SF
- Finalmente: $\triangle AHB \cong \triangle DSE$

  $\Rightarrow$ AH = DS

- Como AH=DS y HC=SF $\Rightarrow$ AC = DF
- Por LLL, se tendrá: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$
- Si $\gamma > 90^{c}$, se demuestra análogamente, sino que la altura estará en al parte externa.

Observación

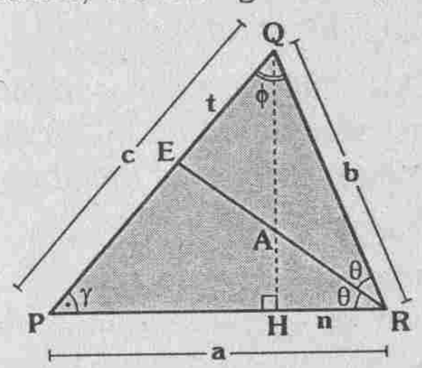


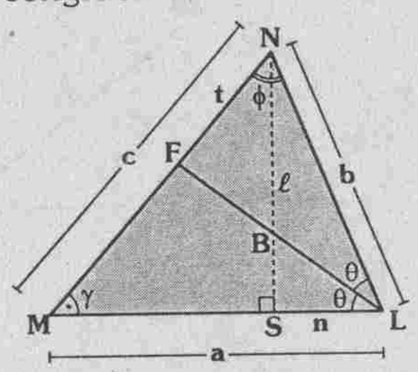
Si: $a < \ell \Rightarrow$ *los triángulos* ABC y PQR *no son congruentes, como se muestra.*

Importante

- Es cierto que los tres primeros criterios señalados (LAL, ALA y LLL) son los más usados en la resolución de problemas y deducción de diversos teoremas, por lo tanto se te sugiere tenerlos presente y visualizarlos en los ejemplos, tal vez aparezcan en diferentes posiciones.
- Un criterio a tomar en cuenta, en la resolución de ejercicios, es cuando en dos posiciones diferentes se "repita" un lado o tal vez algún "ángulo" posiblemente usemos congruencia, para ello completar ángulos y relacionarlo con algunos de los criterios mencionados, frecuentemente: LAL, ALA o LLL.
- Cuando dos triángulos son congruentes, entonces todos sus elementos serán respectivamente "iguales", así tenemos:

  En el gráfico, los triángulos PQR y MNL son congruentes:





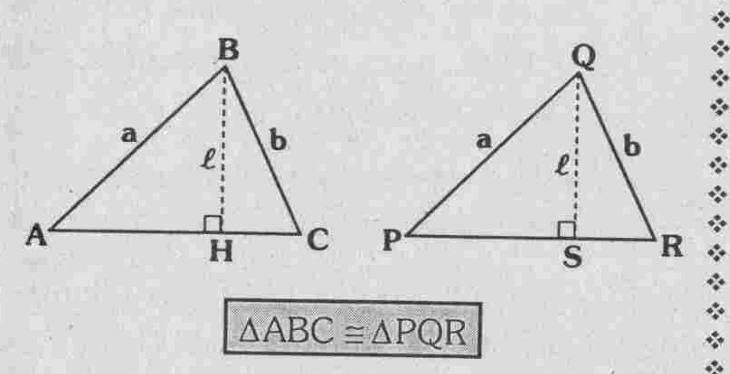
  - $\overline{QH}$ y $\overline{NS}$ son alturas relativas a $\overline{PR}$ y $\overline{ML}$, los cuales son congruentes entonces: QH=NS y LS=HR
  - $\overline{RE}$ y $\overline{LF}$ son bisectrices interiores relativas a $\overline{PQ}$ y $\overline{MN}$ $\Rightarrow$ RE = LF .
  - Como consecuencia: EA = FB
- En el gráfico anterior se ha indicado unas cuantas relaciones, lo general se indicará en el caso de ***congruencia de figuras*** (∗).

(*) ver anexos

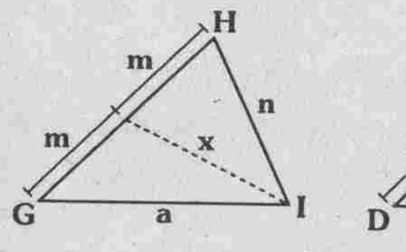
OTROS CRITERIOS DE LA CONGRUENCIA

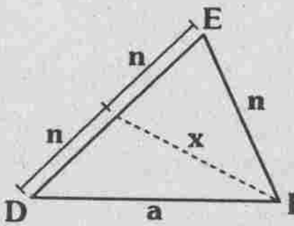
Como se han mencionado, son condiciones mínimas en dos triángulos para asegurar que sean congruentes.

A continuación se muestran gráficamente algunas de dichas condiciones (notar que son tres elementos).

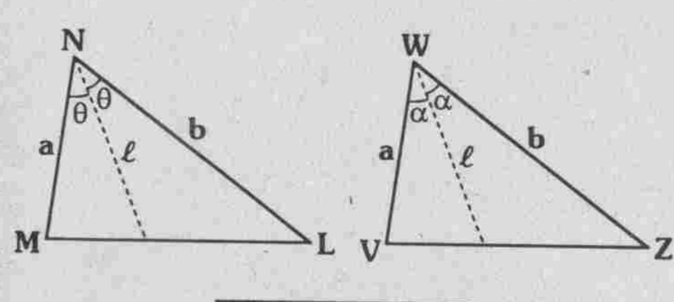


$\Delta ABC \cong \Delta PQR$

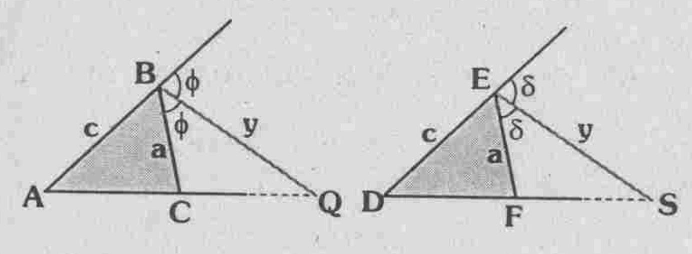




$\Delta GHI \cong \Delta DEF$

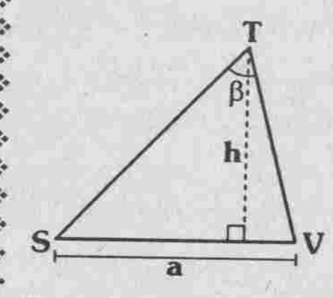


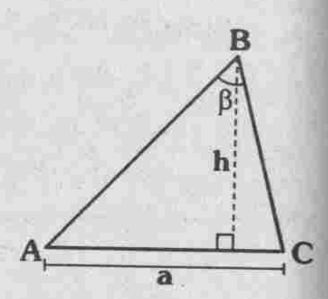
$\Delta MNL \cong \Delta VWZ$



Se cumple:

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$





Se cumple:

$\Delta STV \cong \Delta ABC$

- Si consideramos diversas combinaciones encontraremos más condiciones para la congruencia, así por ejemplo:

- *Dos triángulos son conguentes si tienen dos medianas y un lado respectivamente de igual longitud.*
- *Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres medianas respectivamente de igual medida.*
- *Dos triángulos son congruentes si tienen dos alturas y un lado respectivamente de igual longitud.*
- *Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres alturas respectivamente de igual longitud.*
- *Dos triángulos son congruentes si tienen dos bisectrices y un lado respectivamente de igual longitud.*
- *Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres bisectrices interiores respectivamente de igual longitud.*
- *Dos triángulos son congruentes si sus tres bisectrices exteriores son respectivamente de igual longitud.*

- Ahora si consideramos elementos como los exradios e inradios, áreas y perímetros tendremos más criterios (tres condiciones mínimas, como se ha mencionado):

- *Si los tres exradios de dos triángulos son de igual longitud los triángulos son congruentes.*
- *Si dos triángulos tienen un lado en común, el ángulo opuesto de igual medida y el inradio; respectivamente igual, los triángulos son congruentes.*
- *Si dos triángulos tienen igual perímetro, igual área e igual un ángulo, entonces los triángulos son congruentes.*



Nota

El lector puede notar que hay muchas condiciones para verificar la congruencia, algunas de estas demostraciones tienen que ver con capítulos como "circunferencia", "relaciones métricas" y "áreas", en dichas publicaciones se realizará tales demostraciones.

APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

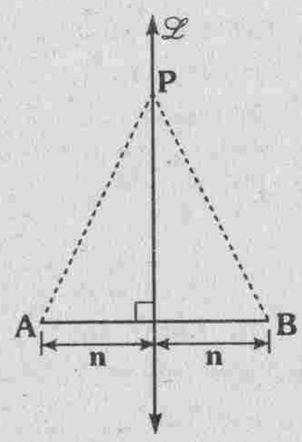
TEOREMA DE LA MEDIATRIZ

Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento.

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AB}$ y $P \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, entonces se cumple:



$$PA = PB$$

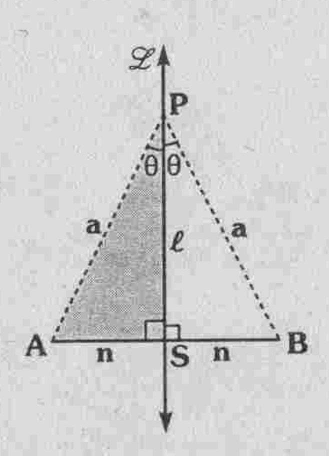


Demostración:

Del gráfico, tenemos:

$$\triangle ASP \cong \triangle BSP \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow \; AP = PB$$

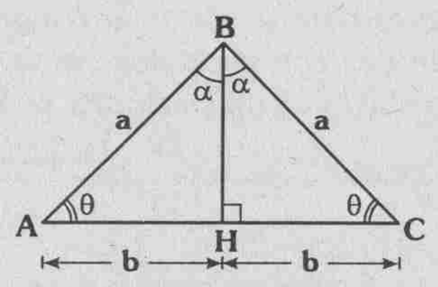


Además:

$$m\sphericalangle APS = m\sphericalangle BPS$$

Observación

- *En el gráfico anterior, notemos que el triángulo APB es isósceles y que el segmento PS, es altura, bisectriz y a su vez mediana, relativas a la base.*
- *Lo último nos sugiere un trazo en el triángulo isósceles: la altura relativa a la base.*



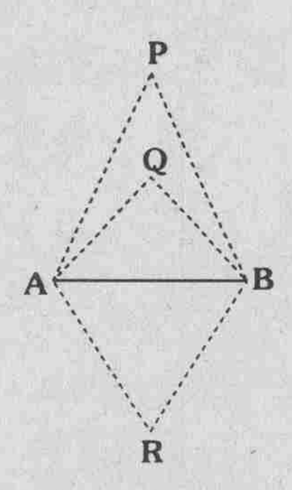
En el gráfico, $\overline{BH}$ *es altura, entonces.*

$\overline{BH}$ *es mediana y altura.*

- *También todos las combinaciones son ciertas, es decir: "si en el triángulo isósceles se traza la mediana relativa a la base es también altura y bisectriz, lo mismo para la bisectriz".*

TEOREMA

Si un conjunto de puntos coplanares con un segmento, equidistan de los extremos de dicho segmento, entonces dichos puntos están en la mediatriz.

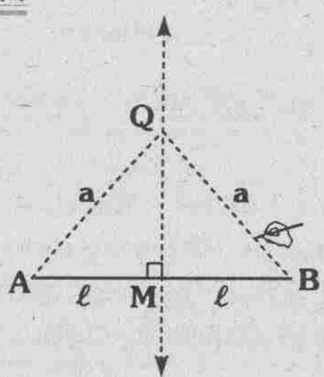


En el gráfico, si:

$$PA=PB \quad , \quad QA=QB \quad , \quad RA=RB$$

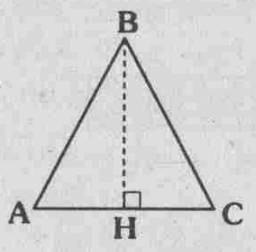
$\Rightarrow$ P, Q y R están en la mediatriz de $\overline{AB}$.

Demostración:



- Bastará analizar uno de los triángulos por ejemplo: AQB, en él se traza la mediana, por el criterio anterior o por LLL: $\Delta AQM \cong \Delta BQM \Rightarrow \overline{QM}$ es también altura, es decir $\overleftrightarrow{QM}$ es mediatriz de $\overline{AB}$.
- Veamos algunas consecuencias:

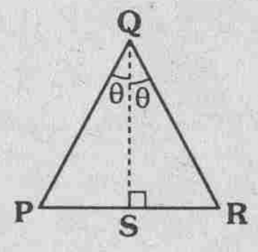
TEOREMA



Si $\overline{BH}$ es altura y mediana, entonces:

$$AB=BC$$

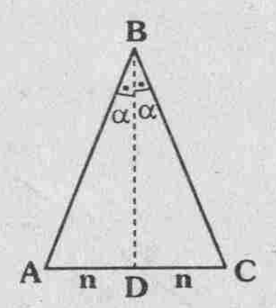
TEOREMA



Si $\overline{QS}$ es altura y bisectriz, entonces:

$$PQ=QR$$

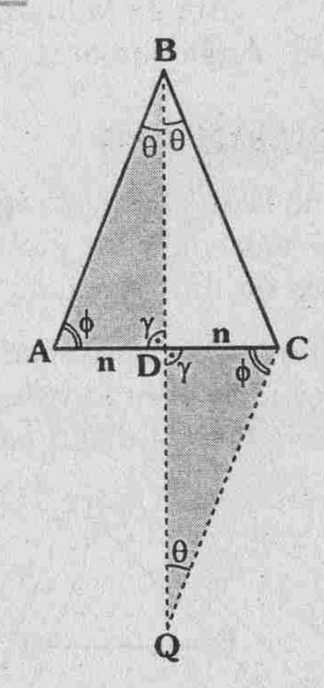
TEOREMA



Si $\overline{BD}$ es mediana y bisectriz, entonces:

$$AB = BC$$

Demostración:



- Se prolonga $\overline{BD}$ y se traza:

$$\overline{CQ} // \overline{AB}$$

$$\Rightarrow \; m\sphericalangle DQC = \theta$$

- ΔBQC : es isósceles

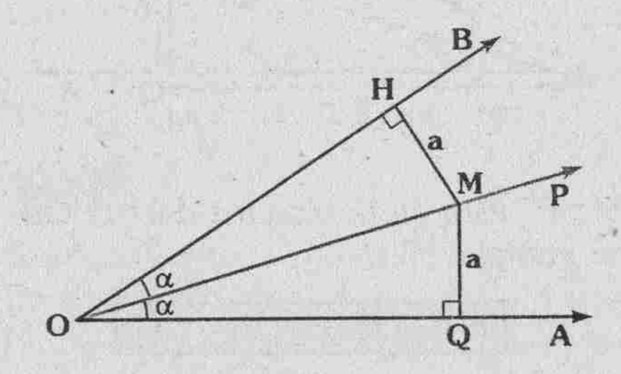
$$\Rightarrow \; BC = CQ$$

- $\Delta BAD \cong \Delta QCD$: (ALA)

$$\Rightarrow \; AB = BC$$

TEOREMA DE LA BISECTRIZ

Todo punto de la bisectriz de un ángulo, tiene igual distancia (*) hacia los lados de dicho ángulo.



En el gráfico, $\overrightarrow{OP}$ es bisectriz del $\sphericalangle AOB$ y $M \in \overrightarrow{OP}$, se cumple:

$$MH = MQ$$

Demostración:

- Si completamos medidas angulares, tenemos:

$$m\sphericalangle OMH = m\sphericalangle OMQ = 90° - \alpha$$

$$\Rightarrow \; \triangle OMH \cong \triangle OMQ \; (ALA)$$

$$\Rightarrow \; MH = MQ$$

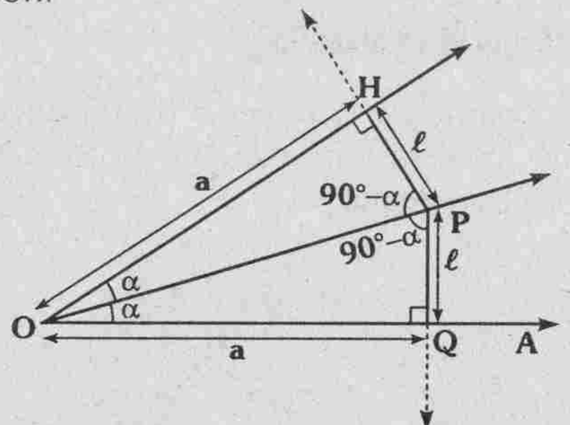
- Además:

$$OH = OQ$$

(*) sobre el término "distancia" ver anexos.



Es común *encontrar en muchos textos el teorema como se indica a continuación:*



Si "P" está en la bisectriz del $\measuredangle$HOB, se cumple:

$$PH = PQ \text{ y } OH = OQ$$

Pero notar que no son dos resultados, los cuales se deducen fácilmente de la congruencia.

Pues:

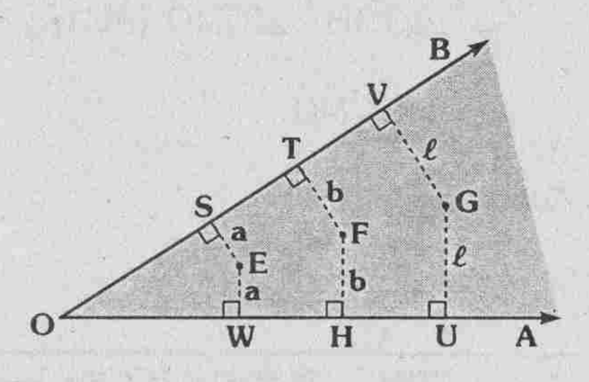
P está en la bisectriz del $\measuredangle$HOQ *y*

O está en la bisectriz del $\measuredangle$HPQ

Cumpliéndose el enunciado expuesto.

TEOREMA

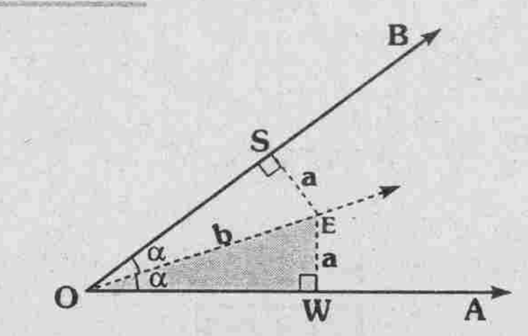
Si un conjunto de puntos están en la región interior de un ángulo y equidistan de los lados del ángulo, entonces dichos puntos están en la bisectriz del ángulo dado.



Si: ES = EW, FT = FH y GV = GU

$\Rightarrow$ E, F y G están en la bisectriz del $\measuredangle$AOB.

Demostración:



- $\triangle$OSE $\cong$ $\triangle$OWE

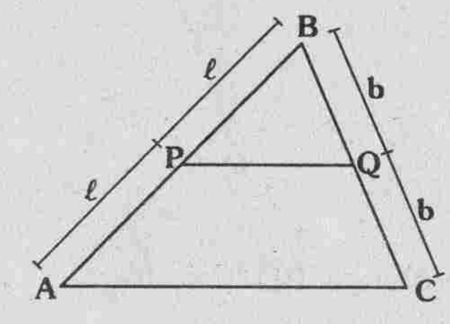
  $\Rightarrow$ m$\measuredangle$SOE = m$\measuredangle$EOA

- Es decir "E" está en la bisectriz del ángulo AOB. Análogamente para F y G.

TEOREMA DE LA BASE MEDIA

Se denomina base media al segmento que tiene como extremos los puntos medios de dos lados de un triángulo.

En todo triángulo la base media es paralela al tercer lado y su longitud es la mitad de la longitud de dicho lado.



En el gráfico:

$$AP = PB \quad \text{y} \quad BQ = QC$$

$\overline{PQ}$: base media

Se cumple:

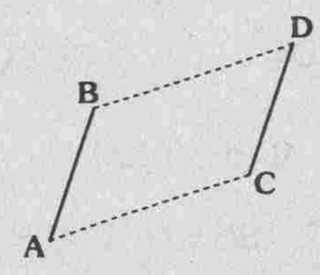
$$\overline{PQ} \,//\, \overline{AC} \quad \text{y} \quad PQ = \frac{AC}{2}$$

Demostración:

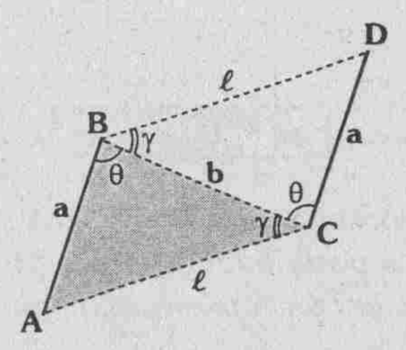
Paso I

Previamente demostremos lo siguiente.

Si: $\overline{AB}//\overline{CD}$ y $AB=CD$.



Se cumple: $BD=AC$ y $\overline{BD}//\overline{AC}$

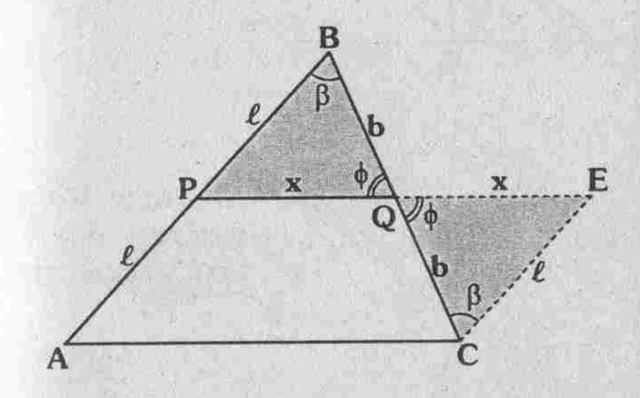


Por ángulos entre paralelas:

$m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle BCD \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta DCB$ (LAL)

$\Rightarrow AC=BD$ y $m\sphericalangle BCA = m\sphericalangle DBC \Rightarrow \overline{BD}//\overline{AC}$

Paso II



Se traza desde C una paralela a $\overline{AB}$, la cual corta a la prolongación de $\overline{PQ}$ en E.

$\Rightarrow \Delta BQP \cong \Delta CQE$ (ALA)

$\Rightarrow QE=QP=x$

y $PB=CE=\ell$

Luego, como $AP=CE$ y $\overline{AP}//\overline{CE}$, por la demostración del paso I:

$AC=PE \Rightarrow AC=2(PQ)$

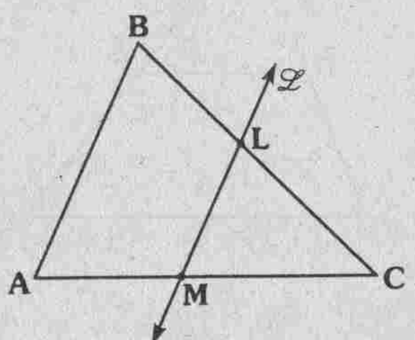
$$\Rightarrow PQ=\frac{AC}{2}$$

$\overline{AC}//\overline{PE} \Rightarrow \overline{AC}//\overline{PQ}$

Ahora analicemos los recíprocos:

TEOREMA

Si por el punto medio del lado de un triángulo se traza una recta paralela a otro lado, entonces dicha recta corta en el punto medio al tercer lado.

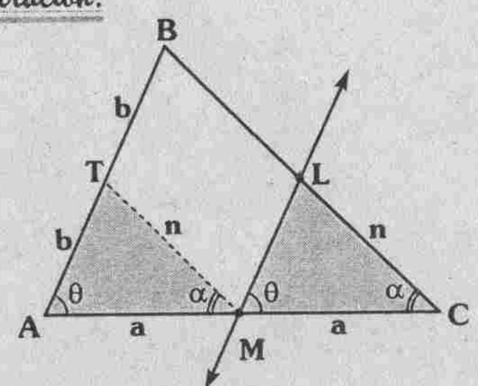


En el gráfico:

Si $AM=MC$ y $\overrightarrow{\mathscr{L}}//\overline{AB}$

$\Rightarrow$ $\overline{ML}$ es base media

Demostración:



- Se ubica T punto medio de $\overline{AB}$, con ello se tendrá $\overline{MT}$ es base media, entonces:

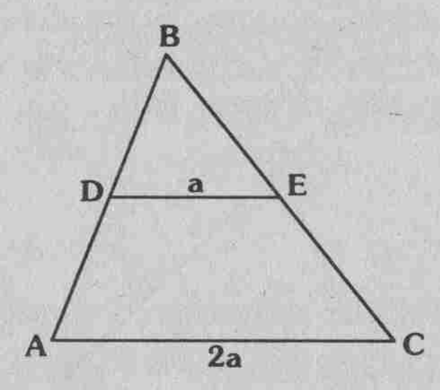
$$\overline{MT} // \overline{CB} \quad y \quad BC = 2n$$

- $\Delta ATM \cong \Delta MLC$ (ALA) $\Rightarrow$ $CL = n$
- Como $BC = 2n \Rightarrow BL = n$

$$\therefore \; BL = LC$$

TEOREMA

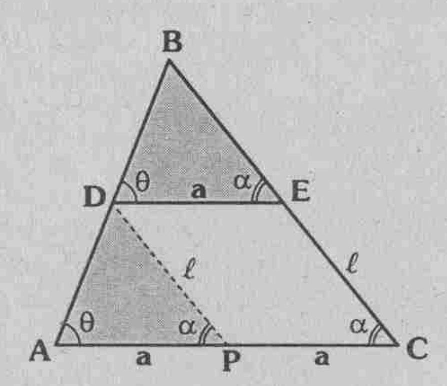
Si un segmento tiene sus extremos en los lados de un triángulo y cumple que es paralelo al tercer lado y tiene por longitud la mitad del tercer lado, entonces dicho segmento es la base media.



Si: $\overline{DE} // \overline{AC}$ y $DE = \dfrac{AC}{2}$

$\Rightarrow$ $\overline{DE}$ es base media

Demostración:



- Se ubica P, punto medio de $\overline{AC}$, se tendrá ahora:

$$DE = PC \quad y \quad \overline{DE} // \overline{PC}$$

por teorema (Paso I):

$$PD = \ell \quad y \quad \overline{PD} // \overline{CE}$$

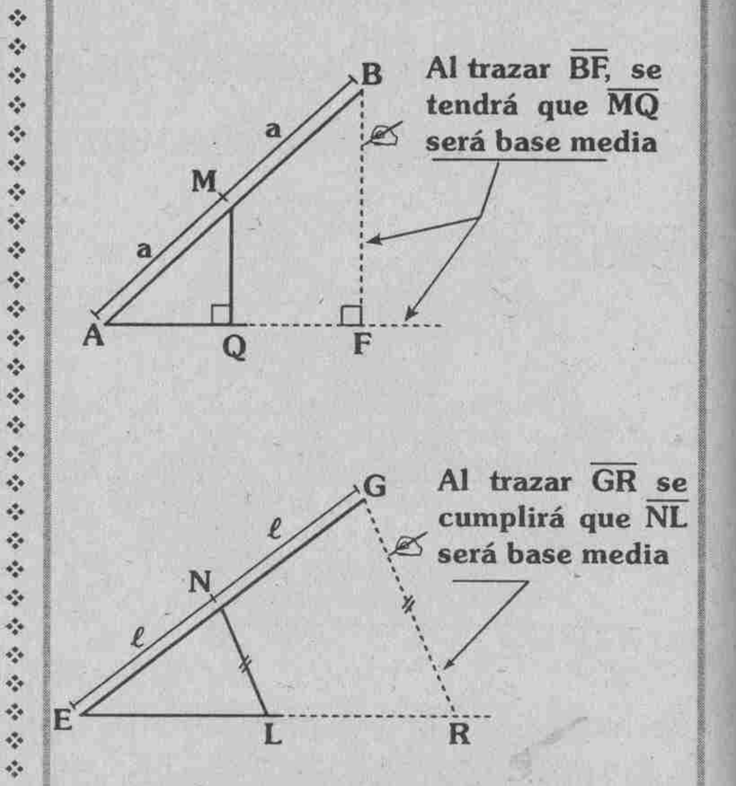
- $\Delta ADP \cong \Delta DBE$ (ALA)

$$\Rightarrow DP = BE = \ell \quad y \quad AD = DB$$

$$\therefore \; \overline{DE} \text{ es base media.}$$

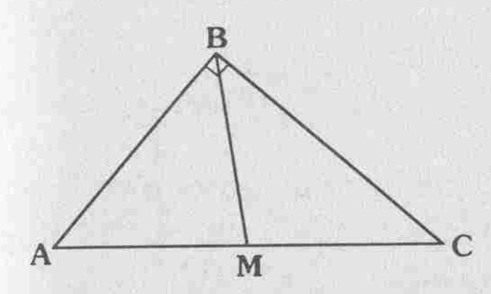


Los teoremas anteriores, nos sugieren algunas posibilidades en los problemas donde encontremos algún punto medio:



TEOREMA DE LA MEDIANA RELATIVA A LA HIPOTENUSA

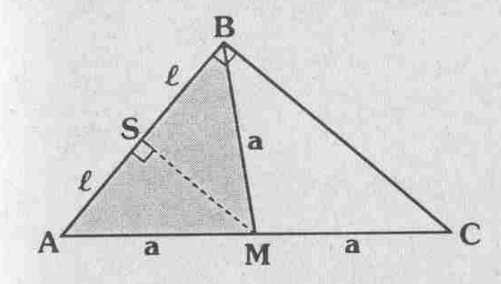
El segmento que une el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo y el punto medio de la hipotenusa, mide la mitad de la longitud de dicha hipotenusa.



En el gráfico, AM=MC, entonces:

$$BM = \frac{AC}{2}$$

Demostración:



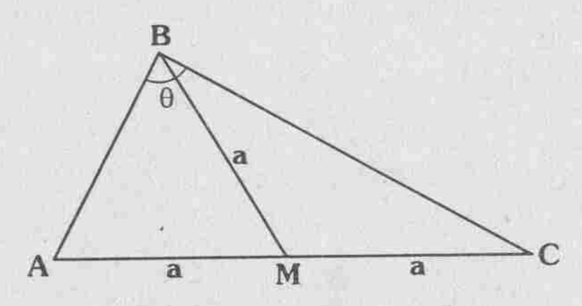
- Se ubica S punto medio de $\overline{AB}$, entonces $\overline{SM}$ es base media:
- Luego: $\overline{SM} \perp \overline{AB}$
- Por teorema de la mediatriz MA=MB.

$$\therefore \; MB = \frac{AC}{2}$$

- Además: los triángulos ABM y BMC con isósceles.

TEOREMA

Si en un triángulo la mediana mide la mitad de la longitud del lado al cual es relativo, entonces dicho triángulo es rectángulo (*recto en el vértice del cual se traza la mediana*).

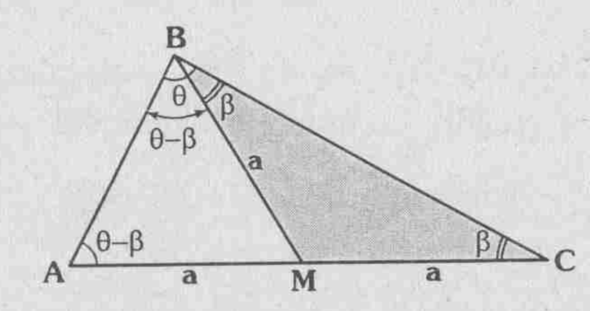


En el gráfico, AM = MC = MB

Se cumple:

$$\theta = 90°$$

Demostración:



- ΔBMC y ΔABM : isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle MBC = m\measuredangle MCB = \beta$$

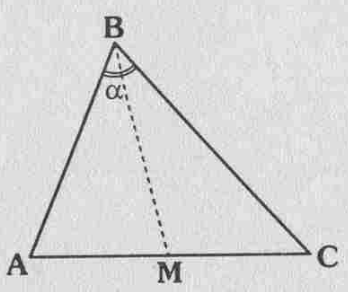
y $\quad \Rightarrow m\measuredangle MBA = m\measuredangle BAM = \theta - \beta$

- En ΔABC : $\beta + \theta + \theta - \beta = 180°$

$$\therefore \; \theta = 90°$$

TEOREMA

En el gráfico, $\overline{BM}$ es mediana.



Se cumple:

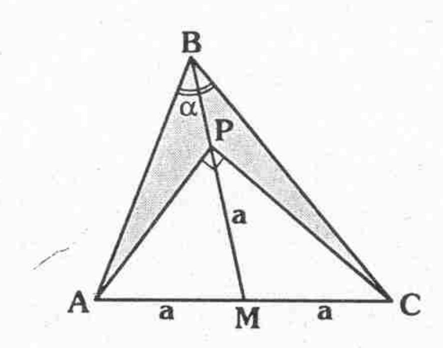
$$\frac{AC}{2} < BM \iff \alpha < 90°$$

Demostración:

La demostración consta de dos partes:

Parte I

- Si: $\frac{AC}{2} < BM \Rightarrow \alpha < 90°$



- Sea $AC = 2a \Rightarrow a < BM$, es decir existe en $\overline{MB}$ un punto P tal que $MP = a$.
- Se tiene entonces $AM = MP = MC$

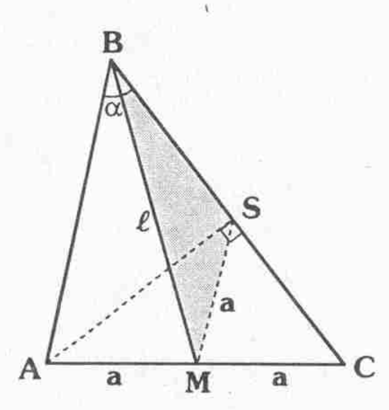
$$\Rightarrow m\measuredangle APC = 90°$$

- En la parte sombreada:

$$\alpha < 90°$$

Parte II

- Si $\alpha < 90° \Rightarrow \frac{AC}{2} < BM$

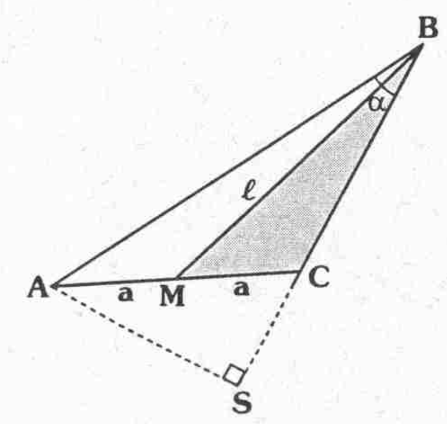


- Como $\alpha < 90°$, al trazar la altura desde A, entonces el pie de dicha altura estará en $\overline{BC}$ o en su prolongación.
- En el $\triangle ASC$, por el teorema de la mediana relativa a la hipotenusa: $SM = a$
- Se tiene: $m\measuredangle BSM > 90° \Rightarrow a < \ell$

$$\therefore \frac{AC}{2} < BM$$



Si el pie de la altura está en la prolongación de $\overline{BC}$ o en "C" también se cumple:

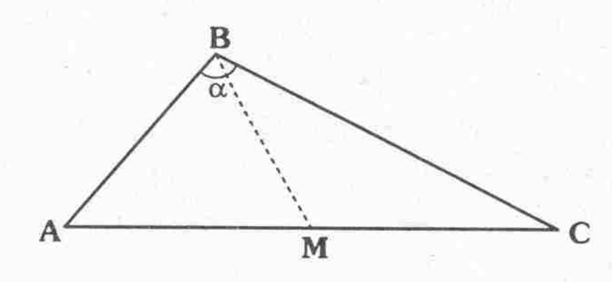


$\ell > a$; *pues* $m\measuredangle ACB > 90°$

es decir: $BM > \frac{AC}{2}$

TEOREMA

En el gráfico, $\overline{BM}$ es mediana:



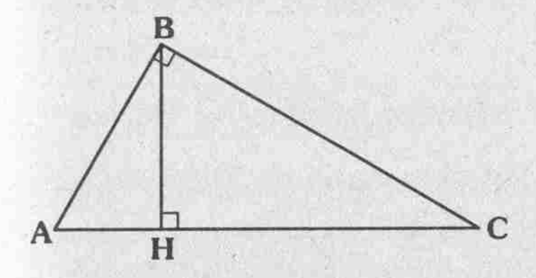
Se cumple:

$$\frac{AC}{2} > BM \Leftrightarrow \alpha > 90°$$

La demostración se análoga a las anteriores, queda como ejercicio para el lector.

TEOREMA

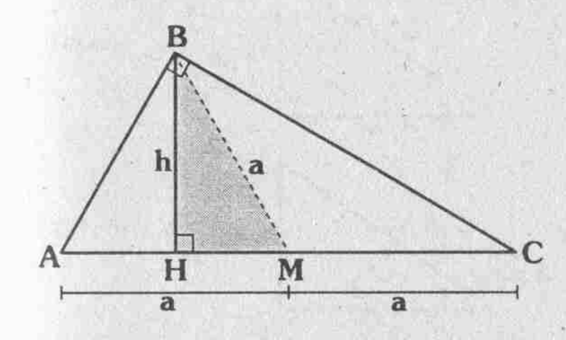
La longitud de la altura relativa a la hipotenusa es menor o igual que la mitad de la longitud de dicha hipotenusa.



En el gráfico se cumple:

$$BH \leq \frac{AC}{2}$$

Demostración:

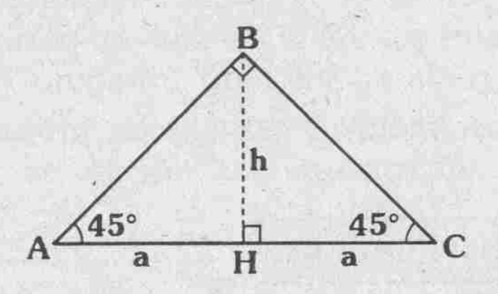


- Cuando se traza la mediana $\overline{BM}$ relativa a $\overline{AC}$, para M hay tres posibilidades (no dejarse llevar por el gráfico), que esté en $\overline{AH}$, o $\overline{HB}$ o que coincida con H.

- Sea M en $\overline{HC}$, en ⊿BHM: BH<BM

$$\Rightarrow \ h<a \ \Rightarrow \ BH < \frac{AC}{2} \qquad \text{... (I)}$$

- Si M = H, es decir la mediana es altura:



- ⊿ABC es isósceles ⇒ a = h

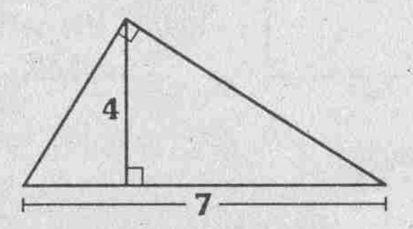
$$\Rightarrow BM = \frac{AC}{2} \qquad \text{... (II)}$$

- De (I) y (II):

$$BM \leq \frac{AC}{2}$$



El último teorema nos da una condición más de existencia para triángulos rectángulos, la relación que debe existir entre la altura y la hipotenusa, por ejemplo el siguiente triángulo "no existe".



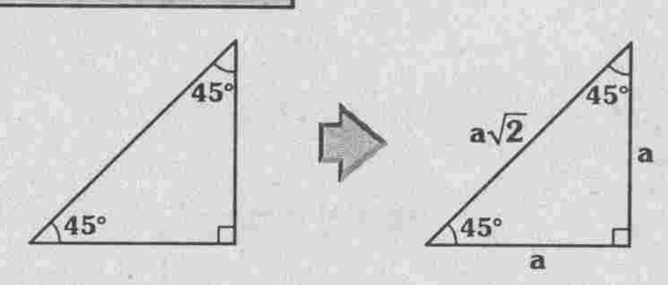
Pues no cumple:

$$4 \leq \frac{7}{2}$$

TRIANGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

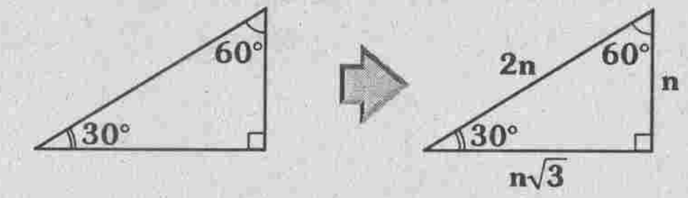
Son un conjunto de triángulos rectángulos donde son conocidas las medidas angulares y a partir de ellas es posible hallar las proporciones de sus lados y viceversa. En realidad en todo triángulo conociendo sus medidas angulares, con cálculos trigonométricos se halla las proporciones, sino que en el siguiente grupo de $\triangle_s$ las razones son sencillas, además se presentan con frecuencia en los ejercicios.

⊿Notable de 45°:

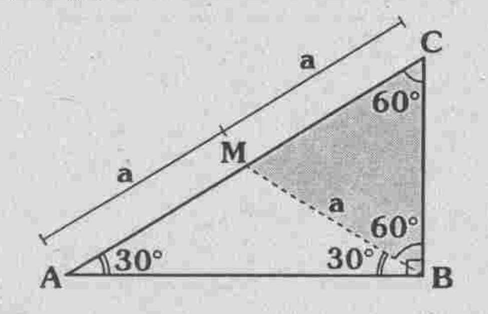


- Vemos que es el único triángulo rectángulo isósceles, por ello los catetos tienen igual longitud y por el teorema de Pitágoras, la hipotenusa tiene por longitud: "$a\sqrt{2}$".
- Si partimos de un triángulo rectángulo de catetos de igual longitud o cateto e hipotenusa en la razón de 1 a $\sqrt{2}$ en ambos casos de comprueba que los ángulos agudos miden 45°.

⊿Notable de 30° y 60°:



Demostración:



- En el ⊿ABC se traza la mediana BM:

$\Rightarrow BM = a$

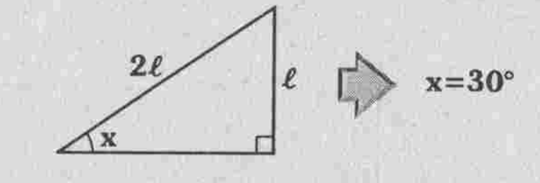
ΔBMC equilátero $\Rightarrow BC = a$

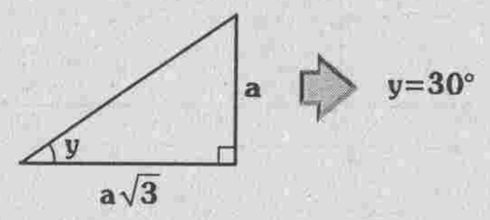
- Por el teorema de Pitágoras:

$$AB = a\sqrt{3}$$

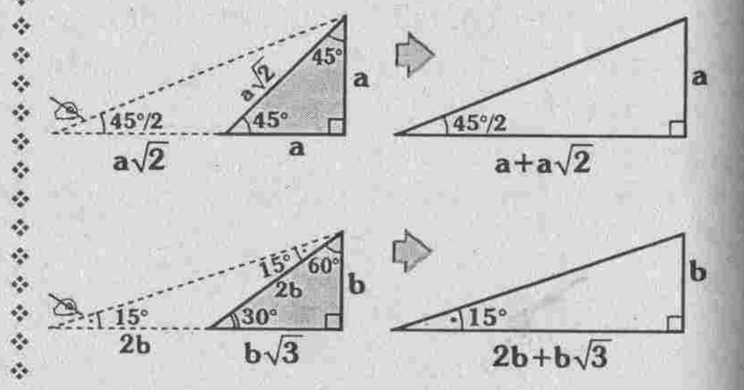
Nota

En cada uno de los siguientes casos, se prueba el resultado indicado.



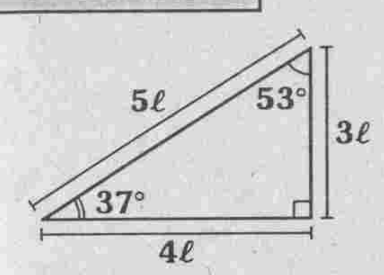


- De los triángulos rectángulos de 45°, 30° y 60°, se deducen los siguientes.



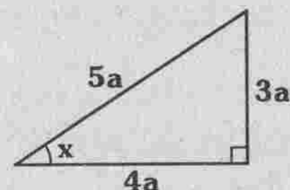
TRIÁNGULOS NOTABLES APROXIMADOS

⊿Notable de 37° y 53°:



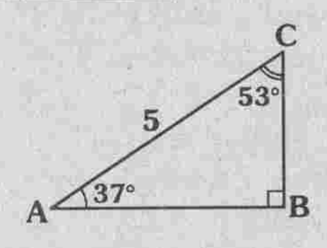


- *Las proporciones de los lados 3:4:5 nos muestran que* ***es el único triángulo rectángulo en el que los lados están en progresión aritmética****.*
- *En cuanto a los valores aproximados podemos considerar, los siguientes casos:*



Con uso de calculadora:

$x = 36,869°$ $\Rightarrow$ $x \approx 37°$

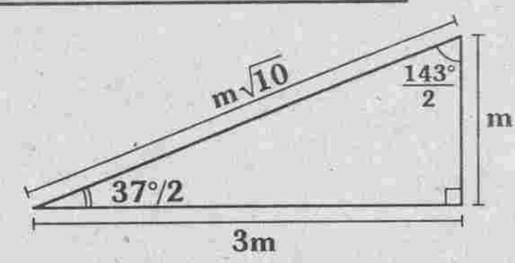


$AB = 3,993 \approx 4$

$BC = 3,009 \approx 3$

- *Debido a su presencia en muchos ejercicios lo usaremos en los problemas como "exactos", pero vemos que en realidad no lo son.*
- *Los triángulos que se deducen a partir de él serán también aproximados.*

⊿Notable de 37°/2 y 143°/2:



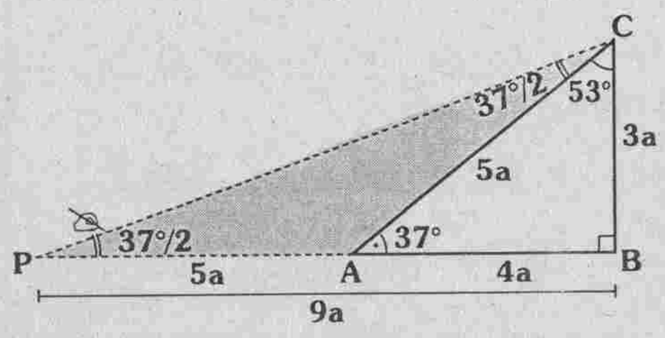
Notar:

$$\frac{37°}{2} = 18,5° = 18°30'$$

$$\frac{143°}{2} = 71,5° = 71°30'$$

Demostración:

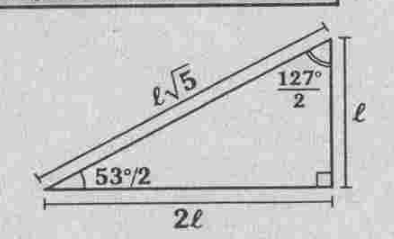
- Partimos del triángulo de 37° y 53°.



- Se prolonga $\overline{BA}$, tal que $AP = AC = 5a$

  ΔPAC isósceles $\Rightarrow$ $m\measuredangle APC = \dfrac{37°}{2}$
- Luego: $PB = 9a$ y $BC = 3a$
- Es decir: $PB = 3(BC)$
- Sea $BC = m$ $\Rightarrow$ $PB = 3m$, por teorema de Pitágoras: $PC = m\sqrt{10}$

⊿Notable de 53°/2 y 127°/2:



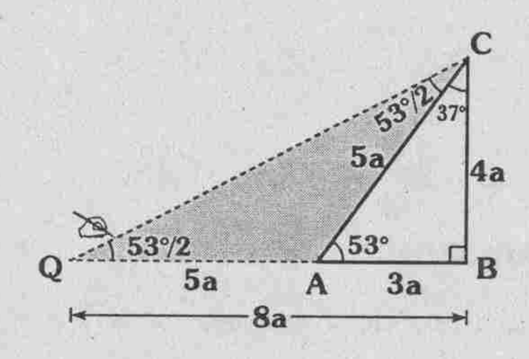
Considerar:

$$\frac{53^\circ}{2} = 26{,}5^\circ = 26^\circ 30'$$

$$\frac{127^\circ}{2} = 63{,}5^\circ = 63^\circ 30'$$

Demostración:

Partimos del ⊿ de 37° y 53°.



Se prolonga $\overline{BA}$ hasta Q tal que $AQ = 5a$.

$\Rightarrow \Delta QAC$ es isósceles, luego:

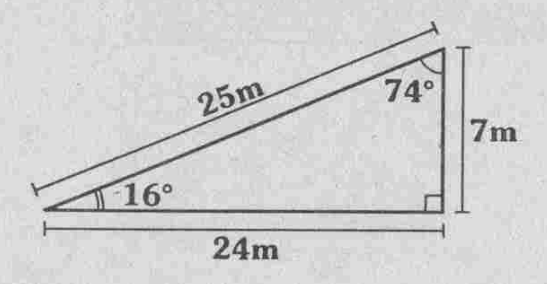
$$m\sphericalangle CQA = m\sphericalangle QCA = \frac{53^\circ}{2}$$

- Se tendrá: $QB = 8a$ y $BC = 4a$
- Es decir: $QB = 2(BC)$

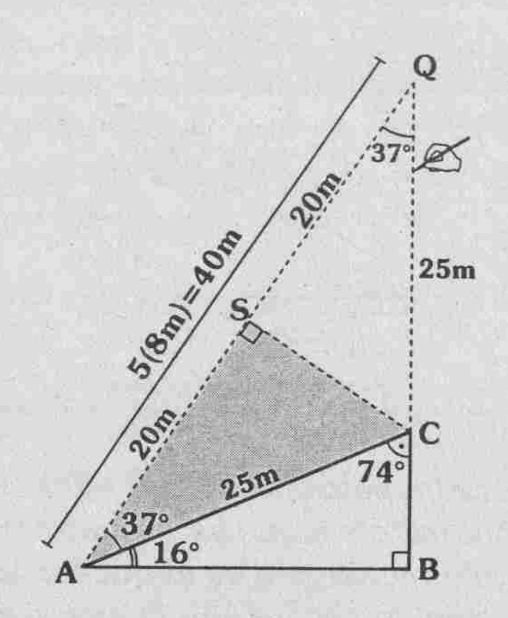
Finalmente hacemos $BC = \ell$ y $\Rightarrow QB = 2\ell$ por teorema de Pitágoras:

$$QC = \ell\sqrt{5}$$

⊿Notable de 16° y 74°:



Demostración:



- Como $74^\circ = 2(37^\circ)$, entonces se prolonga $\overline{BC}$ hasta Q tal que:

$$CQ = AC = 25m$$

- ΔACQ isósceles en este triángulo se traza la altura $CS \Rightarrow AS = SQ$.
- ⊿ASC notable de 37°

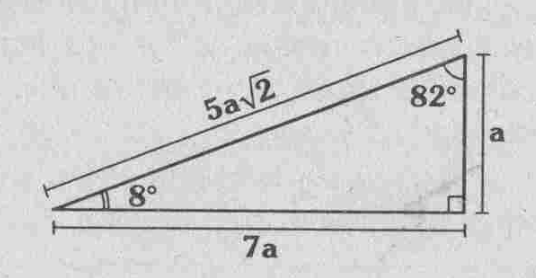
$$\Rightarrow AS = 20m$$

- Con ello el ⊿ABQ que es notable de 37°, tiene hipotenusa 40m.

$$\Rightarrow AB = 3(8m) = 24m$$

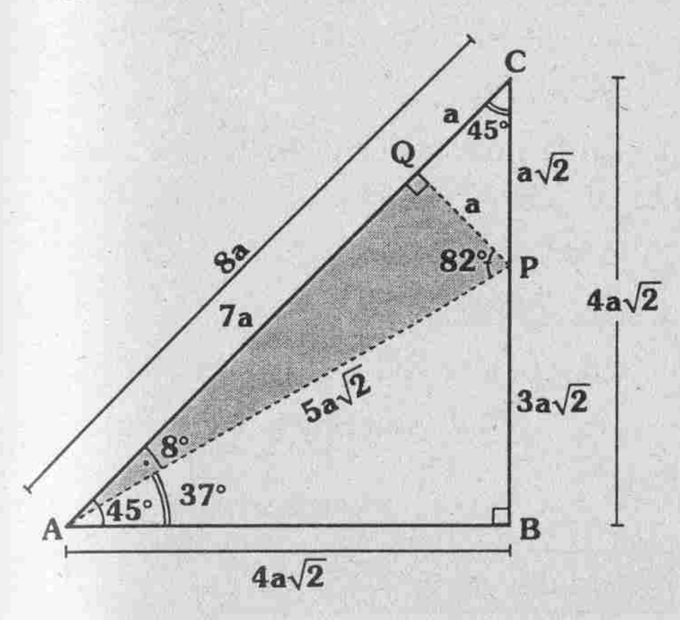
$$\text{y} \quad BQ = 4(8m) = 32m \Rightarrow BC = 7m$$

⊿Notable de 8° y 82°:



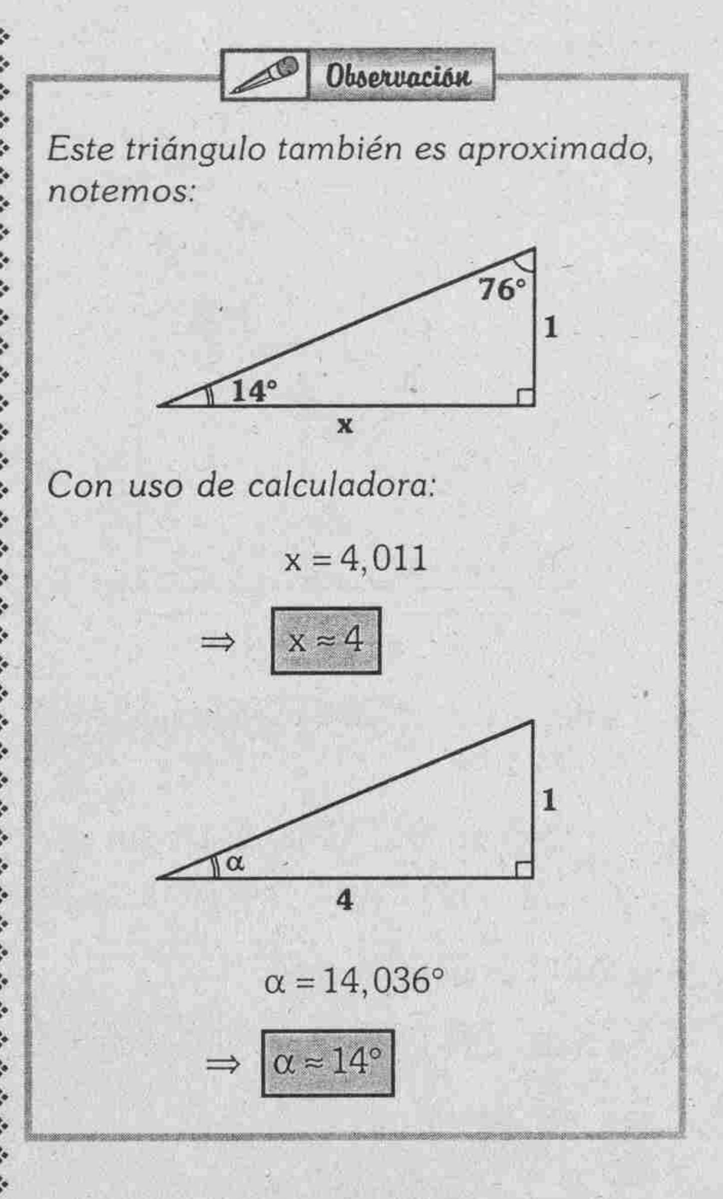
Demostración:

- Para la demostración se puede proceder similar que en la obtención del ⊿ de 37°/2 ó 53°/2, a partir del ⊿16° y 74° pues: $16° = 2(8°)$, otra forma es partir así:



- Del ⊿ABC de 45°, cuyos catetos miden $4a\sqrt{2}$, entonces $AC = 8a$.
- Se ubica P en $\overline{BC}$ tal que:
  $PB = 3a\sqrt{2} \Rightarrow PC = a\sqrt{2}$, $m\sphericalangle PAB = 37°$
  y $m\sphericalangle PAC = 8°$.
- Se traza $\overline{PQ} \perp \overline{AC}$ (Q en $\overline{AC}$).
- En ⊿PQC notable de 45° $\Rightarrow PQ = QC = a$
- En ⊿AQP se observa:
  $AQ = 7a$, $PQ = a$ y $AP = 5a\sqrt{2}$

⊿Notable de 14° y 76°:



Observación

Este triángulo también es aproximado, notemos:

Con uso de calculadora:

$$x = 4,011$$

$$\Rightarrow \boxed{x \approx 4}$$

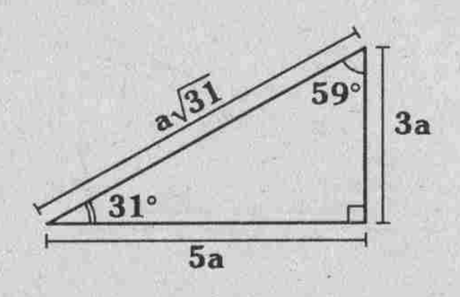
$$\alpha = 14,036°$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha \approx 14°}$$

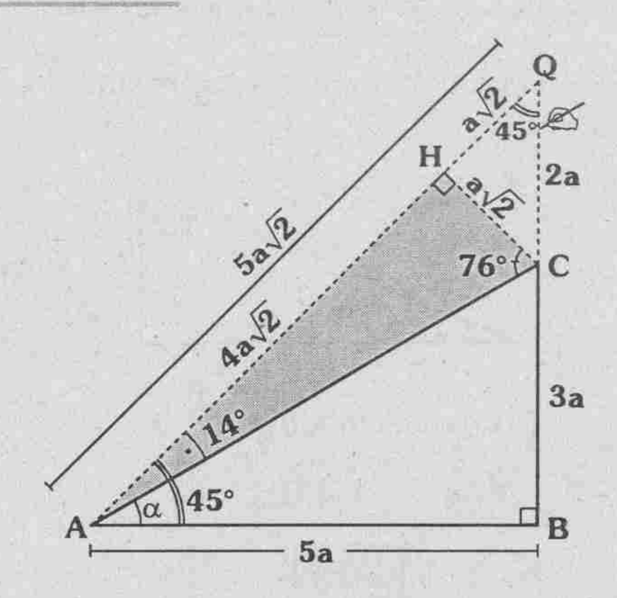
OTROS TRIÁNGULOS NOTABLES

Los siguientes resultados es producto de combinar las medidas angulares obtenidas anteriormente, cabe indicar que son "muy aproximados".

⊿Notable de 31° y 59°:



Demostración:



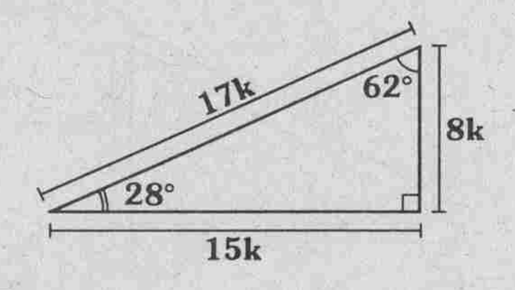
- Partimos del ⊿ABC cuyos catetos miden 3a y 5a.
- Se prolonga $\overline{BC}$ hasta Q, tal que: $CQ = 2a \Rightarrow BQ = AB = 5a$ y $AQ = 5a\sqrt{2}$
- ⊿ABQ es notable de 45°.
- Se traza $\overline{CH} \perp \overline{AQ}$, con H en $\overline{AQ}$.
- En ⊿CHQ: $HQ = QC = a\sqrt{2}$

  $\Rightarrow AH = 4a\sqrt{2}$
- El ⊿AHC es notable de 14° y 76°

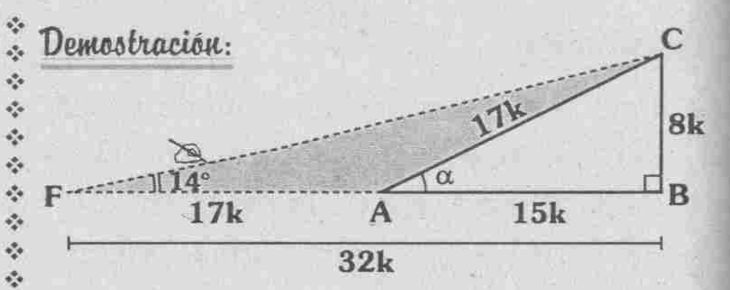
  $\Rightarrow \alpha = 45° - 14°$

  $\therefore \boxed{\alpha = 31°}$

⊿Notable de 28° y 62°:



Demostración:



- Partimos del ⊿ABC, cuyos catetos miden 8k y 15k, por teorema de Pitágoras $AC = 17k$.
- En la prolongación de $\overline{BA}$ se ubica F tal que $AF = 17k$.

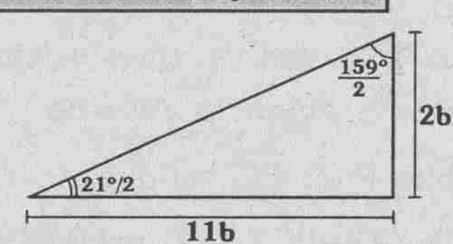
  ΔAFC isósceles
- En ⊿FBC, notamos:

  $FB = 32k$ y $BC = 8k \Rightarrow FB = 4(BC)$

  $\Rightarrow m\measuredangle BFC = 14°$

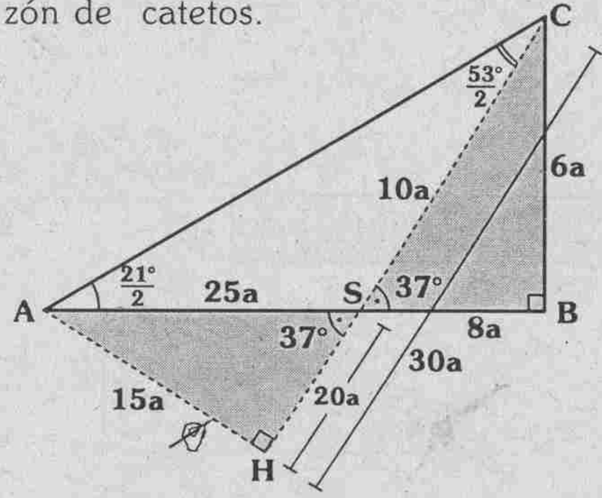
  $\therefore \boxed{\alpha = 28°}$

⊿Notable de 21°/2 y 159°/2:



Demostración:

- Partimos del ⊿ABC, donde $m\measuredangle BAC = 21/2°$ probaremos, la razón de catetos.



- Se traza $\overline{CS}$, tal que:

$$m\measuredangle ACS=\frac{53°}{2} \Rightarrow m\measuredangle CSB=37°$$

- Se traza $\overline{AH}\perp\overleftrightarrow{CS}$, sea $AH=15a$

Entonces:

$\triangle$AHS: $HS=20a$ y $AS=25a$

$\triangle$AHC: $HC=30a$

$\Rightarrow SC=10a$

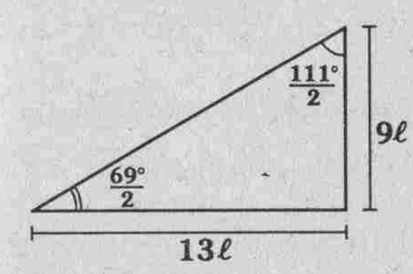
$\triangle$SBC: $SB=8a$ y $BC=6a$

Luego: $AB=33a$ y $BC=6a$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{11}{2}$$

$\therefore AB=11b$ y $BC=2b$

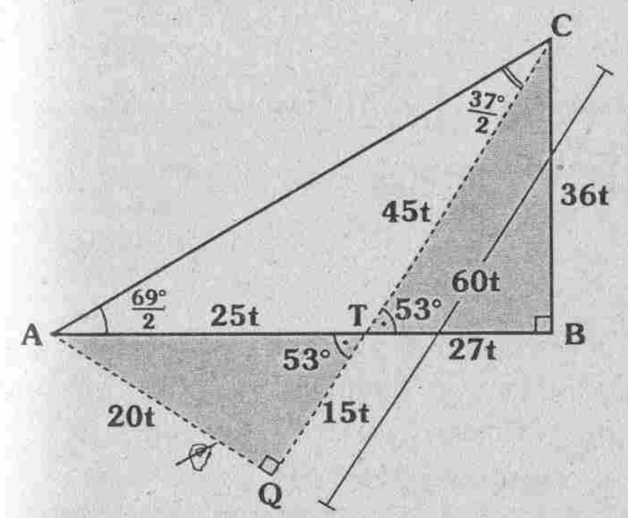
$\triangle$Notable de 69°/2 y 111°/2:



Demostración:

- Partimos del $\triangle$ABC tal que:

$$m\measuredangle BAC=69°/2$$



- Se traza $\overline{CT}$, tal que:

$$m\measuredangle ACT=\frac{37°}{2} \Rightarrow m\measuredangle BTC=53°$$

- Se traza $\overline{AS}\perp\overleftrightarrow{CT}$, sea $AQ=20t$

$\triangle$ATQ: $QT=15t$ y $AT=25t$

$\triangle$AQT: $QC=60t \Rightarrow TC=45t$

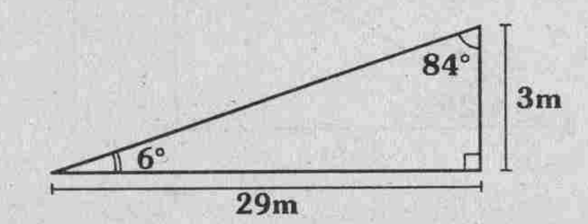
$\triangle$CBT: $TB=27t$ y $BC=36t$

- Luego: $AB=52t$ y $BC=36t$

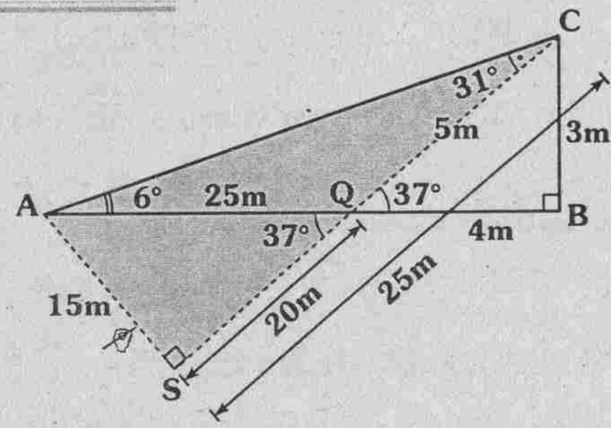
$$\Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{13}{9}$$

$\therefore AB=13\ell$ y $BC=9\ell$

$\triangle$Notable de 6° y 84:



Demostración:



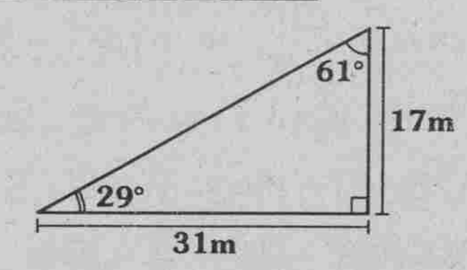
- $\triangle$ASC: notable de 31°.
- Sea: $AS=15m \Rightarrow SC=25m$
- $\triangle$ASQ y $\triangle$QBC: notable de 37°

$SQ=20m$ y $AQ=25m$

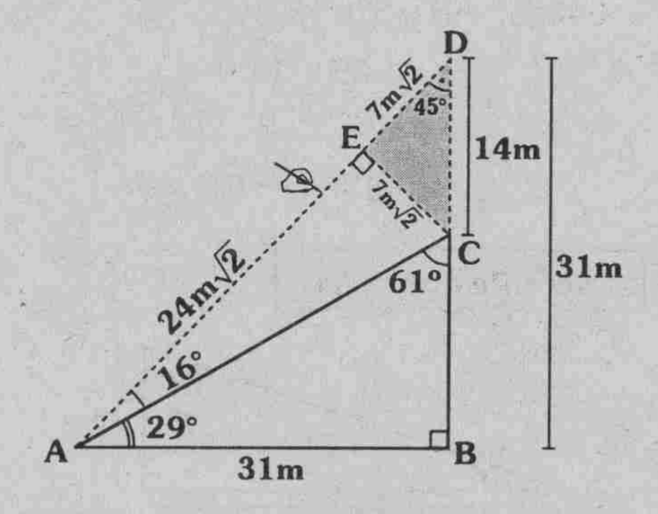
$QC=5m \Rightarrow QB=4m$ y $BC=3m$

$\Rightarrow CB=3m$ y $AB=29m$

⊿Notable de 29° y 61°:



Demostración:



- Se prolonga $\overline{BC}$ hasta D tal que:

$m\measuredangle BDA = 45° \Rightarrow m\measuredangle DAC = 16°$

- En $\triangle ACD$ se traza la altura $\overline{CE}$, entonces:

⊿AEC, notable de 16°:

$\Rightarrow EC = 7m\sqrt{2}$ y $EA = 24m\sqrt{2}$

⊿ECD, notable de 45°:

$\Rightarrow ED = 7m\sqrt{2}$ y $CD = 14m$

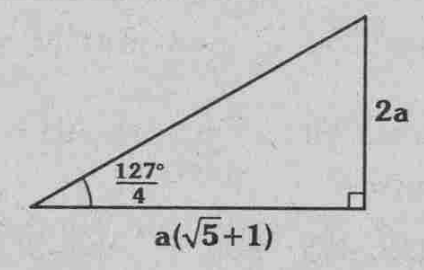
⊿ABD: notable de 45°:

$\Rightarrow$ como $AD = 31m\sqrt{2}$

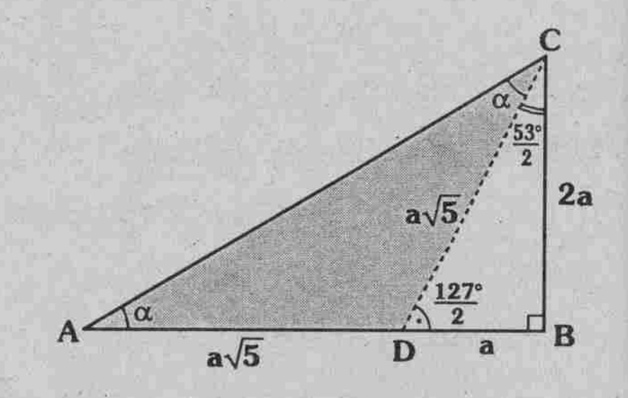
$\Rightarrow AB = BD = 31m \Rightarrow BC = 17m$

- Luego: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{31}{17}$

⊿Notable de 127°/4:



Demostración:



- Partimos del ⊿ABC, donde:

$BC = 2a$ y $AB = a + a\sqrt{5}$

- Se traza $\overline{CD}$, tal que $DB = a$

$\Rightarrow AD = a\sqrt{5}$

- El ⊿DBC es notable de 53°/2

$\Rightarrow DB = a\sqrt{5}$

- $\triangle ADC$: isósceles $\Rightarrow \alpha = \dfrac{127°}{4}$

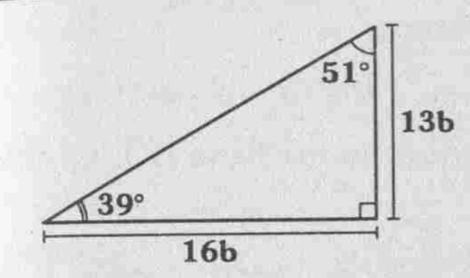
Observación

Del último gráfico, notamos:

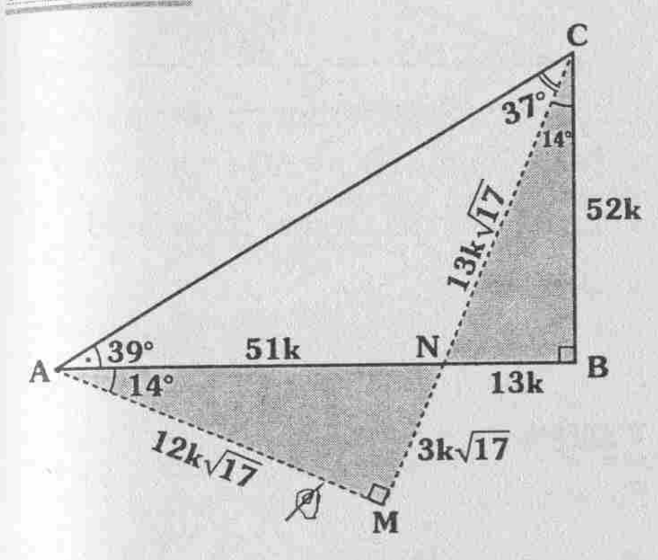
$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

veremos en el capítulo de polígonos regulares que dicho número se denomina "Número aúreo". También $\overline{BC}$ es sección aúrea de $\overline{AB}$.

⊿Notable de 39°/51°:



Demostración:



- Se parte del ⊿ABC, tal que $m\measuredangle BAC = 39°$, en el cual se traza $\overline{CN}$ tal que $m\measuredangle BCN = 14°$

  $\Rightarrow \; m\measuredangle ACN = 37°$

- Se traza: $\overline{AM} \perp \overleftrightarrow{CN}$ (M en $\overleftrightarrow{CN}$)
- Sea: $AM = 12k\sqrt{17}$

  ⊿AMN: $NM = 3k\sqrt{17}$ y $AN = 51k$

  ⊿AMC: $MC = 16k\sqrt{17} \Rightarrow NC = 13k\sqrt{17}$

  ⊿NBC: $NB = 13k$ y $BC = 52k$

- Finalmente:

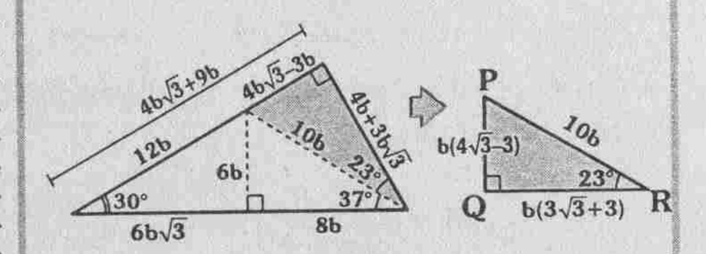
  $BC = 52k$ y $AB = 64k$

  $$\Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{13}{16}$$

  $\therefore \; BC = 13b$ y $AB = 16b$

Observación

- *No perder de vista que los triángulos que hemos deducido son aproximados.*
- *El estudiante puede hacer más combinaciones y encontrar sus propios triángulos notables, sin perder de vista que no son "exactos".*
- *Veamos el siguiente caso:*



Se ha obtenido dos triángulos rectángulos de 23°, con razonamientos lógicos, a partir de los triángulos anteriores, este resultado fue previsible pues se han utilizado triángulos aproximados.

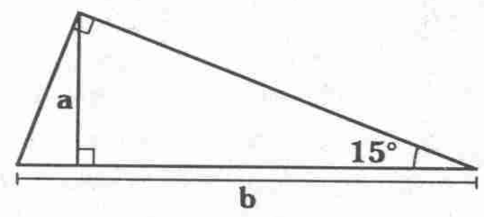
Notar:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{8}{19} = 0{,}423 \\[2ex] \dfrac{PQ}{QC} = \dfrac{4\sqrt{3}-3}{3\sqrt{3}+4} = 0{,}427 \end{array}\right\} \; \frac{8}{19} \approx \frac{4\sqrt{3}-3}{3\sqrt{3}+4}$$

TEOREMAS RELACIONADOS CON LOS TRIÁNGULOS NOTABLES

TEOREMA

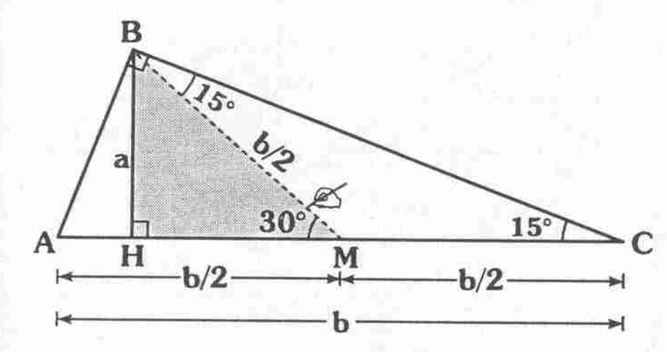
En el gráfico:



Se cumple:

$b = 4a$

Demostración:



- En el ⊿ABC, se traza la mediana BM, por teorema:

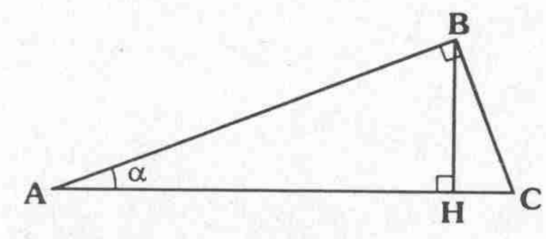
$$BM = \frac{AC}{2} \Rightarrow BM = \frac{b}{2}$$

- ⊿BHM notable de 30°

$$\Rightarrow \frac{b}{2} = 2a \qquad \therefore\ b = 4a$$

TEOREMA

En el gráfico, $AB > BC$ y $AC = 4(BH)$

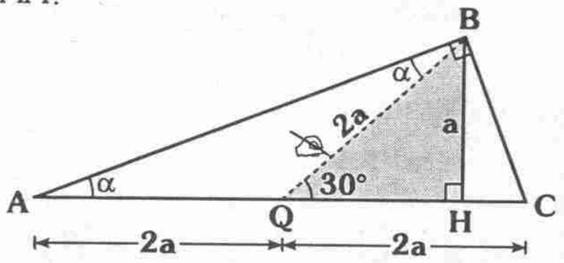


Se cumple:

$\alpha = 15°$

Demostración:

- Como $AB > BC \Rightarrow AH > HC$
- Al trazar la mediana BQ, **Q** estará en $\overline{AH}$.



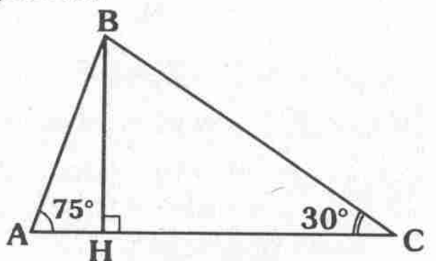
- Por teorema $BQ = AQ = QC = 2a$
- En el ⊿QHB, como $BQ = 2(BH)$
- Se cumple:

$$m\measuredangle BQH = 30° \Rightarrow 2\alpha = 30°$$

$$\therefore\ \alpha = 15°$$

TEOREMA

En el gráfico:

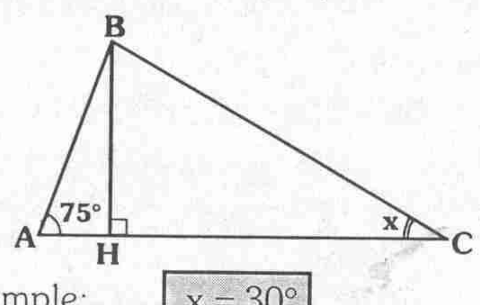


Se cumple: $AC = 2(BH)$

La demostración es directa, se deja para el lector.

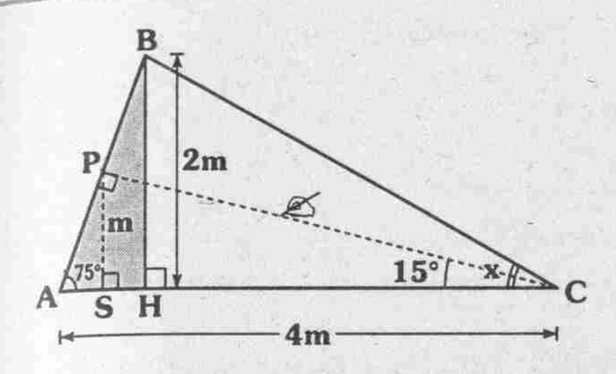
TEOREMA

En el gráfico, $AC = 2(BH)$



Se cumple: $x = 30°$

Demostración:



- Sea $AC = 4m \Rightarrow BH = 2m$
- Se traza la altura CP en el ΔABC.
- En ⊿APC, se traza $\overline{PS}$ altura relativa a $\overline{AC}$, por teorema:

$$AC = 4(PS) \Rightarrow PC = m$$

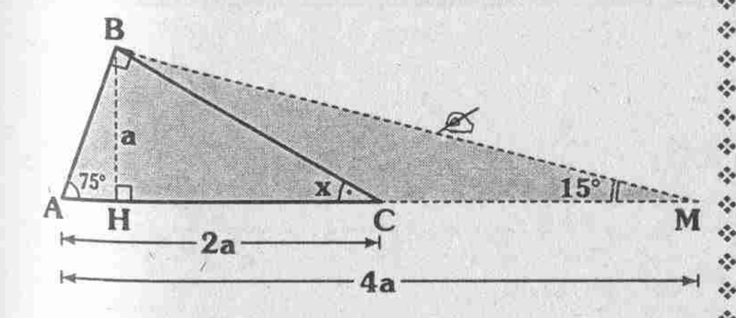
- En ⊿AHB, se tiene $\overline{BH} // \overline{PS}$ y $BH = 2(PS) \Rightarrow$ por teorema $\overline{PS}$ es base media, por tanto:

$$AP = PB$$

- En ΔABC: $AP = PB$ y $\overline{CP}$ es altura $\Rightarrow \Delta ABC$ es isósceles $\Rightarrow \overline{CP}$ es bisectriz interior.

$$\therefore\ x = 30°$$

Otra forma:

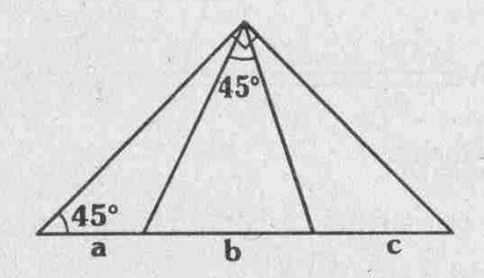


- Se traza $\overline{MB} \perp \overline{AB}$, donde M está en la prolongación de $\overline{AC}$.
- Por teorema: $AC = 4(BH) \Rightarrow AC = 4a$
- Luego: $AC = CM = 2a$
- En ⊿ABM, se tendrá $AC = CM$, es decir $\overline{BC}$ es mediana $\Rightarrow BC = 2a$
- En ⊿BHC notable.

$$\therefore\ x = 30°$$

TEOREMA

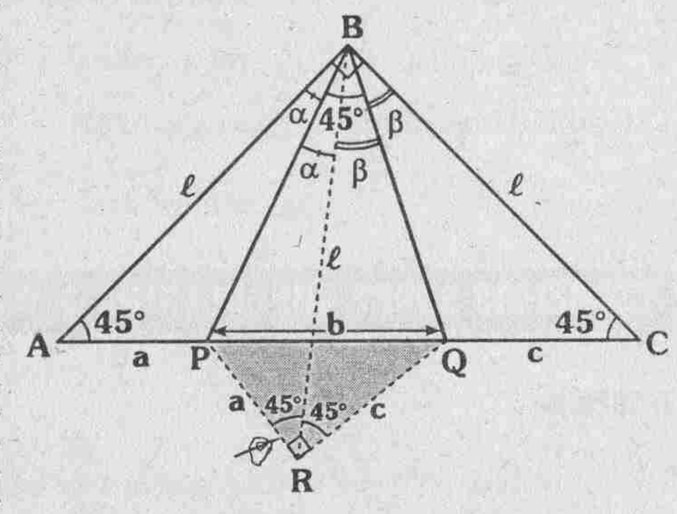
En el gráfico:



Se cumple:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Demostración:



- Sea $m\sphericalangle ABP = \alpha$ y $m\sphericalangle QBC = \beta$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 45°$$

- Se traza $\overline{BR}$ tal que: $RB = \ell$ y $m\sphericalangle PBR = \alpha \Rightarrow m\sphericalangle RBQ = \beta$

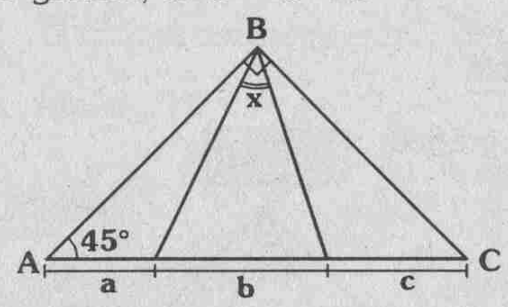
Luego: $\Delta ABP \cong \Delta RBP$ (LAL) $\Rightarrow PR = a$ y $m\sphericalangle PRB = 45°$

$\Delta RBQ \cong \Delta CBQ$ (LAL) $\Rightarrow RQ = c$ y $m\sphericalangle QRB = 45°$

En ⊿PRQ: $b^2 = a^2 + c^2$

TEOREMA

En el gráfico, si $b^2 = a^2 + c^2$



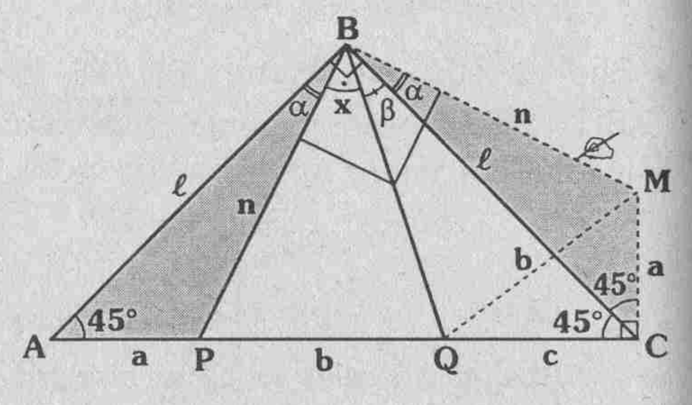
Entonces, se cumple:

$x = 45°$

Demostración:

- Se construye Δ BCM congruente con Δ BAP.
- Luego: $m\sphericalangle QCM = 90°$
- En ⊿QCM: $a^2 + c^2 = b^2$
- Por condición: $a^2 + c^2 = b^2 \Rightarrow QM = b$
- $\Delta PBQ \cong \Delta MBQ$ (LLL) $\Rightarrow x = \alpha + \beta$
- Como: $m\sphericalangle PBM = 90° \Rightarrow 2x = 90°$

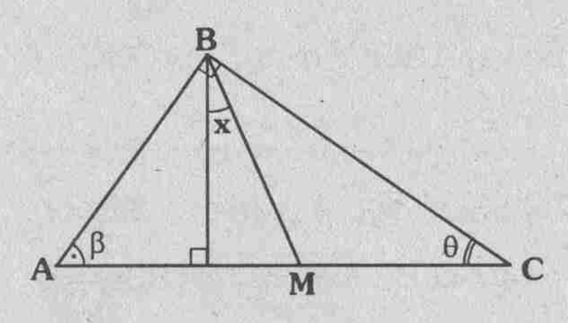
$\therefore x = 45°$



TEOREMAS SOBRE CONGRUENCIA

TEOREMA

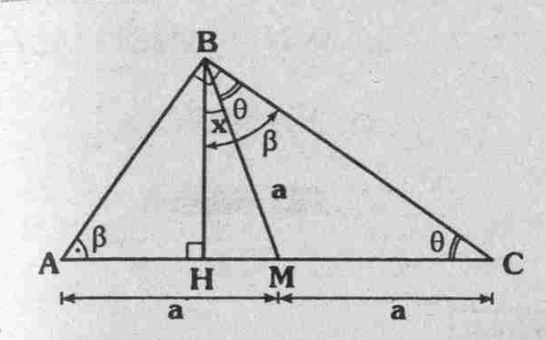
En el gráfico, $\overline{BM}$ es mediana para el ⊿ABC.



Se cumple:

$x = \beta - \theta$

Demostración:



- Por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa:

$$AM = MC = MB$$

- $\triangle MBC$: isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle MBC = \theta$$

- En ⊿ABC, como $\overline{BH}$ es altura

$$\Rightarrow m\measuredangle HBC = \beta$$

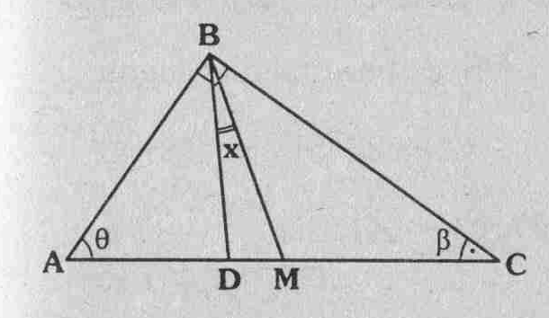
$$\Rightarrow x + \theta = \beta$$

$$\therefore\ x = \beta - \theta$$

TEOREMA

En el gráfico, para el ⊿ABC.

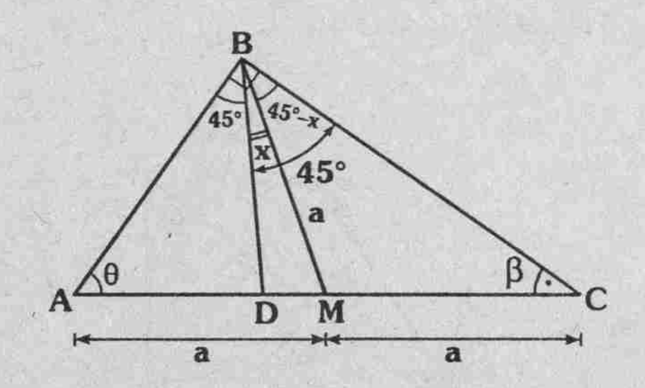
- $\overline{BD}$ es bisectriz interior .
- $\overline{BM}$ es mediana.



Se cumple:

$$\boxed{x = \frac{\theta - \beta}{2}}$$

Demostración:



- Como $\overline{BM}$ es mediana, por teorema:

$$AM = MB = MC \Rightarrow \theta = 45° + x \quad \dots (I)$$

$$\beta = 45° - x \quad \dots (II)$$

- Restando (I) y (II):

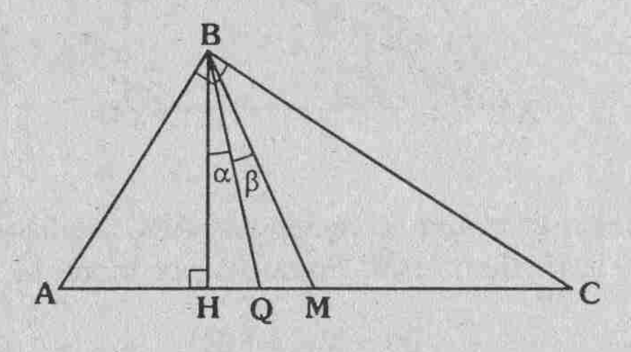
$$\theta - \beta = 2x$$

$$\therefore\ x = \frac{\theta - \beta}{2}$$

TEOREMA

En el gráfico, para el ⊿ABC:

- $\overline{BH}$ es altura.
- $\overline{BQ}$ es bisectriz interior y
- $\overline{BM}$ es mediana.



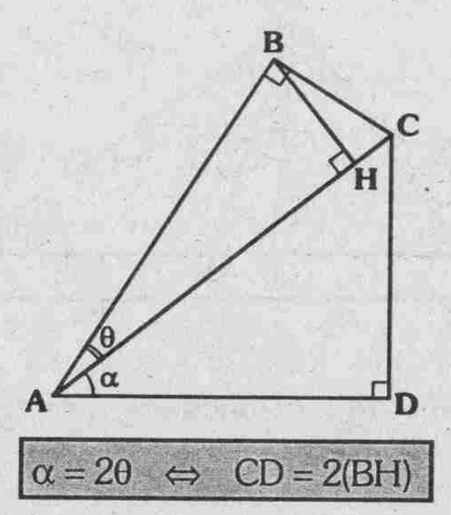
Se cumple:

$$\boxed{\alpha = \beta}$$

La demostración queda como ejercicio.

TEOREMA

En el gráfico, se cumple:



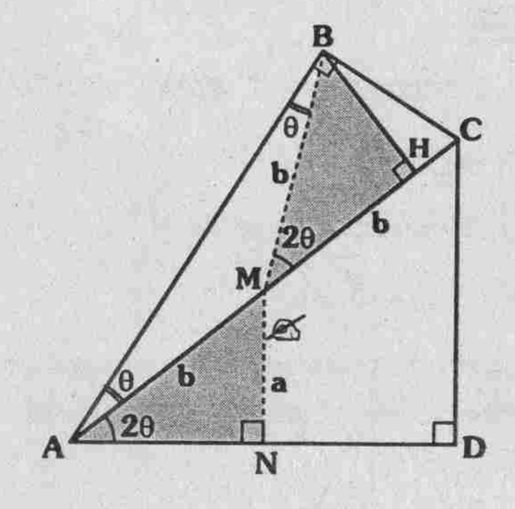
$\alpha = 2\theta \Leftrightarrow CD = 2(BH)$

Demostración:

Parte I

- Sea $\alpha = 2\theta$, se va a demostrar:

$$CD = 2(BH)$$



- En el triángulo rectángulo ABC, se traza la mediana BM, entonces por teorema:

$$AM = MC = MB$$

- En el $\triangle$ADC, se traza la base media $\overline{MN}$, por teorema:

$$CD = 2(MN)\text{ , sea } MN = a \Rightarrow CD = 2a$$

- Luego:

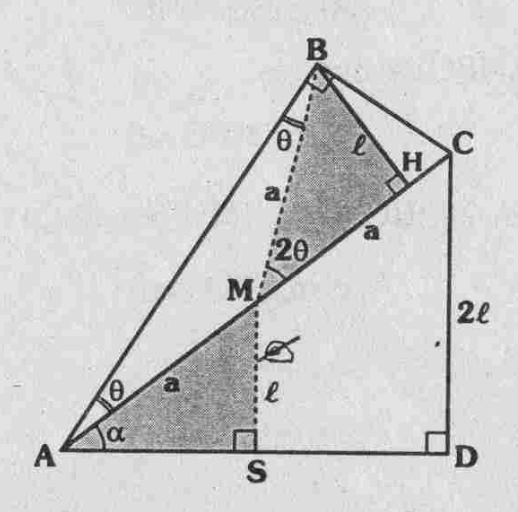
$$\triangle AMN \cong \triangle MBH \text{ (ALA)}$$

$$\Rightarrow BH = MN = a$$

$$\therefore CD = 2(BH)$$

Parte II

- Sea $CD = 2(BH)$ se va a demostrar $\alpha = 2\theta$.



- Se traza la mediana BM en el triángulo ABC, por teorema:

$$BM = MA = MC = a$$

- En el $\triangle$ADC se traza $\overline{MS} \perp \overline{AD}$

$\Rightarrow \overline{MS}$ es base media, luego:

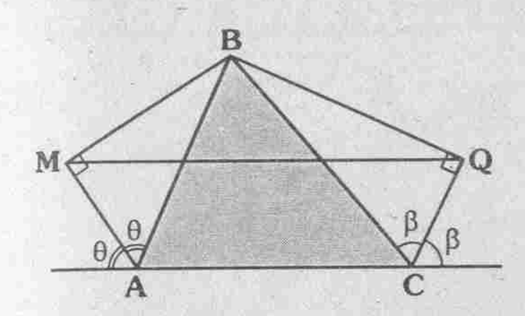
$$CD = 2(MS) \Rightarrow MS = \ell$$

- $\triangle ASM \cong \triangle MBH$

$$\therefore \alpha = 2\theta$$

TEOREMA

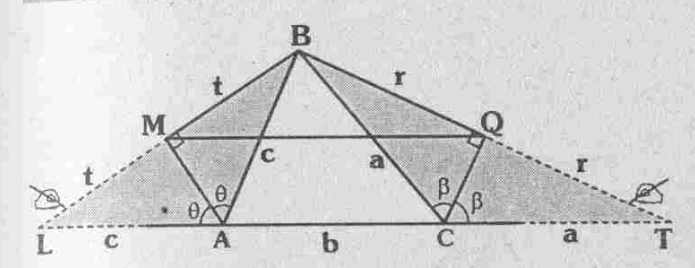
En el gráfico donde "p" es el semiperímetro de la región ABC.



Se cumple:

$$MQ = p \quad y \quad \overline{MQ} // \overline{AC}$$

Demostración:



- Por condición:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

- Se prolonga $\overline{BM}$ y $\overline{CA}$, los cuales se cortan en L, en ΔLAB vemos que $\overline{AP}$ es bisectriz y altura $\Rightarrow \Delta LAB$ es isósceles, luego:

$$AL = c \qquad y \qquad LM = MB$$

- Análogamente se prueba que el ΔBCT es isósceles, entonces:

$$CB = CT = a \quad y \quad BQ = QT$$

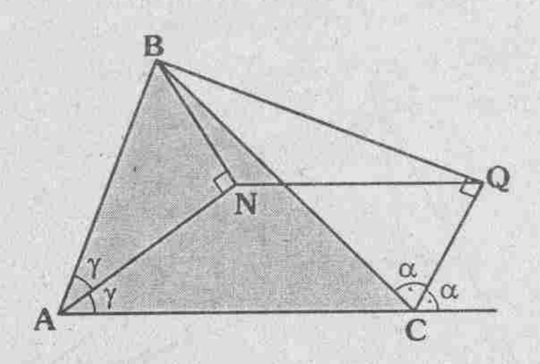
- En ΔLBT ; se tendrá que $\overline{MQ}$ es base media, entonces:

$$MQ = \frac{a+b+c}{2} \quad y$$

$$\overline{MQ} // \overline{AB}$$

TEOREMA

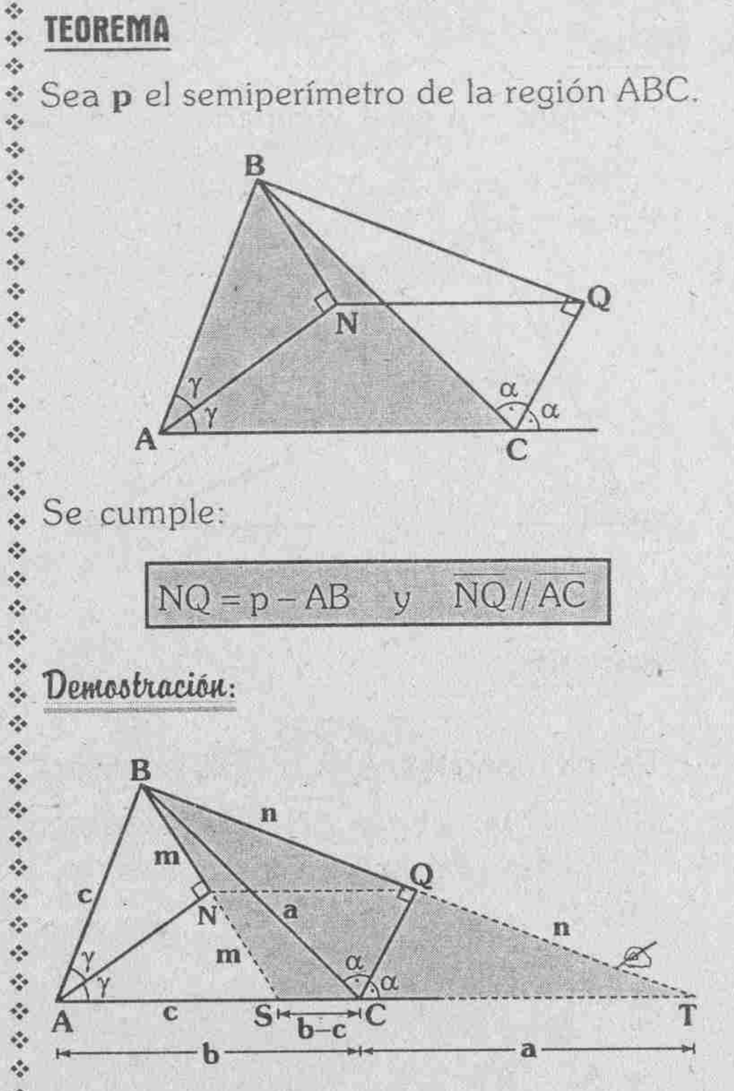
Sea **p** el semiperímetro de la región ABC.



Se cumple:

$$NQ = p - AB \quad y \quad \overline{NQ} // \overline{AC}$$

Demostración:



- En el gráfico se está considerando b>c (*aunque no necesariamente, sino lo fuera se prueba análogamente*).

- ΔABS y ΔBCT son isósceles.

$$\Rightarrow AS = c \;;\; CT = a \;;\; BN = NS \quad y$$
$$BQ = QT$$

- ΔSBT : $\overline{NQ}$ es base media.

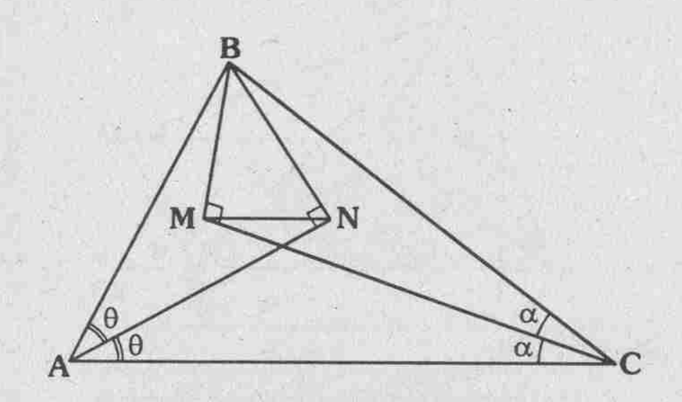
$$\Rightarrow NQ = \frac{a+b-c}{2} \quad y \quad \overline{NQ} // \overline{ST}$$

$$NQ = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{2p-2c}{2}$$

$$\therefore NQ = p - c \qquad y \qquad \overline{NQ} // \overline{AC}$$

TEOREMA

En el gráfico, **p** es el semiperímetro de la región ABC.

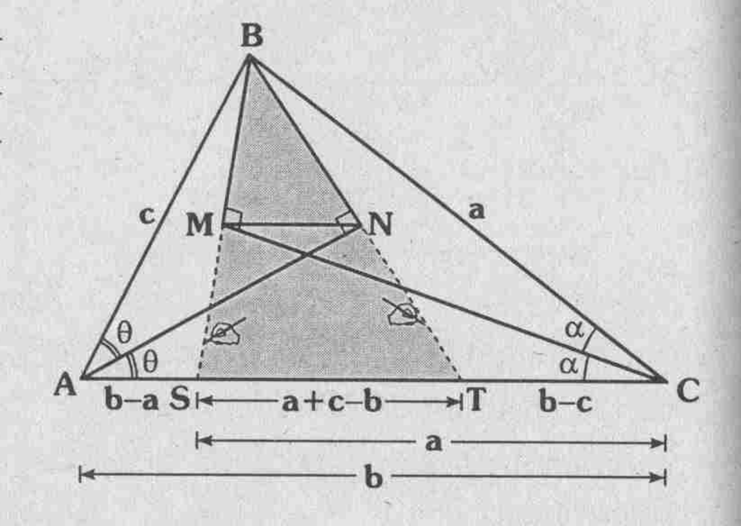


Se cumple:

$$MN = p - AC \quad y \quad \overline{MN} // \overline{AC}$$

Demostración:

- En los triángulos ABT y CBS se observará que las alturas $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$ respectivamente son también bisectrices, entonces:



- ΔABT y ΔSBC son isósceles

$\Rightarrow AB = AT = c$; $CB = CS = a$;

$BN = NT$ y $BM = MS$

- En triángulo SBT: $\overline{MN}$ es base media, entonces:

$$MN = \frac{a+b-c}{2} \quad y \quad \overline{MN} // \overline{ST}$$

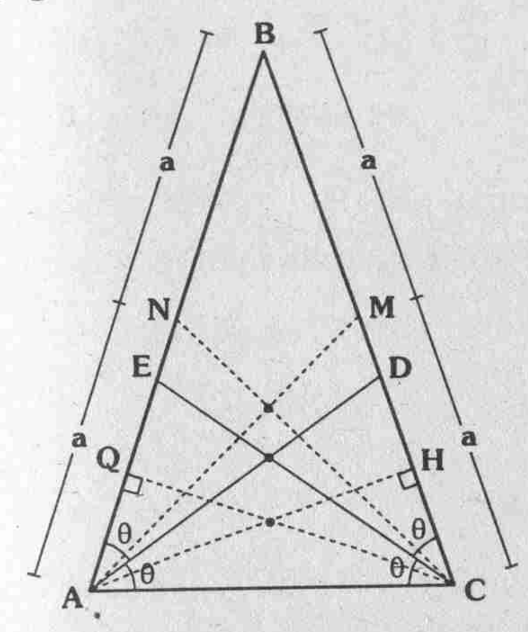
$$\Rightarrow MN = \frac{a+b+c-2b}{2} = \frac{2p-2b}{2}$$

$$\therefore MN = p - b$$

TEOREMAS EN EL TRIÁNGULO ISÓSCELES

TEOREMA

En el gráfico, $AB = BC$



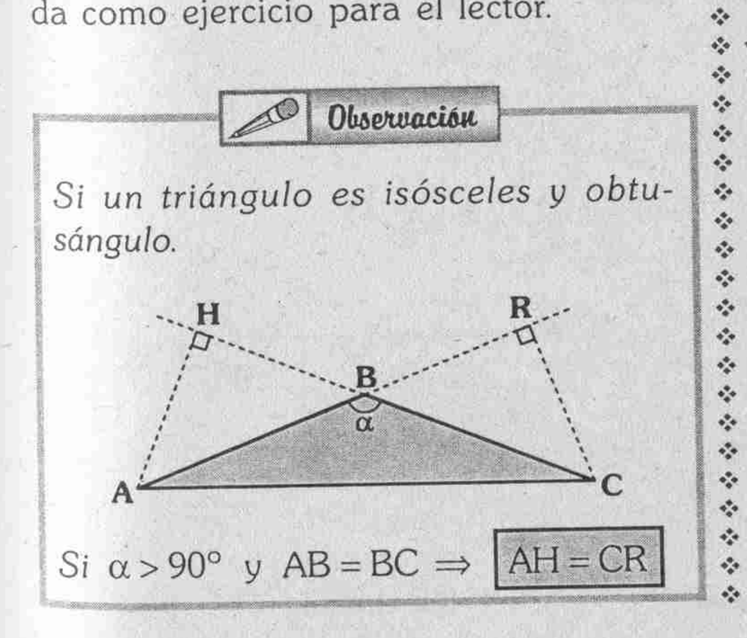
Entonces:

- $\overline{AH}$ y $\overline{CQ}$: alturas $\Rightarrow$ $\boxed{AH = CQ}$
- $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$: medianas $\Rightarrow$ $\boxed{AM = CN}$
- $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ bisectrices $\Rightarrow$ $\boxed{AD = CE}$

Cada uno de los resultados indicados queda como ejercicio para el lector.

Observación

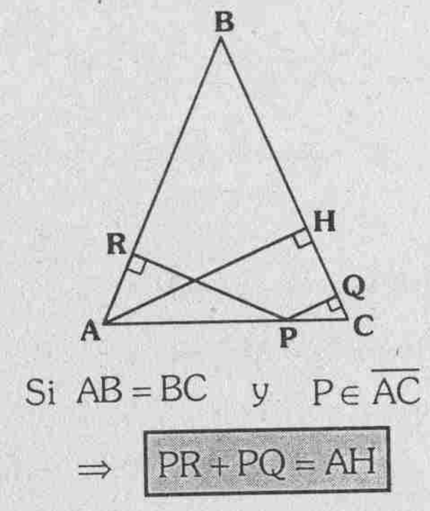
Si un triángulo es isósceles y obtusángulo.



Si $\alpha > 90°$ y $AB = BC \Rightarrow$ $\boxed{AH = CR}$

TEOREMA

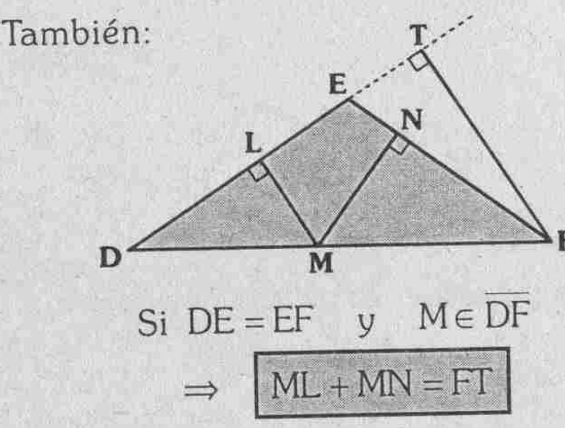
La suma de distancias de un punto de la base a los otros lados, es igual a la longitud de cualquiera de las alturas trazadas de los extremos de la base.



Si $AB = BC$ y $P \in \overline{AC}$

$\Rightarrow$ $\boxed{PR + PQ = AH}$

También:

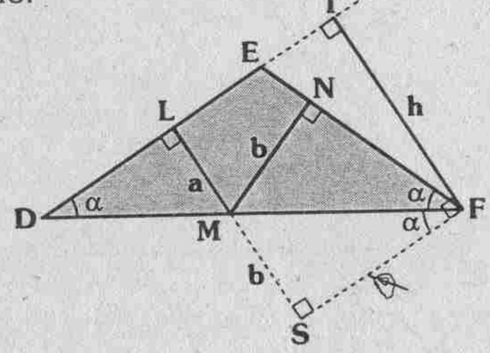


Si $DE = EF$ y $M \in \overline{DF}$

$\Rightarrow$ $\boxed{ML + MN = FT}$

Demostración:

- Se puede elegir cualquiera de los triángulos (acutángulo u obtusángulo) isósceles. Escojamos el segundo triángulo.



- ΔDEF : isósceles
- Se prolonga $\overline{LM}$ y se traza $\overline{FS} \perp \overleftrightarrow{LM}$.
- Como $\overline{FS} // \overline{DE} \Rightarrow m\measuredangle MFS = \alpha$
- Por teorema de la bisectriz:

$$MN = MS = b$$

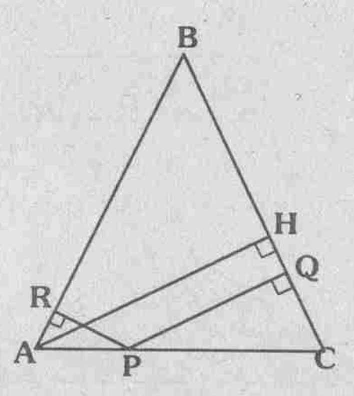
- Como: $\overline{LT} // \overline{SF}$ y $\overline{LS} // \overline{TF}$

$$\Rightarrow h = a + b$$

TEOREMA

En el gráfico, si $P \in \overline{AC}$ y

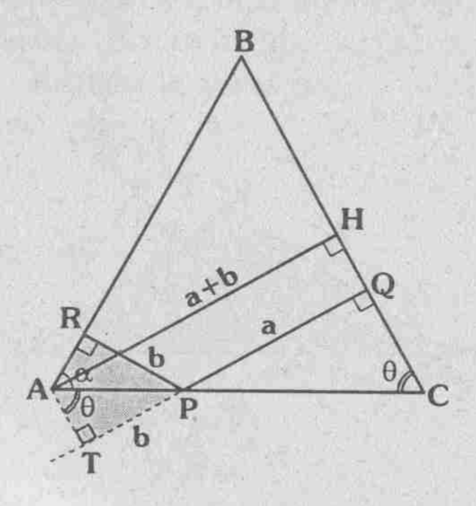
$$PR + PQ = AH \Rightarrow AB = BC$$



(se trata del recíproco del teorema anterior).

Demostración:

- El ΔABC, puede ser acutángulo, obtusángulo o rectángulo.



- Se prolonga $\overline{QP}$ y se traza:

$$\overline{AT} \perp \overline{PQ} \Rightarrow \overline{AT} // \overline{BC}$$

- Como:

$$\overline{AH} // \overline{TQ} \text{ y } \overline{AT} // HQ$$

$$\Rightarrow AH = TQ \Rightarrow PT = b$$

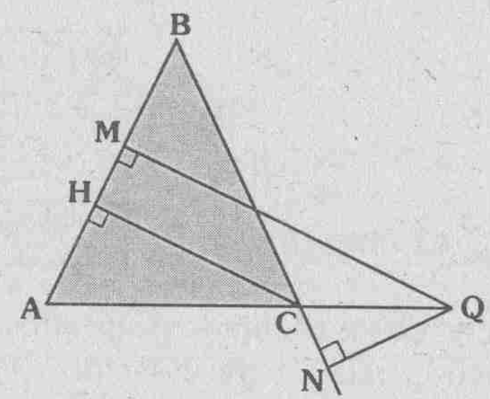
- Como $PR = PT$, por el recíproco del teorema de la bisectriz: $\alpha = \theta$

$$\Rightarrow \Delta ABC \text{ es isósceles}$$

$$\therefore AB = BC$$

TEOREMA

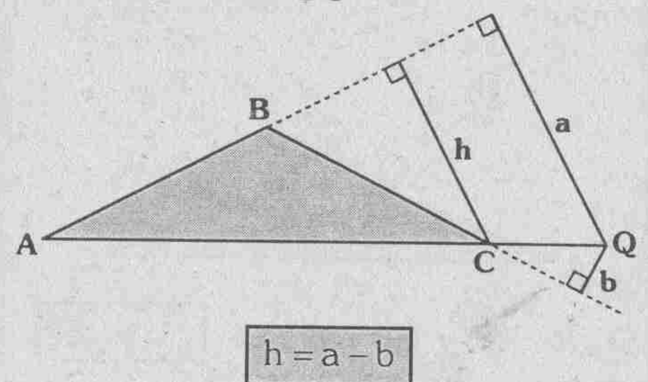
En el gráfico, $AB = BC$ y Q está en la prolongación de $\overline{AC}$ (o $\overline{CA}$).



Se cumple:

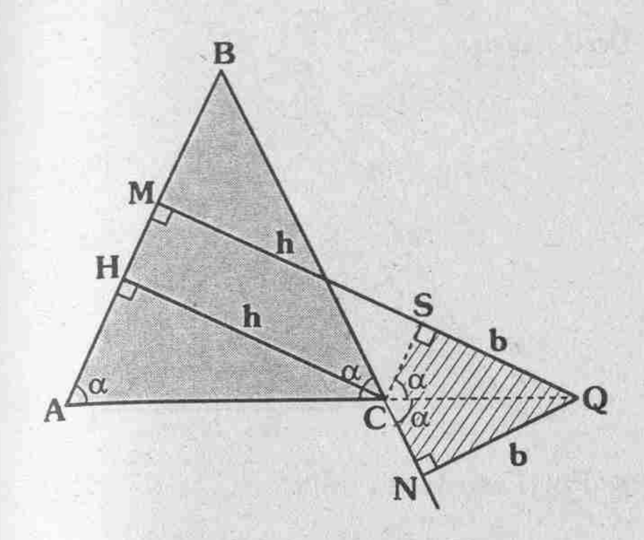
$$QM - QN = CH$$

También: si $AB = BC$



$$h = a - b$$

Demostración:



- Elijamos el primer triángulo.
- Como AB=BC:

$\Rightarrow \quad m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle CAB$

- Se traza:

$\overline{CS} \perp \overline{MQ} \Rightarrow CH = SM$

- Como:

$\overline{CS} // \overline{AB} \Rightarrow m\sphericalangle SCQ = \alpha$

- Por teorema de la bisectriz:

$QN = QS$

$\Rightarrow \quad QM = b + h$

$QM = QN + CH$

$\therefore \quad QM - QN = CH$

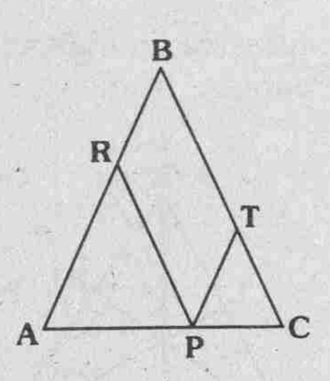


El recíproco también se cumple, es decir:

Si $QM - QN = CH \Rightarrow AB = BC$

TEOREMA

Si $AB = BC$, $P \in \overline{AC}$, $\overline{PR} // \overline{BC}$ y $\overline{PT} // \overline{AB}$.



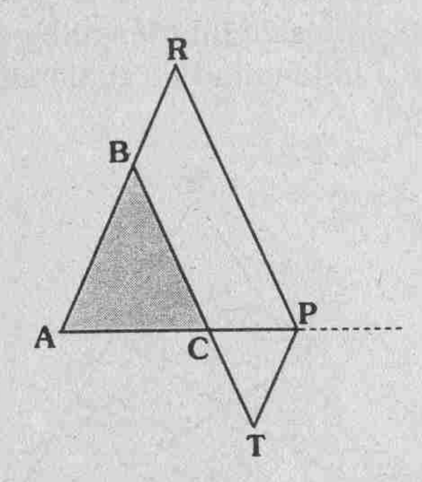
Se cumple:

$$PR + PT = AB$$

La demostración queda como ejercicio para el lector.

TEOREMA

Si $AB = BC$, P está en la prolongación de $\overline{AC}$, $\overline{PR} // \overline{BC}$ y $\overline{PT} // \overline{AB}$.



Se cumple:

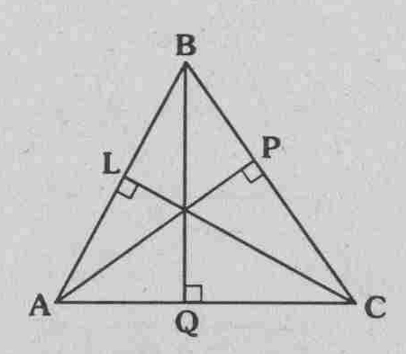
$$PR - PT = AB$$

La demostración queda como ejercicio.

TEOREMAS EN EL TRIÁNGULO EQUILÁTERO

TEOREMA

Las tres alturas de un triángulo equilátero son congruentes.



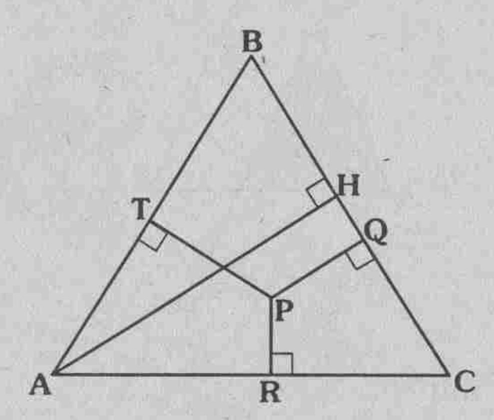
Si ΔABC es equilátero, entonces:

$$AP = BQ = CL$$

La demostración queda como ejercicio para el lector.

TEOREMA

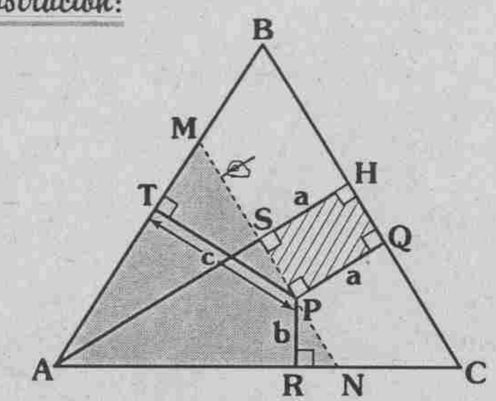
La suma de distancias de un punto interior a los lados de un triángulo equilátero, es igual a la longitud de cualquiera de las alturas.



Si ΔABC es equilátero y P está en la región interior, entonces:

$$PQ + PR + PT = AH$$

Demostración:



- Por P se traza $\overline{MN} // \overline{BC}$

  $\Rightarrow \Delta AMN$ es equilátero

- Por el teorema anterior: $b + c = AS$
- Pero como: $PQ = SH = a$

  $\Rightarrow \quad AH = AS + SH$

  $\therefore \quad AH = b + c + a$

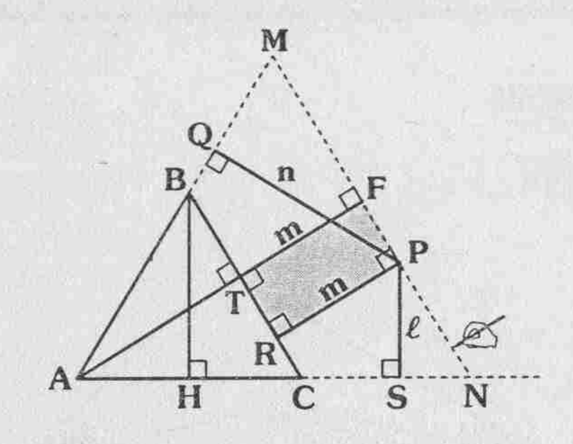
TEOREMA

En el gráfico, si P se ubica en cualquiera de las regiones sombreadas (exteriores relativas a cada lado), se cumple:

$$PQ + PS - PR = BH$$

$$a + b - c = d + e - f = BH$$

Demostración:



- Por P se traza $\overline{MN} // \overline{BC}$

  $\Rightarrow$ ΔMNA es equilátero

- ΔABC equilátero $\Rightarrow$ $BH = AT$

- Por teorema del Δ isósceles

  $AF = n + \ell$

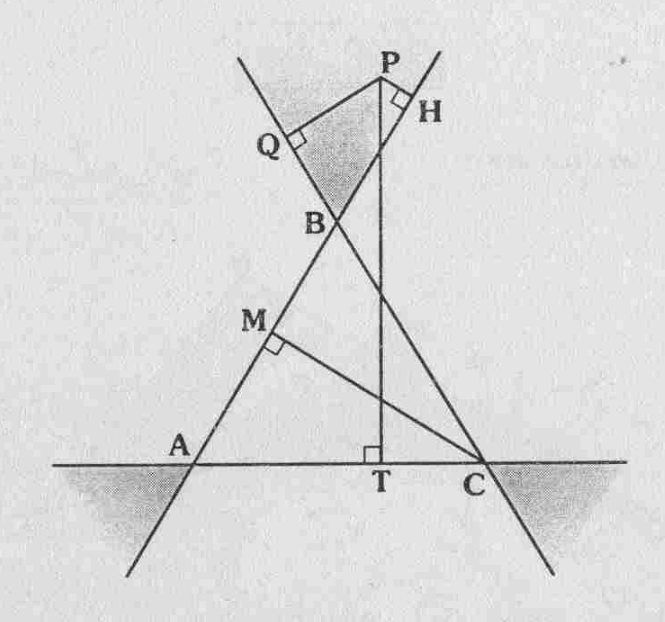
  $AT + m = n + \ell$

  $\Rightarrow$ $AT = n + \ell - m$

$\therefore\ BH = PQ + PS - PR$

TEOREMA

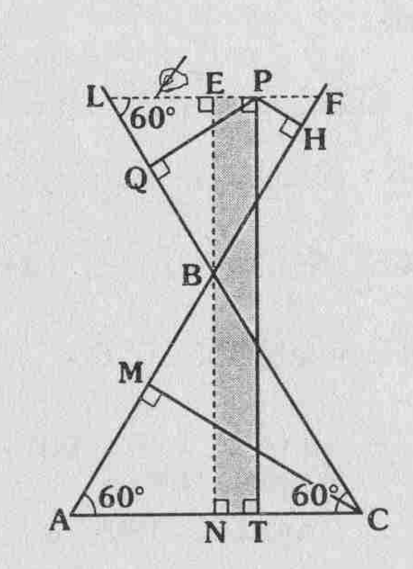
En el gráfico, el ΔABC es equilátero y P se ubica en cualquiera de las regiones sombreadas.



Se cumple:

$$PT - PQ - PH = CM$$

Demostración:



- Se traza por P una paralela a $\overline{AC}$ que corta a las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ en F y L respectivamente.

  ΔLBF equilátero $\Rightarrow$ $PQ + PH = BE$

  ΔABC equilátero $\Rightarrow$ $BN = CM$

- Luego: $PT = BE + BN$

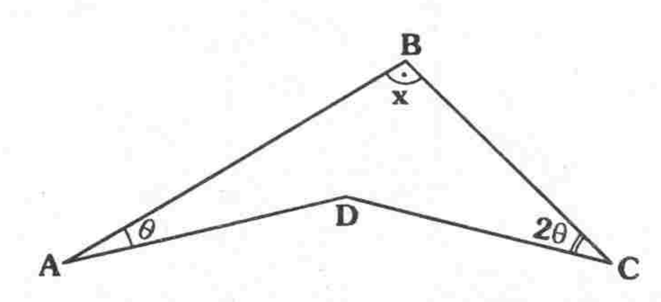
  $\Rightarrow$ $PT = PQ + PH + CM$

  $\therefore\ PT - PQ - PH = CM$

TEOREMAS SOBRE CUADRILÁTEROS NO CONVEXOS (CÓNCAVOS)

TEOREMA

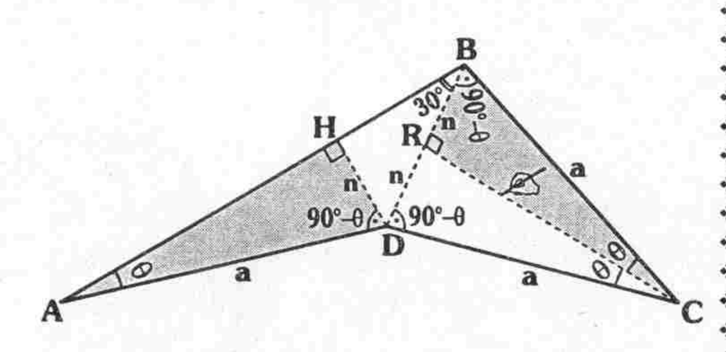
Caso I



- En el gráfico, si AD=DC=BC, se cumple:

$$x = 120° - \theta$$

Demostración:



- Se traza $\overline{BD}$, entonces el ΔBDC es isósceles.
- En el ΔBDC se traza la altura $\overline{CR}$

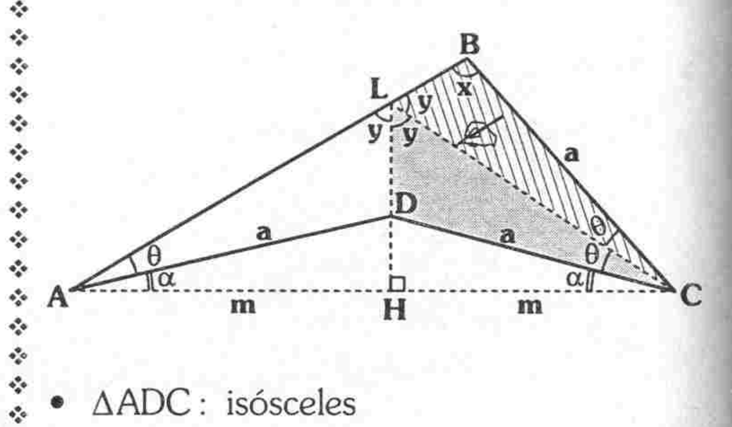
  $\Rightarrow$ DR = BR y $m\measuredangle BCR = m\measuredangle RCD$

- $\triangle RBC \cong \triangle HDA$(ALA) $\Rightarrow$ HD = BR
- $\triangle BDH$: notable de 30°/60°

  $\Rightarrow m\measuredangle ABC = 30° + 90° - \theta$

  $\therefore m\measuredangle ABC = 120° - \theta$

Otra forma de demostrar:



- ΔADC: isósceles
- $\overleftrightarrow{DH}$ es mediatriz de $\overline{AC}$ $\Rightarrow$ LA = LC
- Luego: $m\measuredangle LCD = \theta$ y

  $m\measuredangle ALH = m\measuredangle CLH = y$

- $\Delta DCL \cong \Delta BCL$ (LAL)

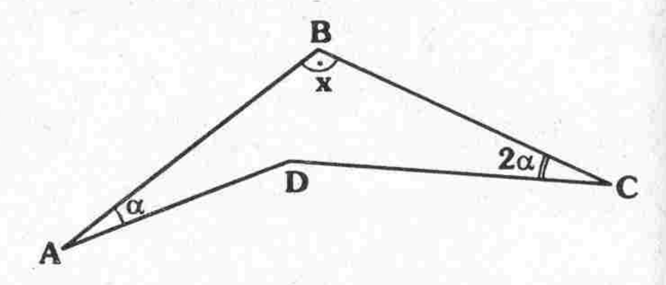
  $\Rightarrow m\measuredangle BLC = y$

- En "L": $y + y + y = 180° \Rightarrow y = 60°$
- En ΔBLC: $x + 60° + \theta = 180°$

  $\therefore x = 120° - \theta$

TEOREMA

Caso II

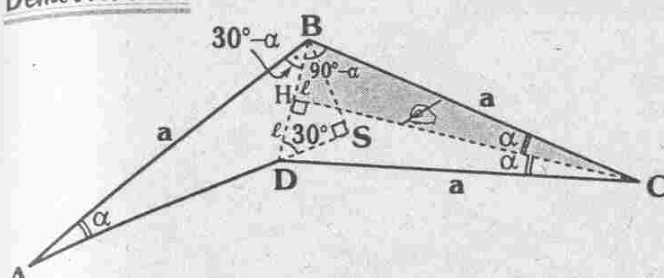


En el gráfico, AB = BC = CD

Se cumple:

$$x = 120° - 2\alpha$$

Demostración:



- ΔBDC : isósceles.
- En ΔBDC se traza la altura $\overline{CH}$, entonces:

  BH = HD y m∢BCH = m∢DCH

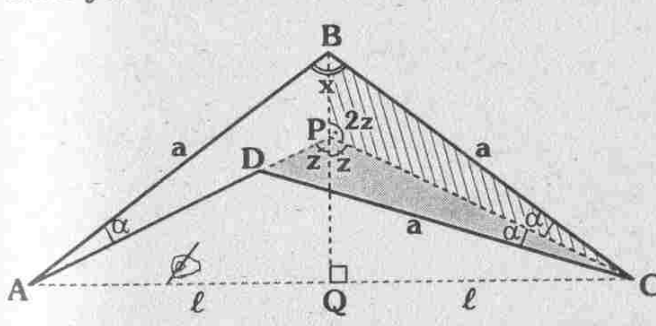
- ⊿ ASB ≅ ⊿ CHB (LAL) ⇒ BS = ℓ
- ⊿DSB: notable de 30°

  ⇒ m∢ABD = 30° – α

- Luego: m∢ABC = 30° – α + 90° – α

  ∴ m∢ABC = 120° – 2α

Otra forma de demostrar:



- En el ΔABC se traza la altura $\overline{BQ}$, entonces $\overline{BQ}$ es mediatriz de $\overline{AC}$.
- Por teorema de la mediatriz:

  AP = PC y m∢APQ = m∢QPC = z

- ΔDCP ≅ ΔBCP (LAL) ⇒ m∢BPC = 2z
- Luego: z + 2z = 180° ⇒ z = 60°
- En ABCP: x + α + α = 2z = 120°

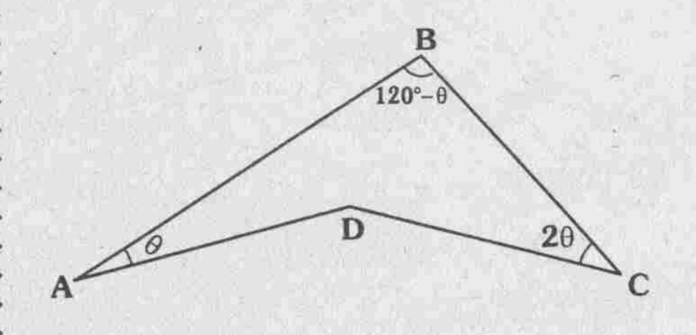
  ∴ x = 120° – 2α

Los siguientes teoremas son los recíprocos de los dos teoremas anteriores mencionados.

ANALICEMOS PRIMERO LOS RECÍPROCOS DEL CASO I

TEOREMA

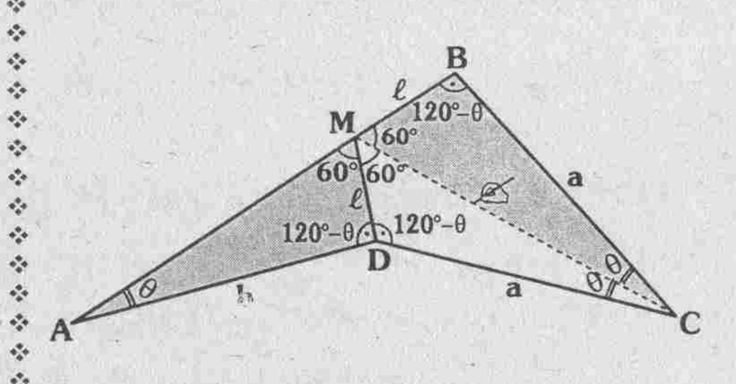
En el gráfico, si BC = CD



Se cumple:

AD = BC

Demostración:



- Se traza $\overline{CM}$ bisectriz, luego:
- ΔBCM ≅ ΔDCM (LAL)

  ⇒ MB = MD = ℓ

- También:

  m∢BMC = m∢CMD = 60°

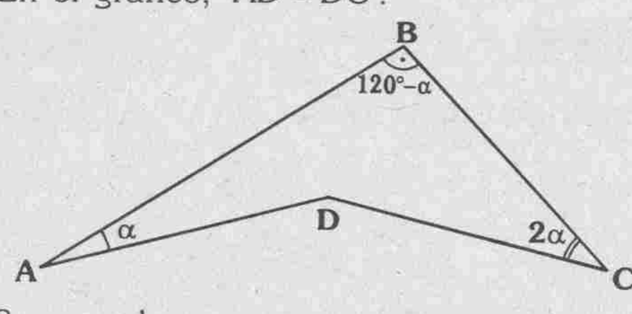
- Luego:

  ΔAMD ≅ ΔCMB (LAL)

  ⇒ a = b

TEOREMA

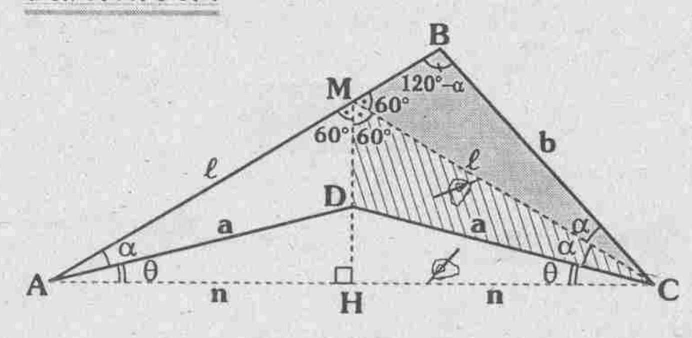
En el gráfico, $AD = DC$.



Se cumple:

$$BC = CD$$

Demostración:



- ΔADC: isósceles, $\overline{DH}$ es altura, mediana y bisectriz.
- $\overline{DH}$ es mediatriz de $\overline{AC}$ $\Rightarrow$ $AM = MC$.
- Como:

$m\measuredangle AMC = 120° \Rightarrow m\measuredangle AMD = m\measuredangle DMC = 60°$

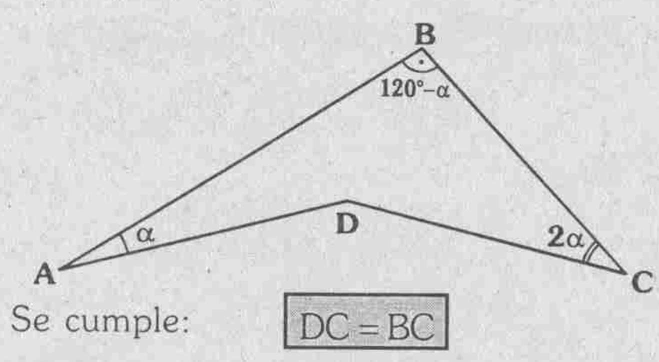
$\Rightarrow m\measuredangle BMC = 60°$

- $\Delta DMC \cong \Delta BMC$ (ALA)

$\therefore\ a = b$

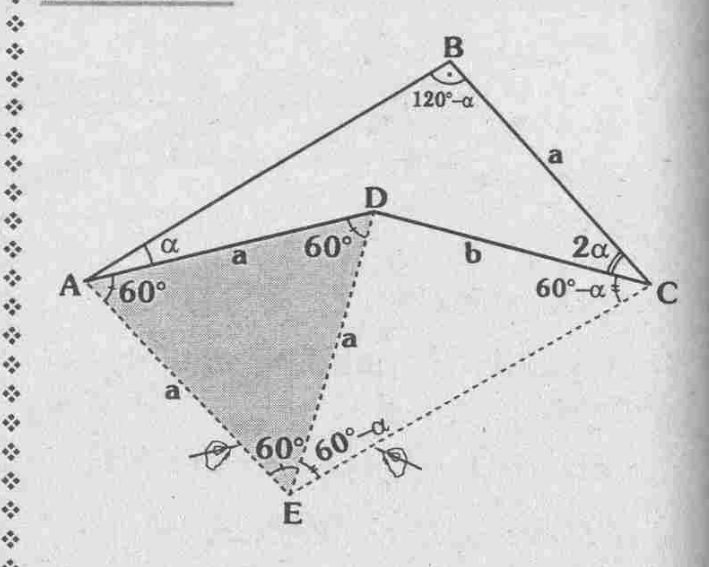
TEOREMA

En el gráfico, $AD = BC$.



Se cumple: $DC = BC$

Demostración:



- Por A se traza $\overline{AE} // \overline{BC}$ tal que:

$AE = BC \Rightarrow \overline{AB} // \overline{EC}$

- Luego:

$m\measuredangle DAE = 60°$ y $m\measuredangle DCE = 60° - \alpha$

- También, como $DA = DE$ y

$m\measuredangle BAE = 60° \Rightarrow \Delta DAE$: equilátero

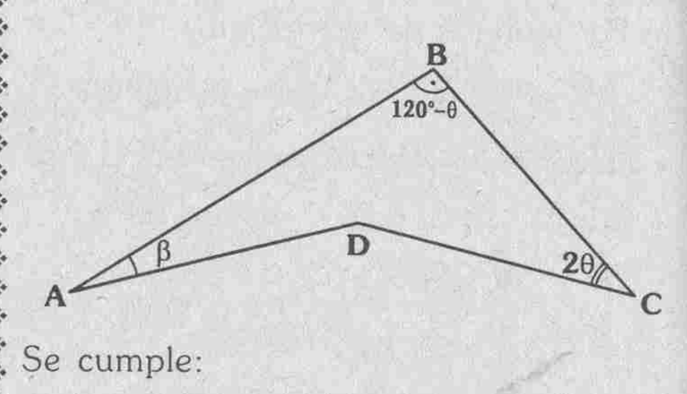
$\Rightarrow m\measuredangle DEC = 60° - \alpha$

- ΔEDC : isósceles

$\Rightarrow a = b$

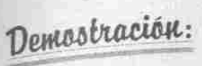
TEOREMA

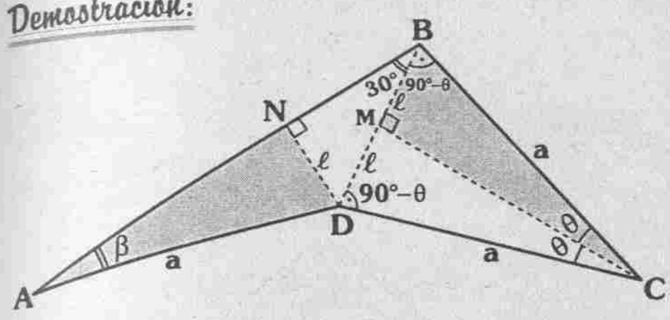
En el gráfico, $AD = DC = BC$.



Se cumple:

$$\beta = \theta$$





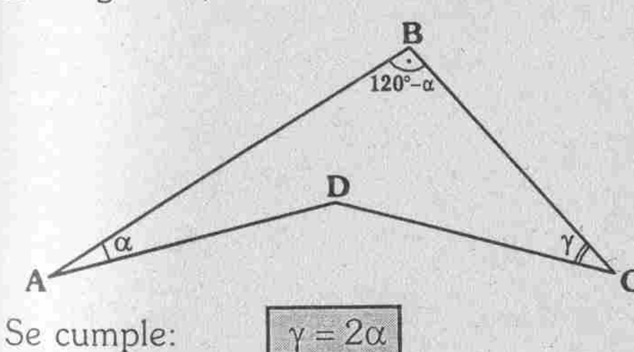
- Se traza $\overline{BD}$, entonces el ΔBDC es isósceles $\Rightarrow$ $m\sphericalangle DBC = 90° - \theta$.
- Como:

  $m\sphericalangle ABC = 120° - \theta \Rightarrow m\sphericalangle ABD = 30°$
- Se traza: $\overline{CM} \perp \overline{BD}$ y $\overline{DN} \perp \overline{AB}$.
- Luego: $\triangle AND \cong \triangle BMC$

  $\therefore \quad \beta = \theta$

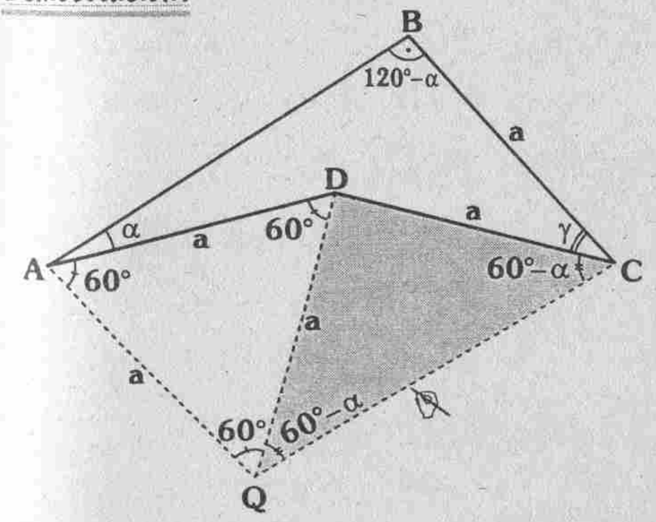
TEOREMA

En el gráfico, $AD = BC = CD$.



Se cumple: $\boxed{\gamma = 2\alpha}$

Demostración:



- Se traza $\overline{AQ} // \overline{BC}$ y $AQ = BC$, entonces $\overline{AB} // \overline{QC}$, luego $m\sphericalangle DAQ = 60°$.
- Como: $AD = AQ$ y $m\sphericalangle DAQ = 60°$

  $\Rightarrow \Delta ADQ$: es equilátero

  ΔDQC: isósceles

  $\Rightarrow m\sphericalangle DQC = m\sphericalangle DCQ = 60° - \alpha$
- Como $\overline{CQ} // \overline{BA}$, entonces:

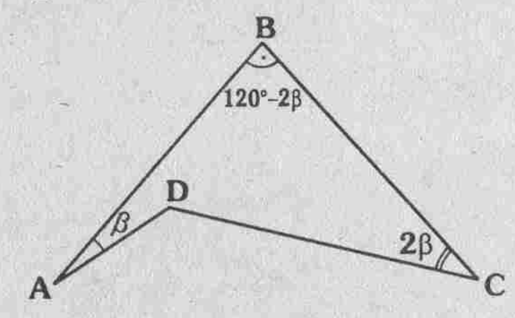
  $\gamma + 60° - \alpha + 120° - \alpha = 180°$

  $\therefore \quad \gamma = 2\alpha$

AHORA ANALICEMOS LOS RECÍPROCOS DEL CASO II

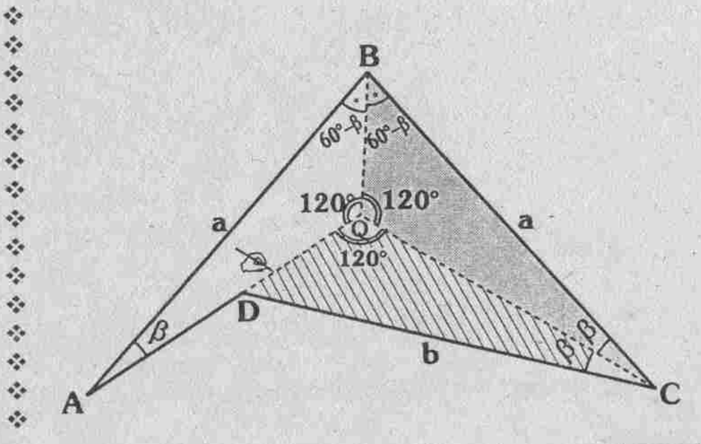
TEOREMA

En el gráfico, $AB = BC$.



Se cumple: $\boxed{BC = CD}$

Demostración:



- Se traza la bisectriz del $\measuredangle ABC$, que corta a la prolongación de $\overline{AD}$ en Q, entonces:

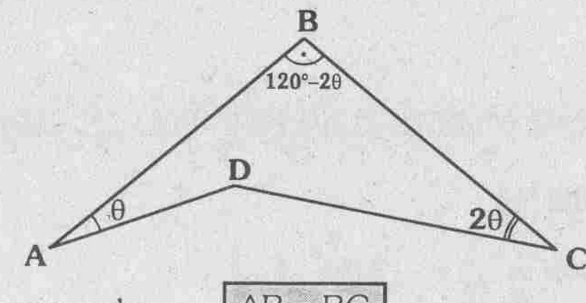
$$m\measuredangle AQB = m\measuredangle CQB = 120°$$

- Luego: $m\measuredangle DQC = 120°$
- $\Delta QCB \cong \Delta QCD$ (ALA)

$$\therefore \quad a = b$$

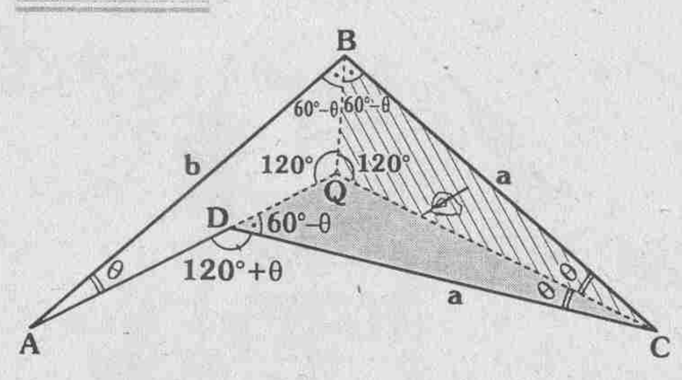
TEOREMA

En el gráfico, $BC = CD$.



Se cumple: $\boxed{AB = BC}$

Demostración:



- Se traza la bisectriz del $\measuredangle BCD$, la cual corta a la prolongación de $\overline{AD}$ en Q.
- Como: $m\measuredangle ADC = 120° + \theta$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle CDQ = 60° - \theta$$

- Luego: $\Delta DCQ \cong \Delta BQC$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle CBQ = 60° - \theta$$

- También: $m\measuredangle ABQ = 60° - \theta$

- $\Delta ABQ \cong \Delta CBQ$ (ALA)

$$\therefore \quad a = b$$

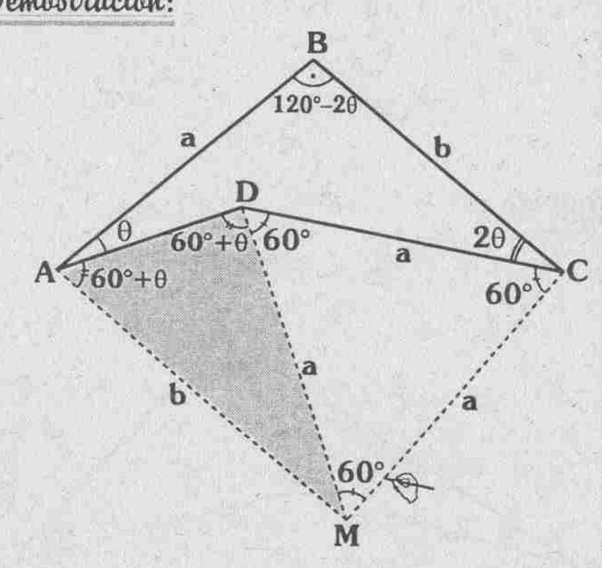
TEOREMA

Si $AB = CD$

B, 120°–2θ, D, θ, 2θ, A, C

Se cumple: $\boxed{BC = AB}$

Demostración:



- Se traza: $\overline{CM} // \overline{BA}$ tal que $CM = a$

$$\Rightarrow \quad \overline{BC} // \overline{AM} \quad y \quad AM = b$$

- Como $CD = CM$ y $m\measuredangle DCM = 60°$, entonces el ΔDCM es equilátero.
- Como: $\overline{AM} // \overline{DC}$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle DAM = 60° + \theta$$

$$m\measuredangle ADC = 120° + \theta$$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle ADM = 60° + \theta$$

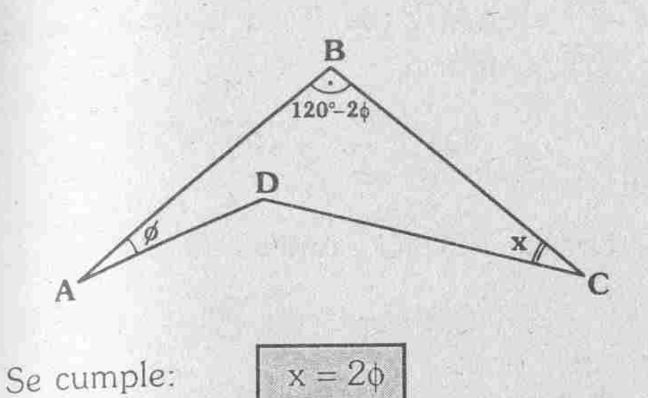
- Luego: ΔADM es isósceles

$$\therefore \quad a = b$$

Los dos siguientes teoremas son análogos a los anteriores, quedan como ejercicio para el lector:

TEOREMA

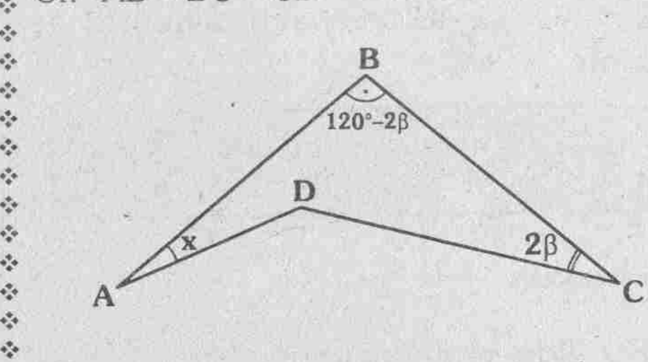
Si $AB = BC = CD$



Se cumple: $x = 2\phi$

TEOREMA

Si: $AB = BC = CD$

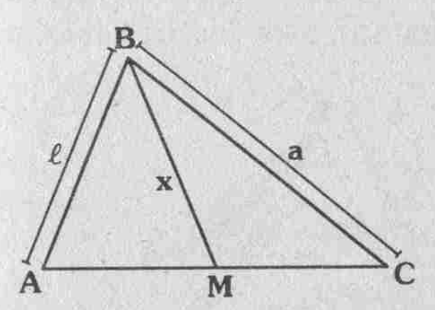


Se cumple: $x = \beta$

ALGUNAS DESIGUALDADES GEOMÉTRICAS

TEOREMA

En el gráfico, sea $a \geq \ell$ y $\overline{BM}$ es mediana.



Se cumple:

$$\frac{a-\ell}{2} < x < \frac{a+\ell}{2}$$

Demostración:

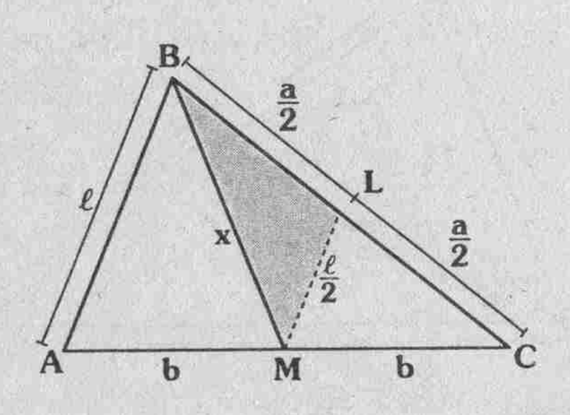
- Se traza la base media $\overline{ML}$, entonces :

$$LM = \frac{AB}{2} \Rightarrow LM = \frac{\ell}{2} \quad y \quad BL = \frac{a}{2}$$

- ΔBLM, por existencia de triángulos:

$$\frac{a}{2} - \frac{\ell}{2} < x < \frac{a}{2} + \frac{\ell}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{a-\ell}{2} < x < \frac{a+\ell}{2}$$



TEOREMA

Sea el triángulo ABC, con AB=c, BC=a y AC=b; m_a, m_b y m_c son las longitudes de las tres medianas relativas a $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, se cumple:

$$\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c < a+b+c$$

Demostración:

- Por el teorema anterior:

$$m_a < \frac{b+c}{2} \quad \text{... (I)}$$

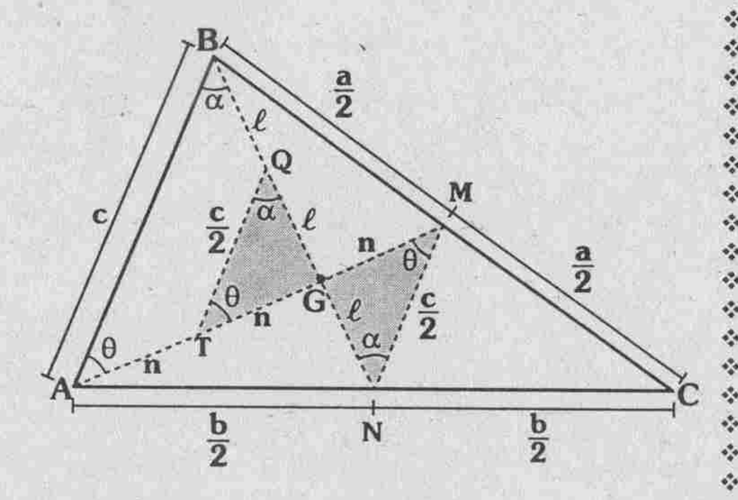
$$m_b < \frac{a+c}{2} \quad \text{... (II)}$$

$$m_c < \frac{a+b}{2} \quad \text{... (III)}$$

- Sumando (I), (II) y (III):

$$m_a + m_b + m_c < a+b+c \quad \text{... (*)}$$

- Para la otra parte, demostremos previamente que cada dos medianas se cortan en la razón de 2 a 1, desde el vértice.



- En el ΔABC, $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ son medianas
  $\Rightarrow$ Por el teorema de la base media:

$$MN = \frac{c}{2} \quad y \quad \overline{MN} \,//\, \overline{AB}$$

- En el ΔAGB se traza la base media $\overline{QT}$, entonces:

$$QT = \frac{c}{2} \quad y \quad \overline{QT} \,//\, \overline{AB}$$

- Luego: $\Delta TQG \cong \Delta MNG$ (ALA)

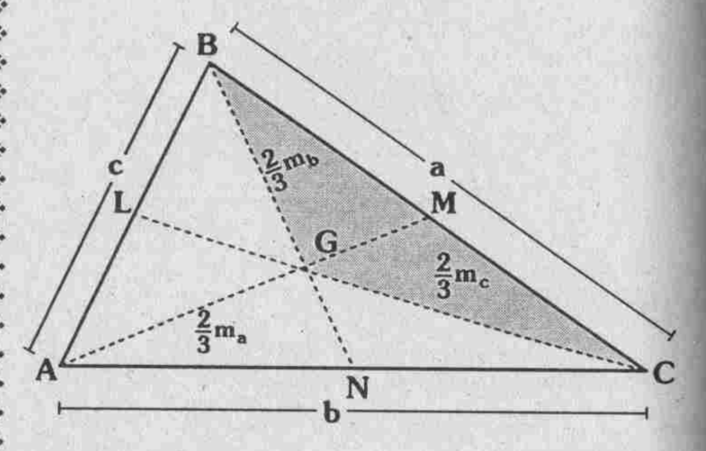
$$\Rightarrow \quad GM = n \quad y \quad GN = \ell$$

- Es decir:

$$AG = 2(GM) \quad y \quad BG = 2(GN)$$

$$\Rightarrow \quad AG = \frac{2}{3}(AM) \quad y \quad BG = \frac{2}{3}(AN)$$

- Como cada dos medianas, se cortan en la razón de 2 a 1, desde el vértice, veamos para las tres medianas.



- Sea:

$$AM = m_a \ ; \ CL = m_c \ \ y \ \ BN = m_b$$

$$\Rightarrow AG = \frac{2}{3}m_a \ ; \ CG = \frac{2}{3}m_b \ ; \ BG = \frac{2}{3}m_b$$

- En el ΔAGB, ΔAGC y ΔBGC por existencia:

$$b < \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_c \qquad \ldots (\alpha)$$

$$c < \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b \qquad \ldots (\beta)$$

$$a < \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c \qquad \ldots (\gamma)$$

- Sumando (α), (β) y (γ):

$$a+b+c < \frac{4}{3}(m_a+m_b+m_c)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4}(a+b+c) < m_a+m_b+m_c$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4}(a+b+c) < m_a+m_b+m_c \quad \ldots (**)$$

- De $(*)$ y $(**)$, se tiene:

$$\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a+m_b+m_c < a+b+c$$

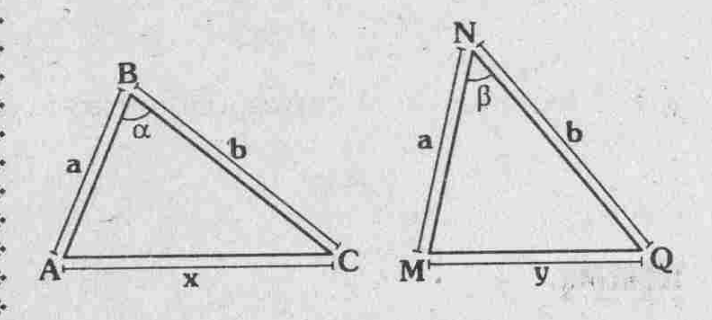
Observación

Al punto de concurrencia de las medianas se le llama baricentro, como se ve la publicación de Puntos Notables (Fascículo N° 7).

TEOREMA

(Teorema de Charnela)

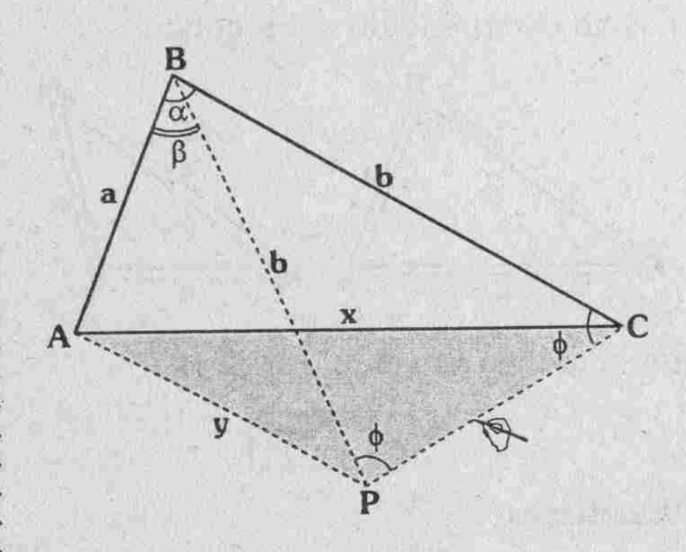
Si dos lados de un triángulo son congruentes respectivamente con los lados de un segundo triángulo, y el ángulo comprendido en el primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido en el segundo, entonces el tercer lado del primer triángulo es mayor que en el tercer lado del segundo triángulo.



En el gráfico si: $\alpha > \beta$

$$\Rightarrow \boxed{x > y}$$

Demostración:



- Se considera el ΔABC, como $\alpha > \beta$ se traza $\overline{BP}$ tal que $m\measuredangle ABP = \beta$ y $BP = b$.

- $\Delta ABP \cong \Delta MNQ$ (ALA)

$$\Rightarrow AP = y$$

- Como:

$$PB = BC \Rightarrow \Delta PBC: \text{isósceles}$$

- En $\triangle APC$:

$$m\sphericalangle APC > \phi \Rightarrow m\sphericalangle ACP < \phi$$

$$\Rightarrow \quad m\sphericalangle APC > m\sphericalangle ACP$$

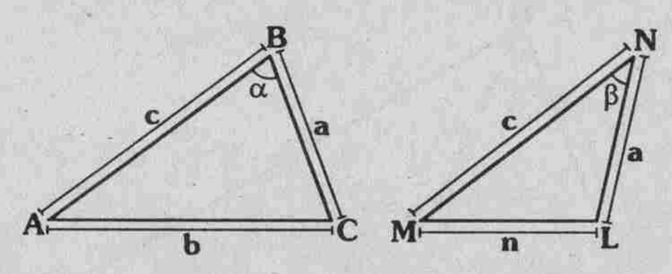
- Por teorema de la correspondencia:

$$x > y$$

TEOREMA

(Recíproco del teorema de charnela)

Si dos lados de un triángulo son congruentes, respectivamente, con dos lados de un segundo triángulo, y el tercer lado del primer triángulo es mayor que el tercer lado del segundo, entonces el ángulo comprendido del primer triángulo es mayor que el ángulo comprendido del segundo.



En el gráfico se cumple si $b > n$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha > \beta}$$

Demostración:

- Para la demostración de este teorema se puede usar del mismo modo que el anterior, buscar alguna construcción, pero optemos por el método del absurdo.
- Es decir, supongamos que no se cumple $\alpha > \beta$, entonces

$$\alpha = \beta \quad ó \quad \alpha < \beta$$

- Si $\alpha = \beta \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNL$ (LAL)

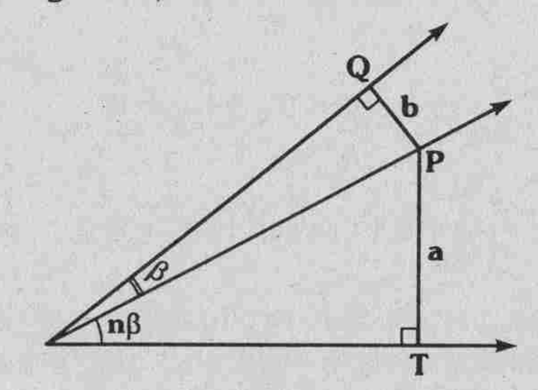
Luego $b = n$ (contradicción pues $b > n$)

- Si $\alpha < \beta \Rightarrow$ por el teorema anterior $b < n$ (contradicción pues $b > n$)
- Vemos que no se cumple: $\alpha \leq \beta$
- Por lo tanto:

$$\alpha > \beta$$

TEOREMA

En el gráfico, $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$

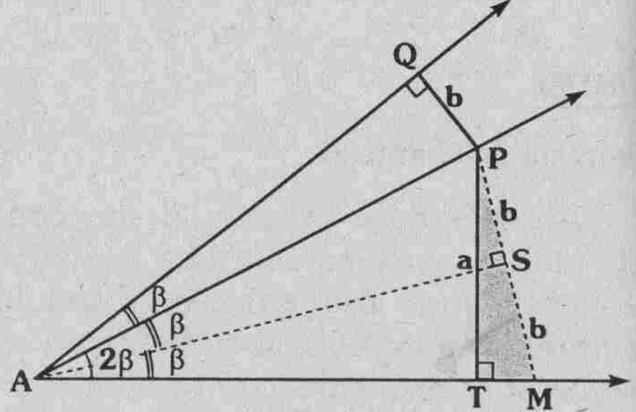


Se cumple:

$$\boxed{a < nb}$$

Demostración:

- Para la demostración de este teorema, usemos el método de inducción, pues $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$.
- Analicemos para $n = 2$



- Como m∢TAP = 2(m∢PAQ), se traza la bisectriz del ángulo PAT, se traza luego $\overline{PS} \perp \overline{AS}$ y se prolonga hasta que corte a $\overrightarrow{AT}$ en M.

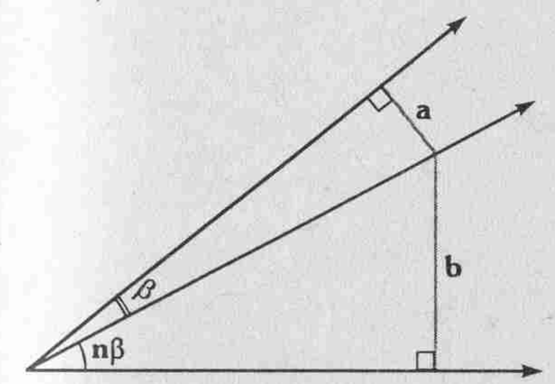
- Por teorema de la bisectriz:

$$PS = PQ = b$$

- $\triangle PAM$: isósceles $\Rightarrow$ $PS = SM = b$

- En ⊿PTM: $a < 2b$

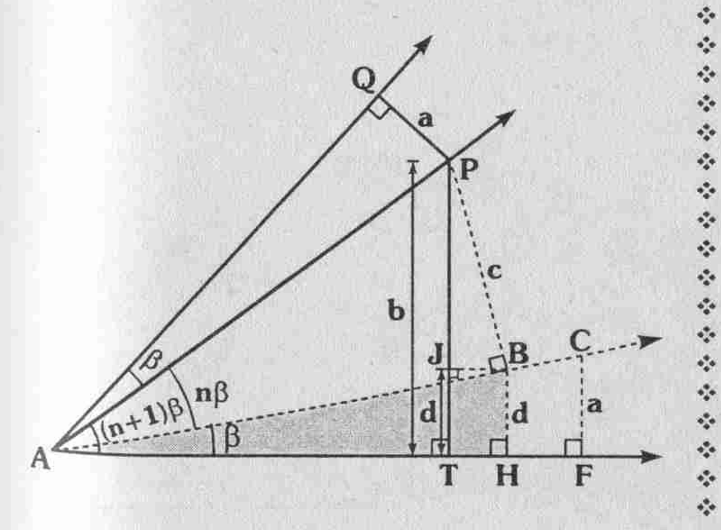
- El segundo paso de la inducción es suponer que el teorema cumple para "n", $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$.



- Hipótesis inductiva:

$$b < na$$

- Ahora demostremos que el teorema cumple para "n + 1".



- Sea:

$$m\measuredangle PAT = (n+1)m\measuredangle QAP$$

se traza $\overrightarrow{AB}$ tal que m∢PAB = nβ, luego se traza $\overline{PB} \perp \overline{AB}$, por hipótesis inductiva:

$$c < na \qquad \text{... (I)}$$

- Como:

$$m\measuredangle BAH = \beta \quad \text{y}$$

$$AP > AB$$

- Se ubica C en $\overrightarrow{AB}$, tal que AC = AP y se traza $\overline{CF} \perp AT$.

- Luego: ⊿AQP ≅ ⊿AFC

$$\Rightarrow \quad CF = a$$

- Tenemos entonces:

$$d < a \qquad \text{... (II)}$$

- En ⊿PJB:

$$b - d < c \qquad \text{... (III)}$$

- Sumando (I), (II) y (III):

$$c + d + (b - d) < na + a + c$$

$$\therefore \quad b < a(n+1)$$

- Con lo cual queda concluída la demostración.

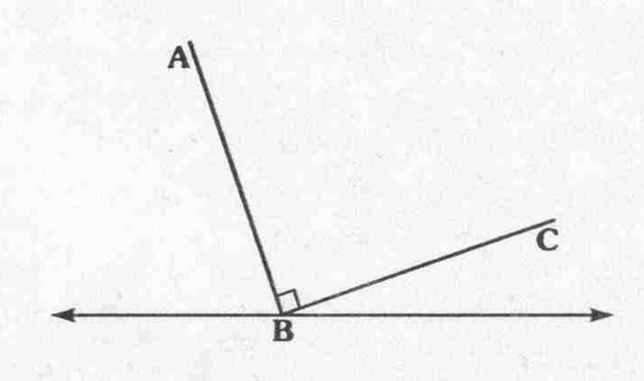
ACERCA DE LOS PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN O DE TRAZOS AUXILIARES

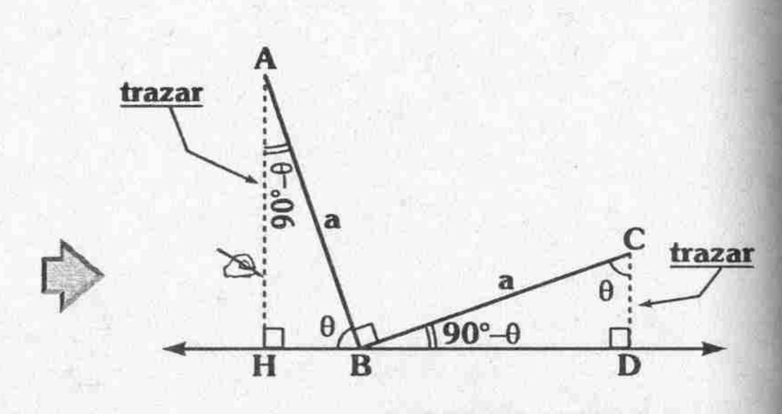
Al resolver diferentes ejercicios nos encontraremos frente a diversas situaciones, en algunos de ellos se resolverán con solo analizando la figura o "completando" ángulos, pero en algunos será necesario hacer algún trazo adicional (o varios). Este capítulo esta orientado a conocer algunos criterios sobre construcciones o trazos auxiliares, los hay desde los más sencillos hasta los más difíciles, algunos de ellos ya fueron expuestos en nuestra publicación de "TRIÁNGULOS".

Los trazos son producto del razonamiento, buscando generalmente congruencia o ángulos que se repitan, los presentados aquí no son las únicas, el lector puede encontrar sus propios criterios.

A continuación, algunos criterios:

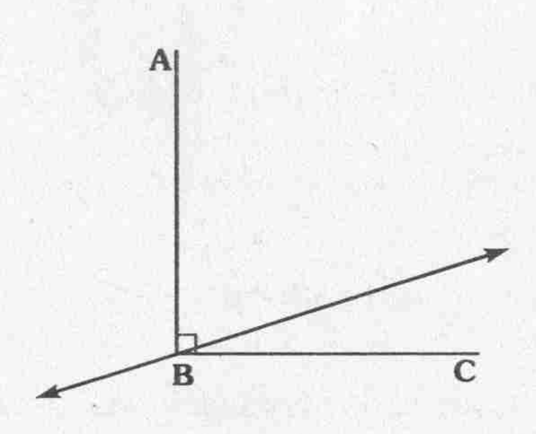
■ Si $AB = BC$ — Se te sugiere:

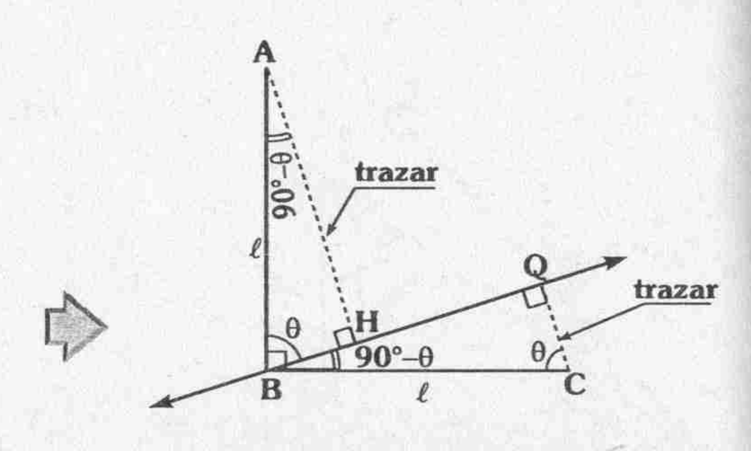




Se aprovecha: $\triangle ABH \cong \triangle BCD$

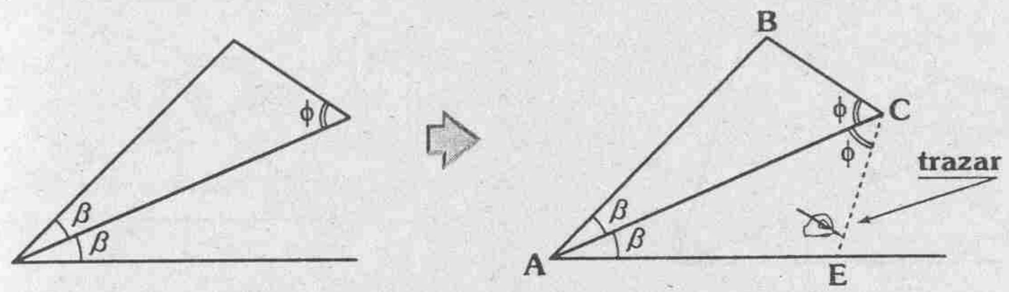
■ Si $AB = BC$





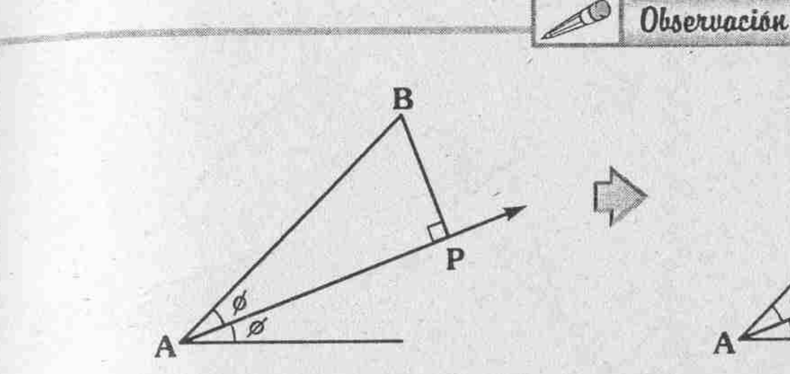
Se aprovecha: $\triangle ABH \cong \triangle BCQ$

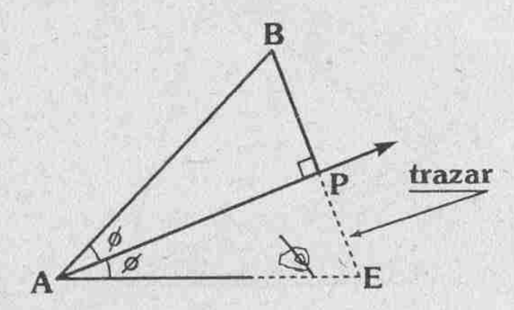
- Si en algún ejercicio, se presenta alguna bisectriz, por ejemplo:



Se aprovechará: $\Delta ACB \cong \Delta ACE \Rightarrow BC = CE$ y $AB = AE$

Observación



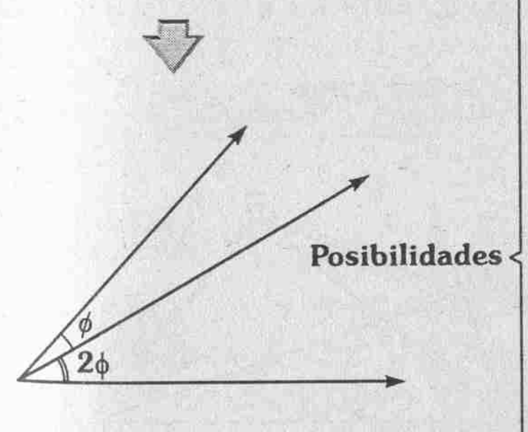


Este trazo es muy útil, como veremos en la resolución de muchos problemas.

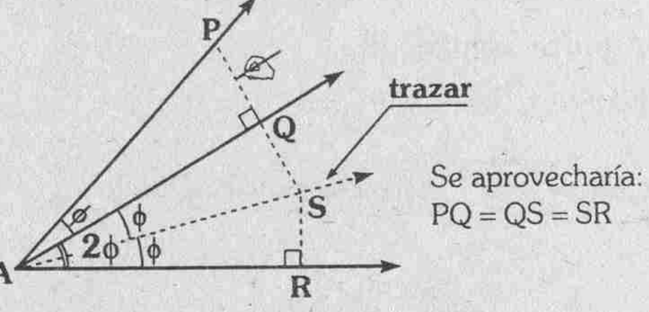
Aprovechamos que el ΔABE *será isósceles, entonces:*

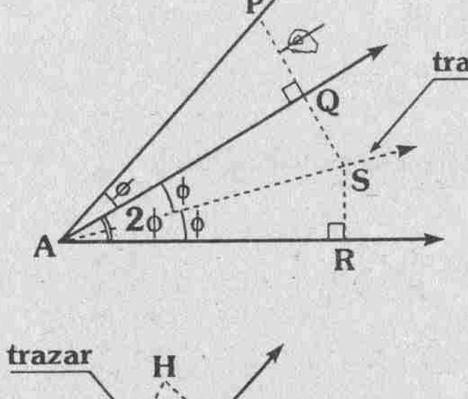
$AB = AE$ y $BP = PE$

- Si se muestra un ángulo con la siguiente característica:

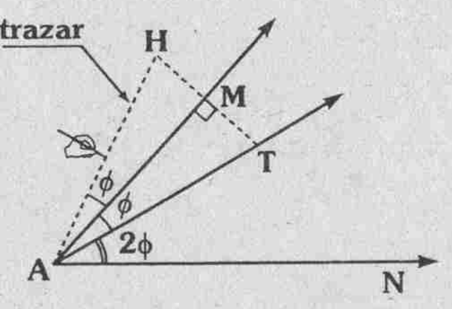


Posibilidades



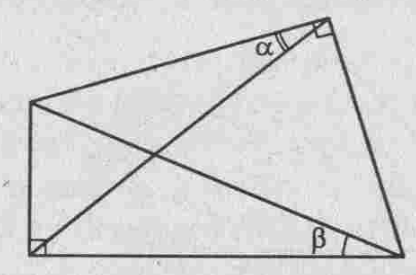


Se aprovecharía:
$PQ = QS = SR$



Se aprovecharía:
$\overrightarrow{AT}$ es bisectriz del $\measuredangle HAN$ y $HM = MT$

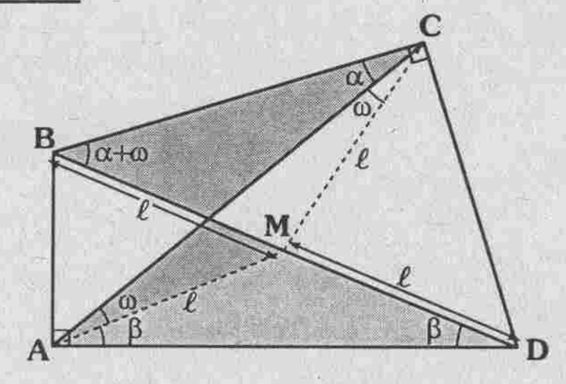
■ $\measuredangle$s rectángulos con igual hipotenusa.



En el gráfico, se cumple:

$\alpha = \beta$

Prueba:



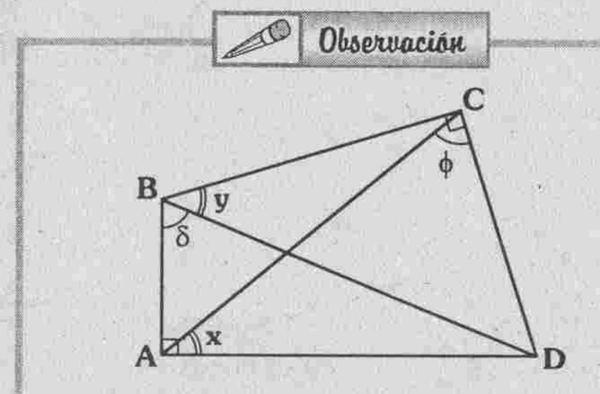
- Como los triángulos rectángulos ABD y BCD tienen la misma hipotenusa, en ambos se traza la mediana relativa a la hipotenusa, entonces por teorema:

$$AM = BM = MD = MC$$

- ΔAMC isósceles $\Rightarrow m\measuredangle MAC = m\measuredangle ACM$
- En la parte sombreada:

$$2\beta + \omega = \alpha + \alpha + \omega \quad \Rightarrow \quad \beta = \alpha$$

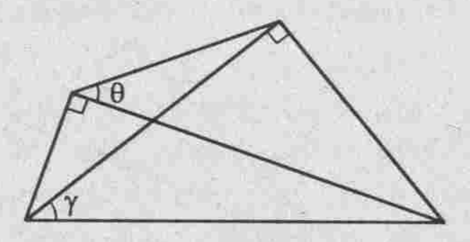
Observación



También se cumple:

$x = y \ \wedge \ \phi = \delta$

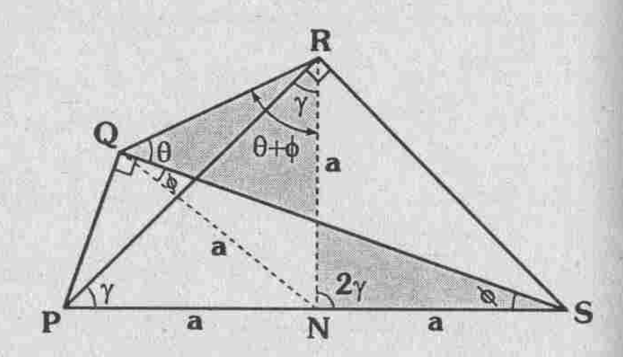
También:



En el gráfico, se cumple:

$\theta = \gamma$

Prueba:



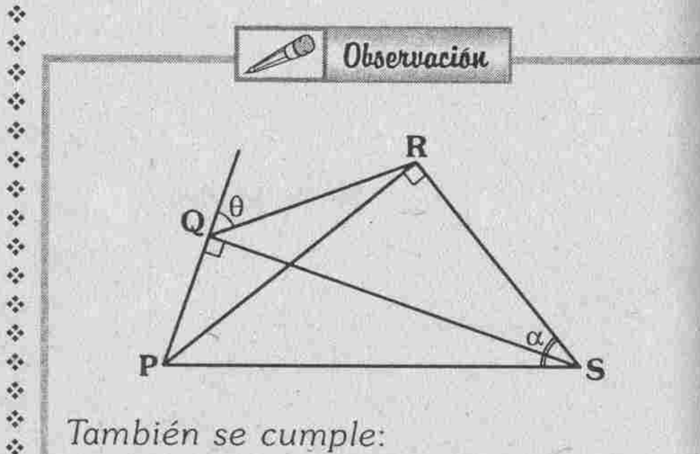
- Análogo al ejercicio anterior, se traza las medianas $\overline{QN}$ y $\overline{RN}$ en los triángulos PQS y ARS, por teorema.

$$QN = NP = NS = NR$$

- ΔQNR : isósceles
- En la parte sombreada:

$$\phi + 2\gamma = \theta + \theta + \phi \quad \Rightarrow \quad \gamma = \theta$$

Observación



También se cumple:

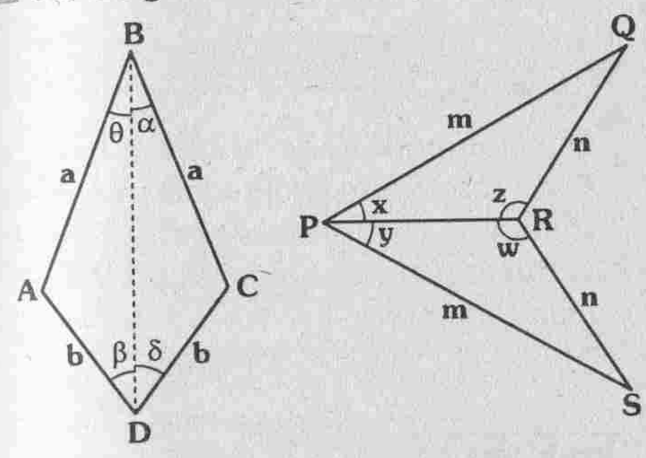
$\theta = \alpha$



Los dos casos anteriores, es decir los cuadriláteros ABCD y PQRS, son objeto de un estudio más general, a los cuales se les denomina cuadrilátero inscriptible.

Se hizo mención, pues para los casos expuestos teniamos dos triángulos rectángulos con hipotenusa común.

- En los gráficos mostrados:



- Se cumple: $\theta = \alpha$; $\beta=\delta$; $x=y$; $z=w$

Prueba:

- En el primer gráfico, notar

$\Delta BAD \cong \Delta BCD$ (LAL)

- En el segundo gráfico:

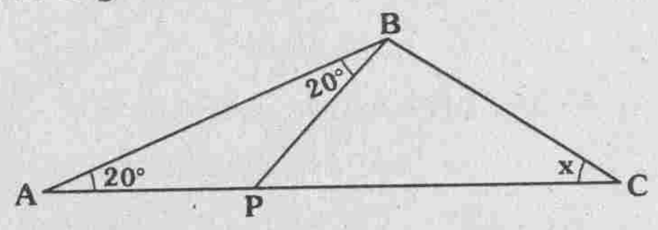
$\Delta PRQ \cong \Delta PRS$ (LAL)

APLICACIÓN

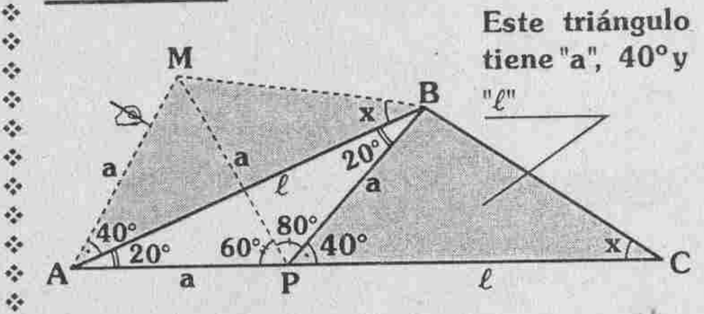
A continuación se resolveran dos problemas de construcción de distintas formas (con trazos auxiliares), para ilustrar los criterios expuestos, ya en los problemas, principalmente los del tipo semestral y semestral intensivo veremos más aplicaciones .

Problema N° 1

En el gráfico $AB = PC$. Calcule x



Resolución 1



- Se busca un Δ que tenga "a", "40°" y "ℓ", para ello: se traza $\overline{AM}$, tal que $MA = AP = a$ y $m\measuredangle BAM = 40°$
- $\Delta MAB \cong \Delta BPC$ (LAL)

$\Rightarrow \quad m\measuredangle MBA = m\measuredangle PCB = x$

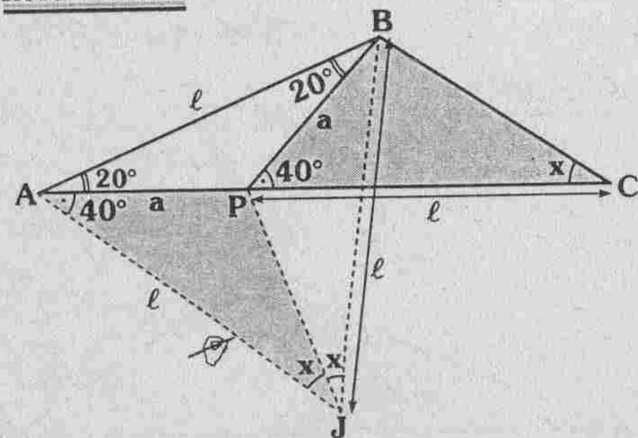
- ΔMAP : equilátero $\Rightarrow \quad MP = a$
- ΔMPB : isósceles , como:

$m\measuredangle MPB = 80° \Rightarrow \underbrace{m\measuredangle PBM} = 50°$

$x + 20° = 50°$

$\therefore \ \mathbf{x = 30°}$

Resolución 2



- Se traza $\overline{AJ}$ tal que $m\sphericalangle PAJ = 40°$ y $AJ = \ell \Rightarrow \Delta JAP \cong \Delta CPB$ (LAL)

$\Rightarrow m\sphericalangle AJP = x$

- Como $AB = AJ$ y $m\sphericalangle BAJ = 60°$

$\Rightarrow \Delta ABJ$ es equilátero

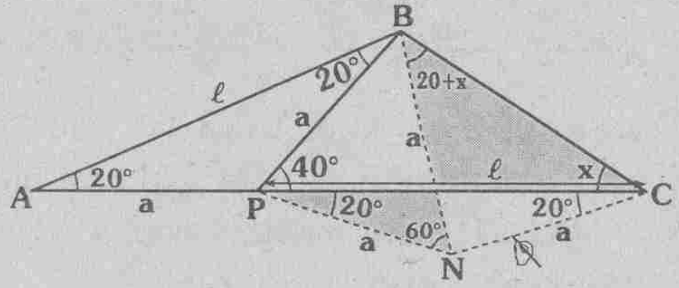
$AJ = JB$ y $PA = PB$

$\Rightarrow m\sphericalangle BJP = m\sphericalangle AJP = x$

$\Rightarrow 2x = 60°$

$\therefore \mathbf{x = 30°}$

***Resolución* 3**



- Se traza $\overline{PN}$ tal que $m\sphericalangle NPC = 20°$ y $NP = a \Rightarrow \Delta BAP \cong \Delta CPN$ (LAL)

$\Rightarrow NC = a$ y $m\sphericalangle ACN = 20°$

- Como $NP = PB$ y $m\sphericalangle NPB = 60°$

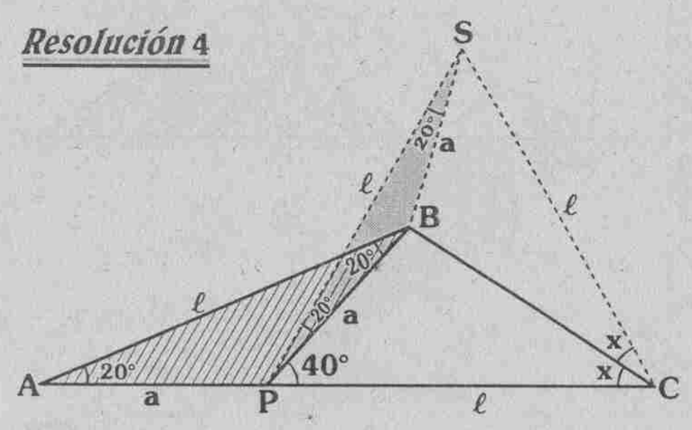
$\Rightarrow \Delta NPB$ es equilátero

- ΔBCN : isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle NBC = 20+x$
- En la parte sombreada:

$x + 20° + x = 60° + 20°$

$\therefore \mathbf{x = 30°}$

***Resolución* 4**



- Tracemos $\overline{PS}$ tal que $m\sphericalangle BPS = 20°$ y $PS = a$.
- $\Delta APB \cong \Delta PBS$ (LAL)

$\Rightarrow PS = a$ y $m\sphericalangle PSB = 20°$

- Como: $PS = PC$ y $m\sphericalangle CPS = 60°$

$\Rightarrow \Delta SPC$: equilátero

$PC = CS$ y $PB = BS \Rightarrow m\sphericalangle BCS = x$

$\Rightarrow 2x = 60°$

$\therefore \mathbf{x = 30°}$

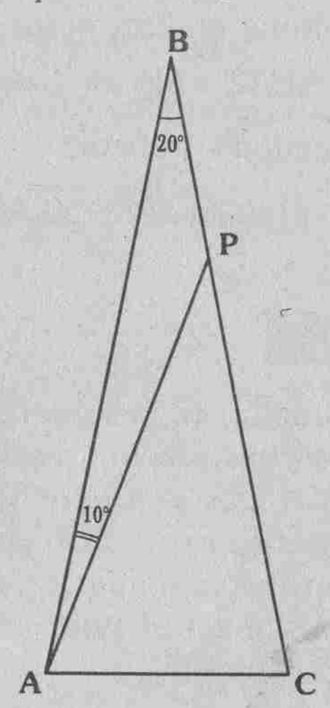
Nota

El estudiante debe verificar que en cada resolución planteada buscamos triángulos congruentes partiendo de la condición que habían dos lados de igual longitud.

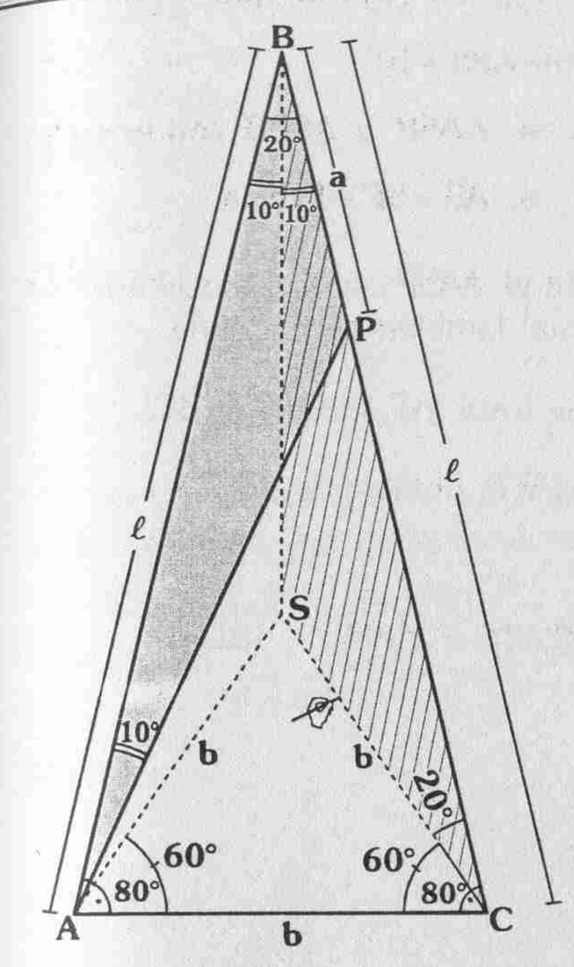
Problema N° 2

En el gráfico, $AB = BC$

Demuestre que $BP = AC$



***Resolución* 1**



- Sea:

$$PB = a \quad y \quad AC = b$$

- ΔABC : isósceles

$$\Rightarrow m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle ACB = 80°$$

- Busquemos un Δ que tenga "10°", "ℓ" y "20°" para ello: se ubica S en la región interior de ABC, tal que:

$$SC = b \quad y \quad m\sphericalangle SCB = 20°$$

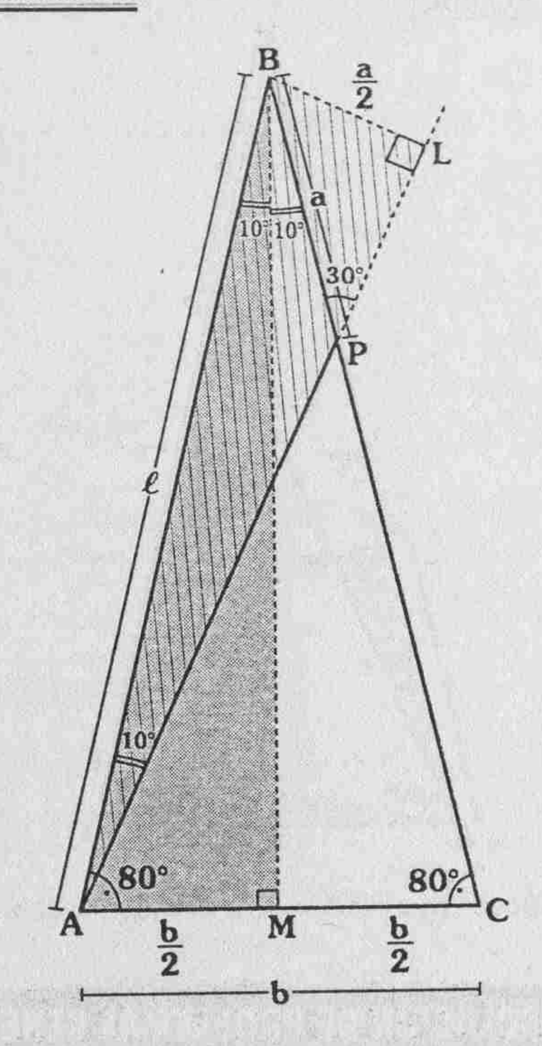
- ΔASC : equilátero
- Como $AS = SC$ y $AB = BC$

$$\Rightarrow m\sphericalangle ABS = m\sphericalangle CBS = 10°$$

- $\Delta BCS \cong \Delta ABP$ (ALA)

$$\therefore \ a = b$$

***Resolución* 2**



- Como $AB = BC$, al trazar la altura $\overline{BM}$, se tendrá:

$$AM = MC \quad y \quad m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle CBM = 10°$$

- Se traza $\overline{BL} \perp \overline{AP}$
- ⊿PBL: notable de 30°

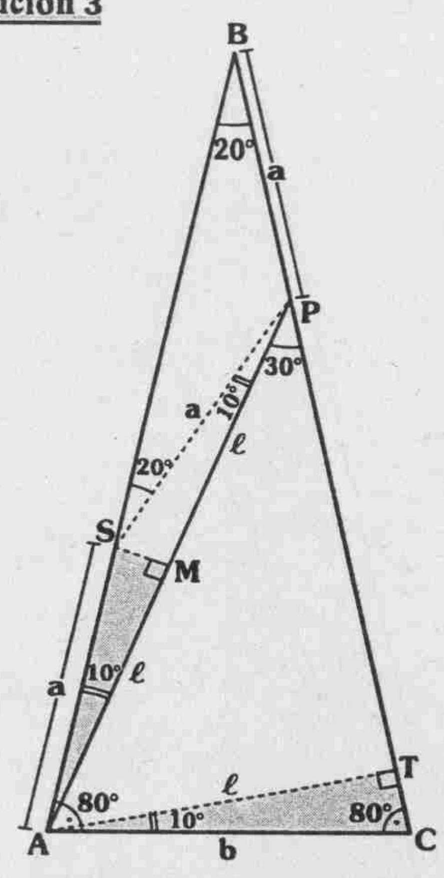
$$\Rightarrow \ BL = \frac{a}{2}$$

- ⊿ALB ≅ ⊿BMC

$$\Rightarrow \ \frac{a}{2} = \frac{b}{2}$$

$$\therefore \ a = b$$

Resolución 3



- Como m∢PBA = 2(m∢PAB) , trazamos

$\overline{PS}$ (S en $\overline{AB}$) tal que:

m∢APS = 10°

⇒ ΔASP y ΔSPB son isósceles .

⇒ AS = SP = PB = a

- En el ΔASP , se traza la altura $\overline{SM}$, la cual también es mediana.

- Se traza AT ⊥ BC (T en $\overline{BC}$) .

⊿ATP: notable de 30°

⇒ AP = 2(AT)

⊿ ATC ≅ ⊿AMS (ALA)

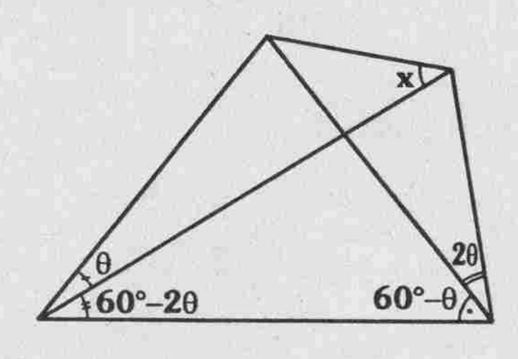
∴ a = b

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS GENÉRICOS

Para complementar los criterios dados sobre construcción en triángulos se resolverá un grupo de problemas denominados genéricos, también se da un intervalo de la variable tal que el lector tenga casos particulares a partir del inicial.

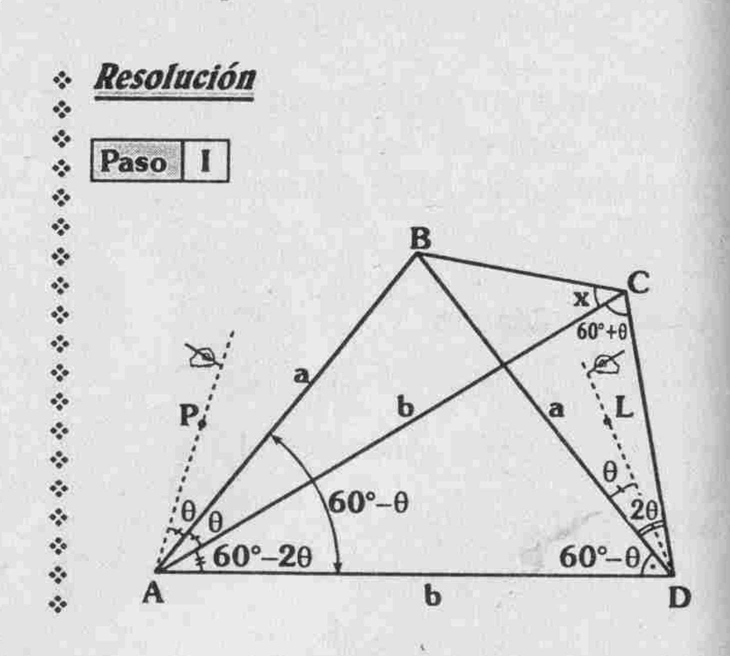
Problema N° 1

En el gráfico, θ∈ ⟨0°;30°⟩ , calcule x



Resolución

Paso I



- El primer paso en éste tipo de problemas es la observación y completar medidas angulares en base a ellos ensayar posibles trazos.
- Notemos:

$m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle BDA = 60° - \theta \Rightarrow AB = BD$

$m\sphericalangle ACD = m\sphericalangle ADC = 60° + \theta \Rightarrow AC = AD$

- Como: $m\sphericalangle BAD = 60° - \theta$ y

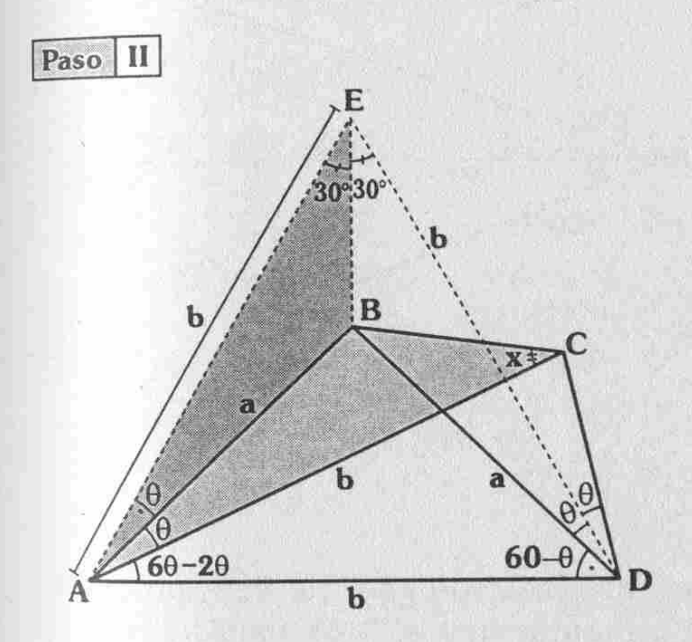
$m\sphericalangle ADC = 60° + \theta$

nos da la idea de buscar algún triángulo equilátero, para ello trazamos:

$\overline{AP}$, tal que $m\sphericalangle PAB = \theta$

$\overline{DL}$, tal que $m\sphericalangle BDL = \theta$

Paso II



- Tenemos ahora el ΔAED es equilátero.
- Como:

$AE = ED$ y $AB = BD$

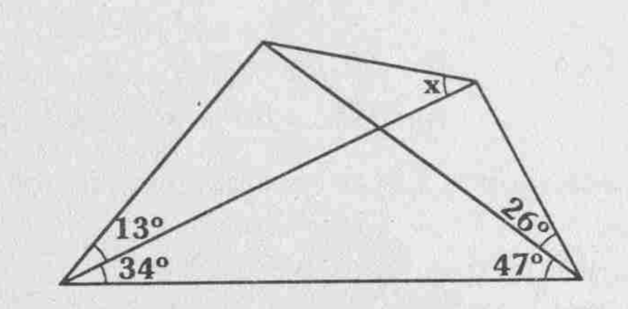
$m\sphericalangle AEB = m\sphericalangle BED = 30°$

- También: $\Delta EAB \cong \Delta CAB$ (LAL)

$\Rightarrow \quad x = 30°$



Se pueden presentar casos particulares, por ejemplo si $\theta = 13°$ se tendría:

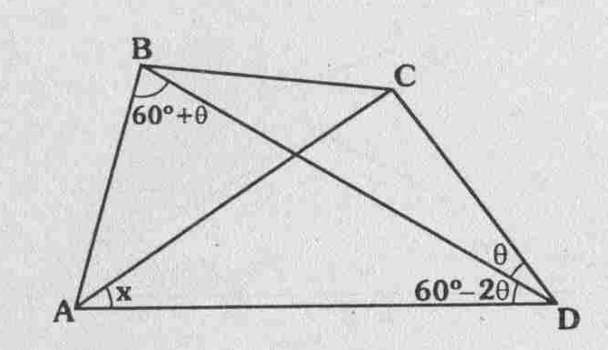


Su resolución es análoga.

Problema Nº 2

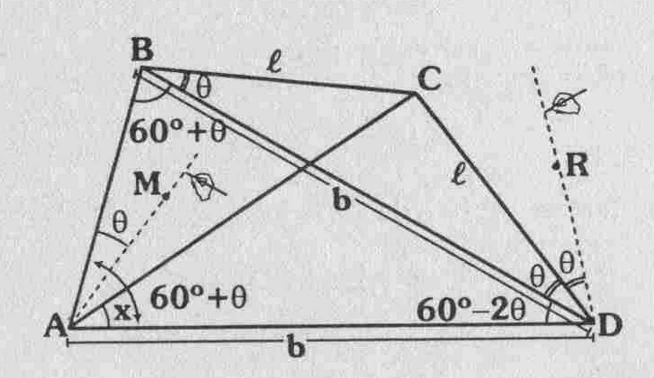
En el gráfico, $BC = CD$ y $\theta \in \langle 0; 30° \rangle$

Calcule x.



Resolución

Paso I



- Reconocemos inicialmente que:

$$BC = CD \quad y \quad BD = AD$$

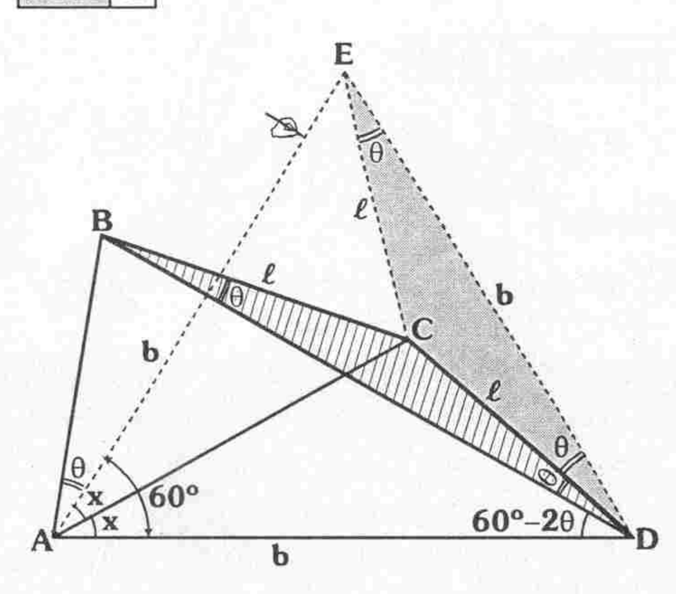
por ser los triángulos BCD y ADB isósceles.

- Como: $m\measuredangle BAD = 60° + \theta$ y $m\measuredangle ADC = 60° - \theta$

nos sugiere hacer los siguientes trazos.

- $\overline{AM}$ tal que $m\measuredangle MAB = \theta$
- $\overline{DR}$ tal que $m\measuredangle CDR = \theta$

Paso II



- Completando los trazos tenemos que el triángulo AED es equilátero.
- Luego $\Delta BDC \cong \Delta EDC$ (LAL)

$$\Rightarrow m\measuredangle CED = \theta$$

- El triángulo ECD resulta ser isósceles

$$\Rightarrow \quad CE = CD$$

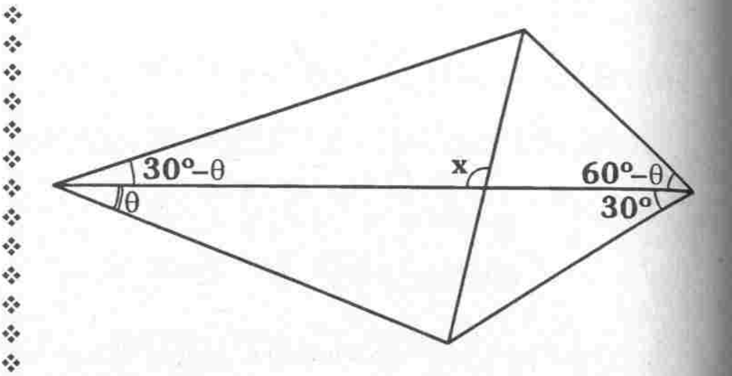
- Como $AD = AE \Rightarrow m\measuredangle DAC = m\measuredangle EAC$

$$\Rightarrow \quad 2x = 60°$$

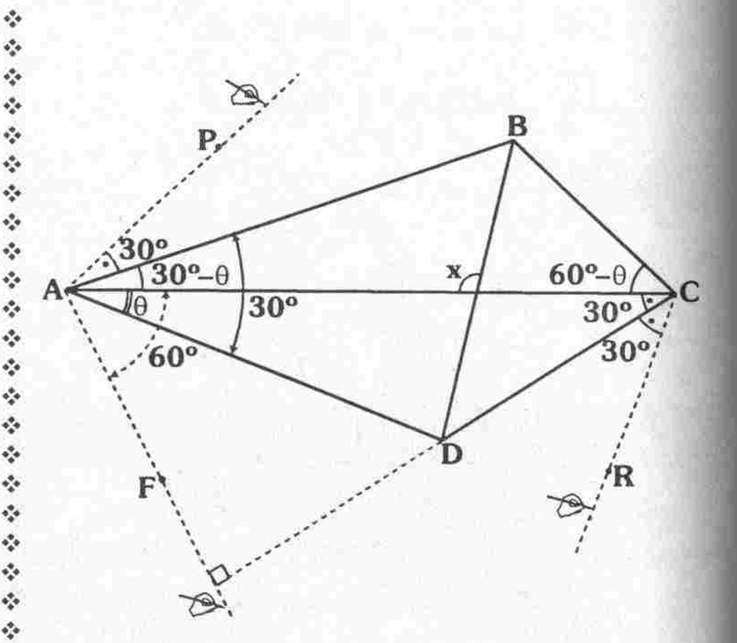
$$\therefore \quad \mathbf{x = 30°}$$

Problema N° 3

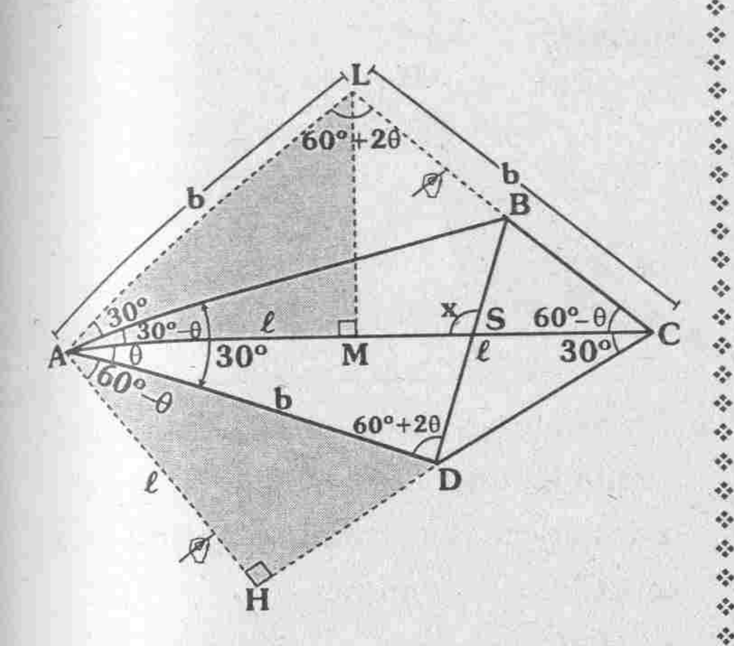
En el gráfico, $0° < \theta < 30°$. Calcule x en función de θ.



Resolución



- Para la resolución de este problema notamos que al "completar ángulos" no encontramos triángulos con "lados iguales" lo que si se puede aprovechar es la presencia del 30°, lo cual nos llevaría a completar el triángulo equilátero trazando $\overline{CR}$ y $\overline{AF}$, **otra posibilidad** es ubicar el 30° en un triángulo rectángulo. Optemos por lo último, aunque con la primera construcción también se llega al resultado.



- Se prolonga $\overline{CB}$ y se traza $\overline{AL}$, para obtener el ΔALC, el cual es isósceles.
- En el ΔALC se traza la altura $\overline{LM}$

$$\Rightarrow \quad AM = MC$$

- Luego:

$$\triangle AML \cong \triangle DHA \quad \Rightarrow \quad AD = b$$

- También: $\Delta LAB \cong \Delta DAB$ (LAL)

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle ADB = 60° + 2\theta$$

- En ΔADS:

$$x = \theta + 60° + 2\theta$$

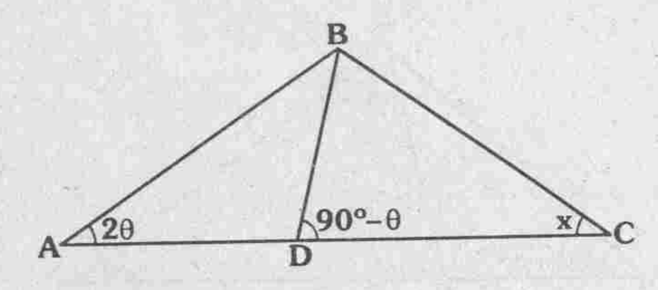
$$\therefore \quad \mathbf{x = 60° + 3\theta}$$

Problema N° 4

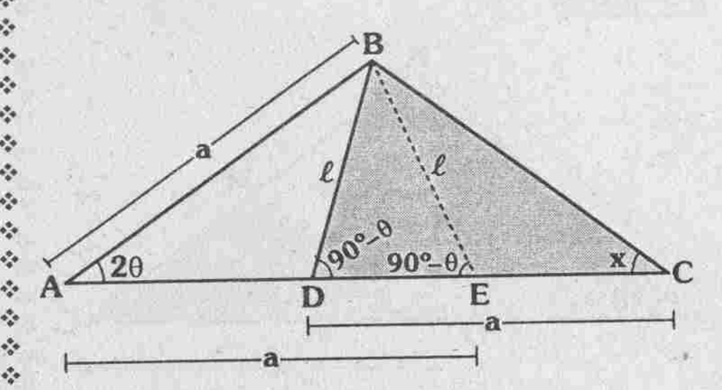
En el gráfico:

$$AB = CD \ , \quad \theta < 30° \quad y \quad AB = DC$$

Calcule x en función de θ.



Resolución



- De acuerdo a los criterios estudiados es recomendable trazar $\overline{BE}$, tal que:

$$m\measuredangle BEA = 90° - \theta$$

entonces el ΔDBE y ΔABE son isósceles

$$\Rightarrow \quad AB = AE \quad y \quad DB = BE$$

- Luego: $\Delta BDC \cong \Delta AEB$ (LAL)

$$\therefore \quad \mathbf{x = 2\theta}$$

Observación

Además se demuestra que:

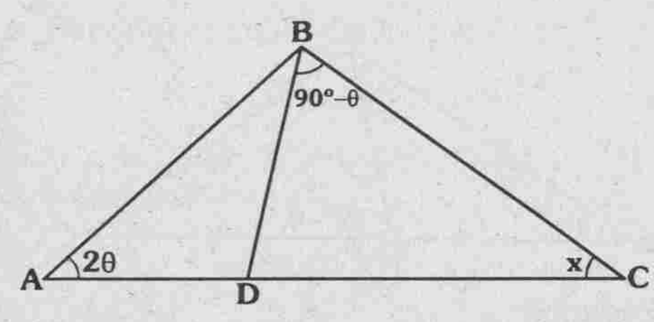
$$BC = a$$

Problema N° 5

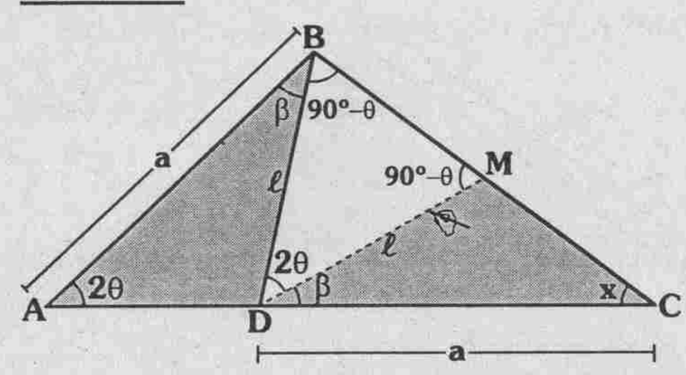
En el gráfico:

$$\theta < 30° \quad y \quad AB = CD$$

Calcule x, en función de θ.

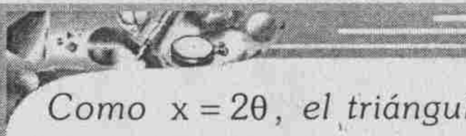


Resolución



- Lo que se busca en este problema es que las medidas de "2θ" y "90° – θ" se ubiquen en un mismo triángulo. Para ello se traza $\overline{DM}$ tal que m∢BDM = 2θ ⇒ ΔDBM es isósceles.
- Luego: ΔABD ≅ ΔCDM (LAL)

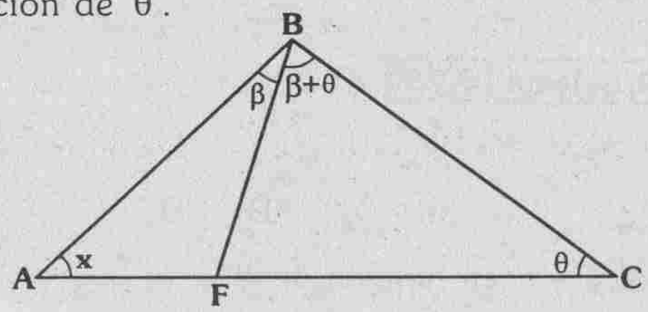
∴ **x = 2θ**



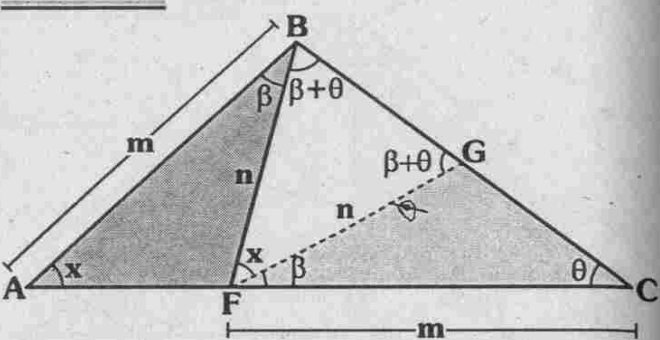
Como x = 2θ, *el triángulo* ABC *resulta isósceles con* AB = BC .

Problema N° 6

En el gráfico, AB = CF , calcule x en función de θ .



Resolución

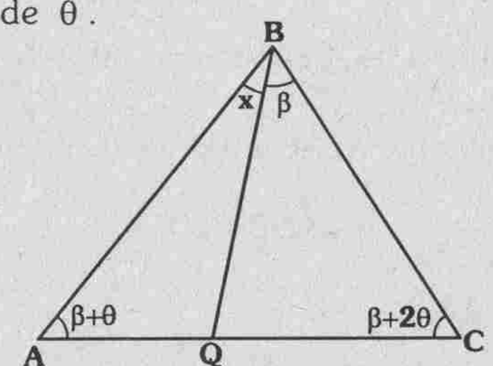


- En este caso buscamos ahora que se repita en un mismo triángulo "β + θ", para lo cual trazamos $\overline{FG}$ tal que m∢CFG = β , entonces:
  - ΔFBG : isósceles ⇒ FB = FG
  - ΔABF ≅ ΔCFG(LAL)

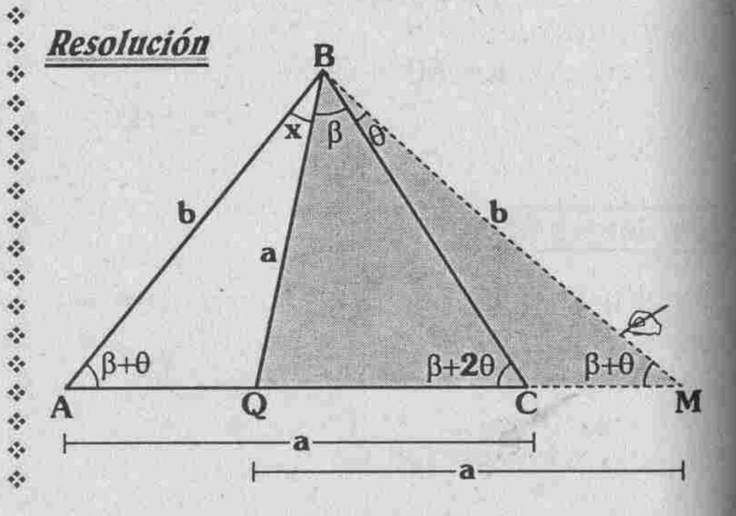
∴ **x = θ**

Problema N° 7

En el gráfico, BQ = AC , calcule x en función de θ .



Resolución



- Debido a las medidas de "$\beta + 2\theta$", "$\beta + \theta$" y "β", buscamos que se repitan algunas de ellas en un mismo triángulo.

- Se traza $\overline{BM}$ tal que $m\measuredangle BMC = \beta + \theta$
  $\Rightarrow \Delta ABM$ es isósceles ($AB = BM$).

- También:

$$m\measuredangle QBM = m\measuredangle QMB = \beta + \theta$$

$$\Rightarrow \quad QM = QB$$

- Finalmente:

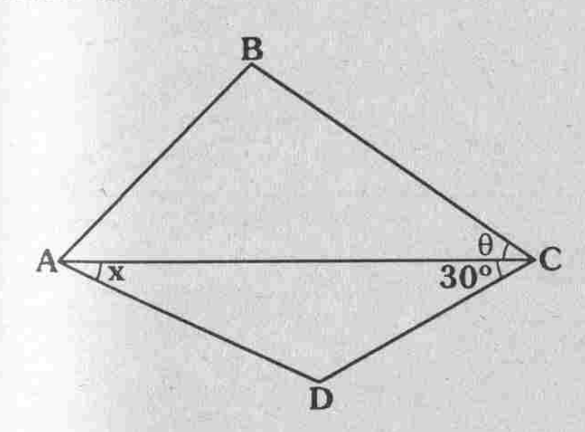
$$\Delta QMB \cong \Delta CAB \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow \quad x + \beta = \theta + \beta$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \theta}$$

Problema N° 8

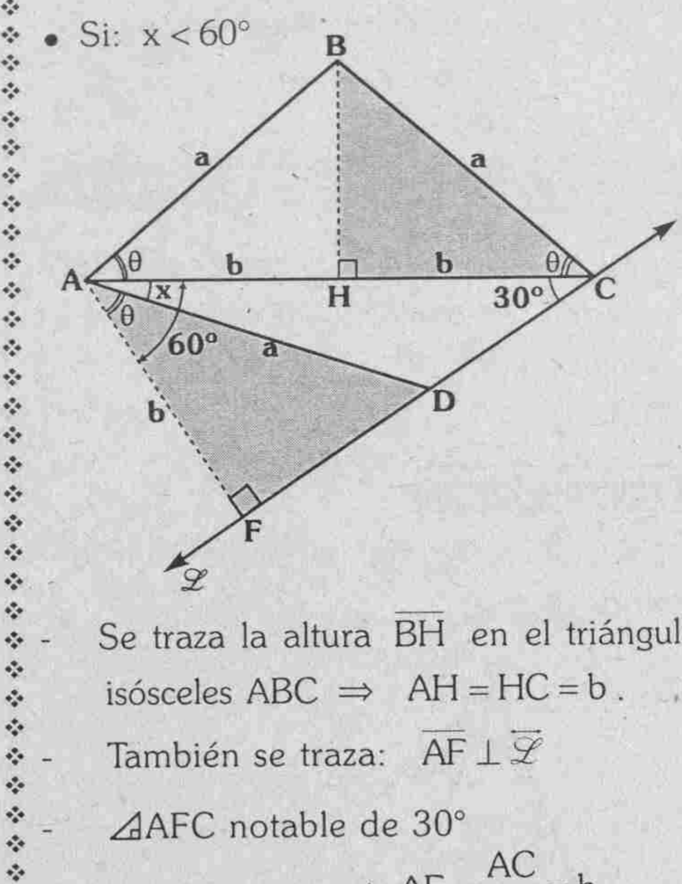
En el gráfico, $AB = BC = AD$, calcule x en función de θ.



Resolución

- Antes de resolver este problema, notemos que D es un punto sobre la recta $\mathscr{L}$, tal que AD=AB, se presenta dos posibilidades.

- Si: $x < 60°$



- Se traza la altura $\overline{BH}$ en el triángulo isósceles ABC $\Rightarrow$ $AH = HC = b$.
- También se traza: $\overline{AF} \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$
- ⊿AFC notable de 30°

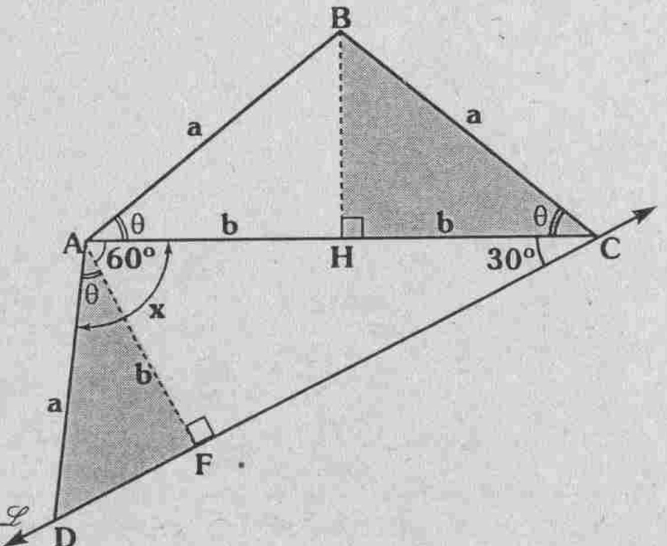
$$\Rightarrow AF = \frac{AC}{2} = b$$

- Luego:

$$⊿FAD \cong ⊿HCB \Rightarrow m\measuredangle FAD = \theta$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 60° - \theta}$$

- Si $x > 60°$
- El procedimiento es análogo, en este caso la figura nos quedará así:



- Con esta condición tenemos:

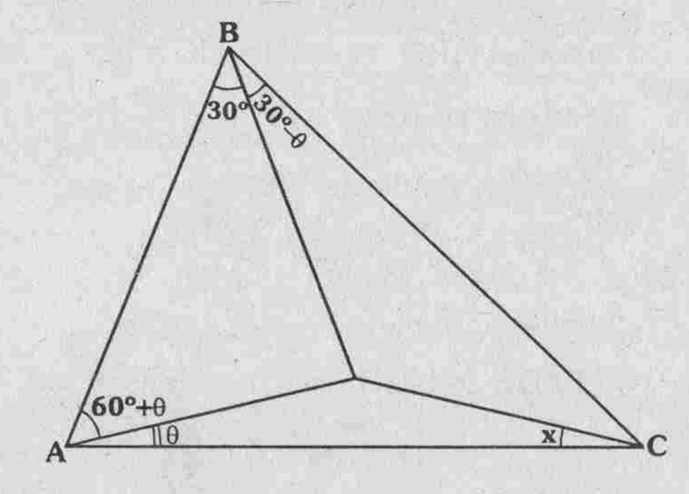
$$x = 60° + \theta$$



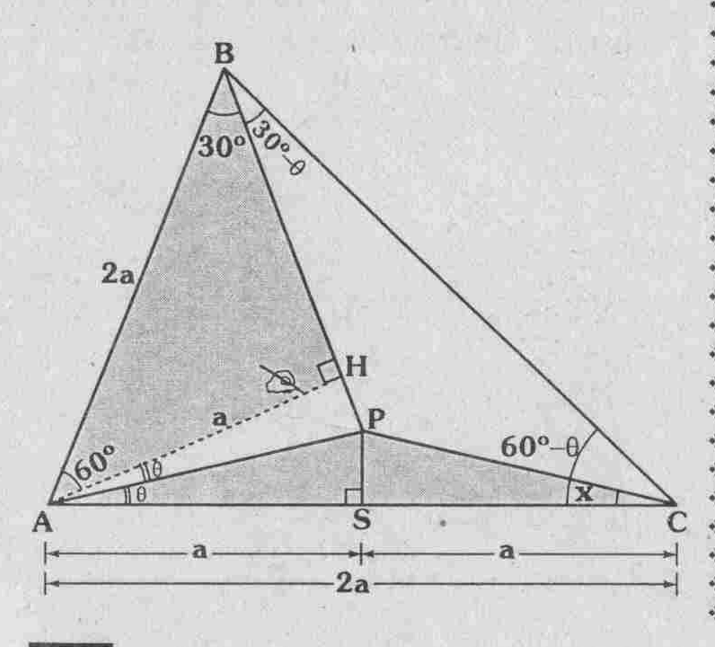
El estudiante puede verificar que $x \neq 60°$, es decir $\overline{AD}$ no es perpendicular a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$.

Problema N° 9

En el gráfico, $\theta < 30°$. Calcule x en función de θ.



Resolución



- Primero, notemos que el triángulo ABC es isósceles $\Rightarrow AB = AC$.
- Como $m\measuredangle BAP = 60° + \theta$, trazamos $\overline{AH}$ tal que $m\measuredangle BAH = 60° \Rightarrow \overrightarrow{AP}$ es bisectriz del $\measuredangle HAC$.
- $⊿AHB$ notable de 30°:

  Sea $AB = 2a \Rightarrow AH = a$

- Por teorema de la bisectriz:

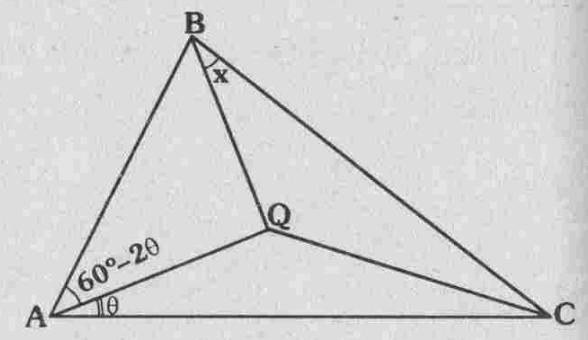
  $AH = AS = a$

- Como: $AC = 2a \Rightarrow SC = a$
- Luego, el ΔAPC es isósceles:

$$\therefore \quad x = \theta$$

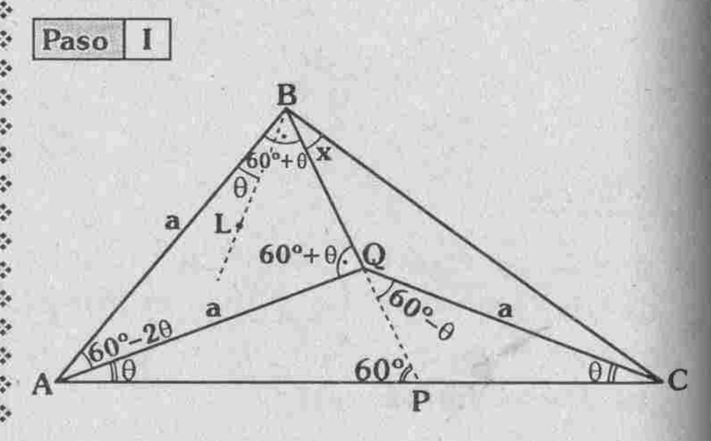
Problema N° 10

En el gráfico, $\theta < 30°$ y $AB = AQ = QC$. Calcule x.



Resolución

Paso I

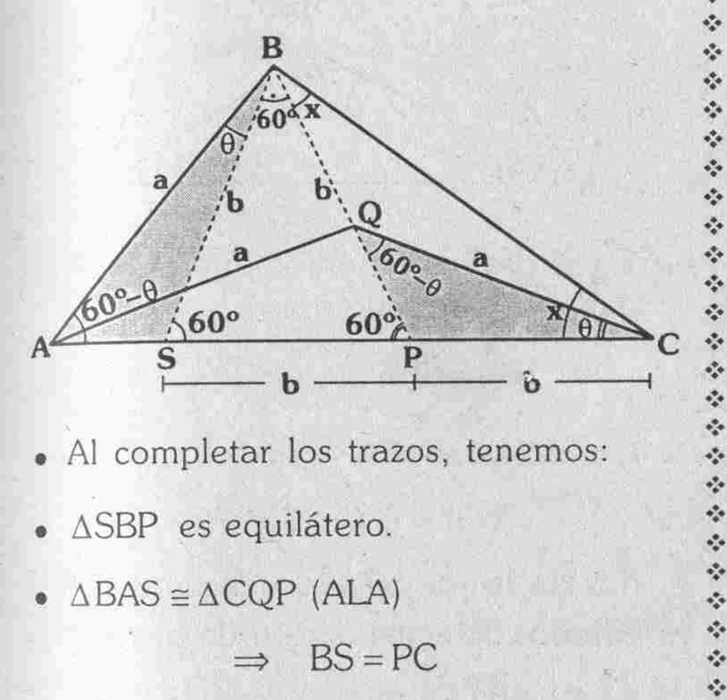


- Notemos que los triángulos ABQ y AQC son isósceles.
- Como:

$m\sphericalangle ABP = 60° + \theta$ y $m\sphericalangle BPA = 60°$

nos da la posibilidad de trazar $\overline{BL}$ tal que $m\sphericalangle ABL = \theta$.

Paso II



- Al completar los trazos, tenemos:
- ΔSBP es equilátero.
- $\Delta BAS \cong \Delta CQP$ (ALA)

$\Rightarrow \quad BS = PC$

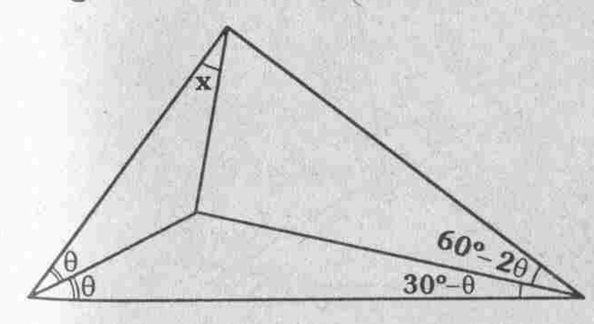
- Luego: ΔBPC es isósceles

$\Rightarrow \quad x + x = 60°$

$\therefore \quad \mathbf{x = 30°}$

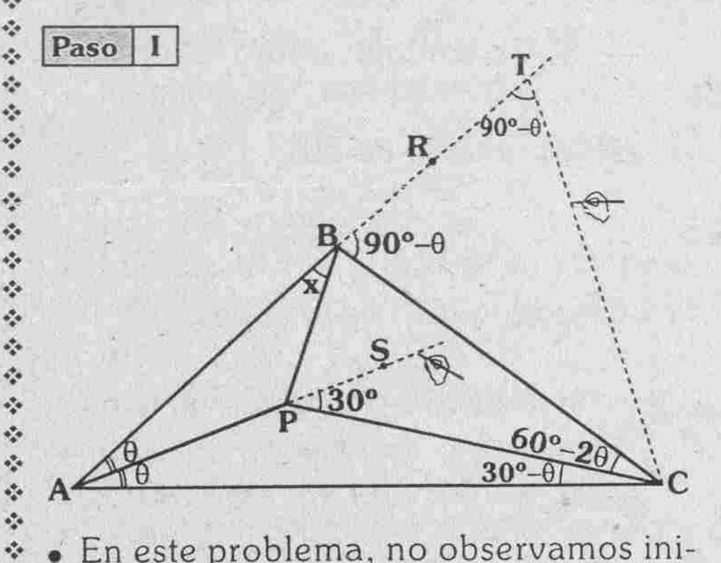
Problema N° 11

En el gráfico $\theta < 30°$, calcule x.



Resolución

Paso I



- En este problema, no observamos inicialmente triángulos isósceles ni equiláteros, sólo notamos la bisectriz $\overline{AP}$ del $\sphericalangle BAC$ y también:

$m\sphericalangle CBR = 90° - \theta$ y $m\sphericalangle BAC = 2\theta$

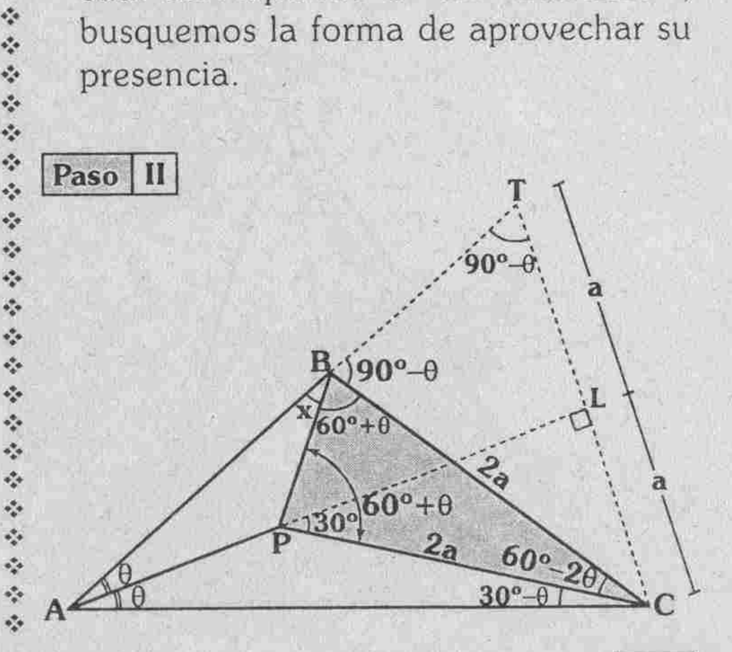
- Ello, por los criterios de construcción nos induce a trazar $\overline{CT}$ tal que:

$m\sphericalangle BTC = 90° - \theta$

entonces ΔBCT y ΔATC son isósceles.

- También notamos: $m\sphericalangle SPC = 30°$ el cual corresponde a "un $\sphericalangle$ notable", busquemos la forma de aprovechar su presencia.

Paso II



- Como el ΔATC es isósceles:

$\Rightarrow \overline{AL}$ es también altura y mediana.

- $\triangle PLC$ notable de 30°

$$\Rightarrow PC = 2(LC)$$

- Luego el ΔBCP es isósceles:

$$\Rightarrow m\measuredangle PBC = m\measuredangle BPC = 60° + \theta$$

$$\Rightarrow x + 60° + \theta + 90° - \theta = 180°$$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

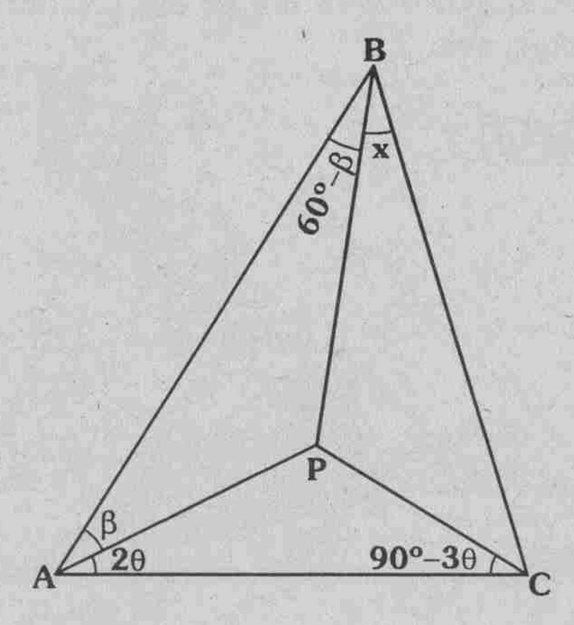
Problema N° 12

En el gráfico:

$$\theta < 30°, \ \beta < 60°$$

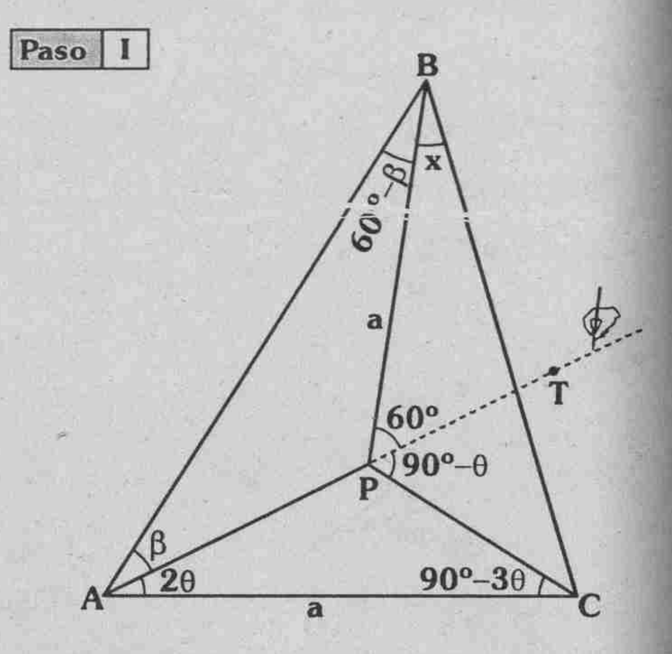
$$y \quad BP = AC$$

Calcule x en función de θ.



Resolución

Paso I



- En el gráfico tenemos que al prolongar $\overline{AP}$ se observará:

$$m\measuredangle TPB = 60° \quad y \quad m\measuredangle TPC = 90° - \theta$$

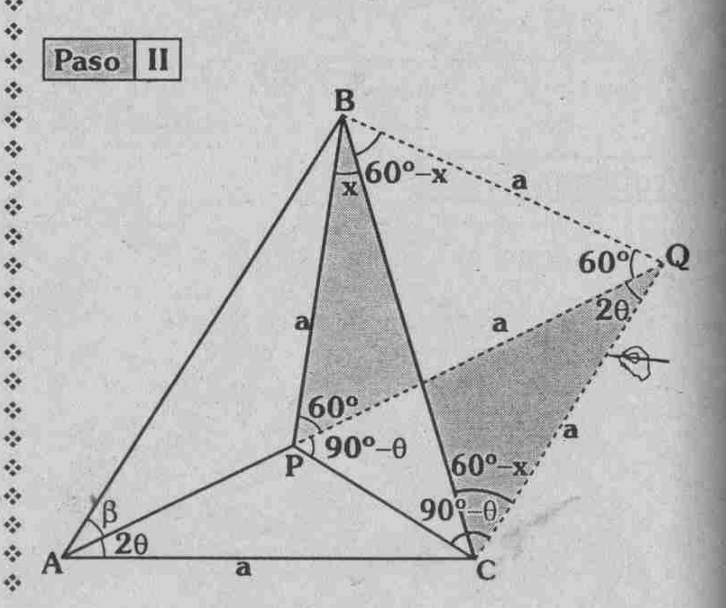
- Como: $m\measuredangle CAP = 2\theta$

$y \quad m\measuredangle TPC = 90° - \theta$

nos da la posibilidad deacuerdo a los criterios de construcción de trazar $\overline{CQ}$ (Q en $\overrightarrow{AP}$) tal que:

$$\mathbf{m\measuredangle AQC = 2\theta}$$

Paso II



- Tenemos ahora que los $\Delta_s ACQ$ y PQC

$$\Rightarrow \quad AC = CQ = QP = a$$

- Como $PB = PQ = a$ y $m\sphericalangle BPQ = 60°$

$$\Rightarrow \quad \Delta PBQ \text{ es equilátero}$$

- ΔBQC es isósceles

$$\Rightarrow \quad m\sphericalangle BCQ = 60° - x$$

- En la parte sombreada:

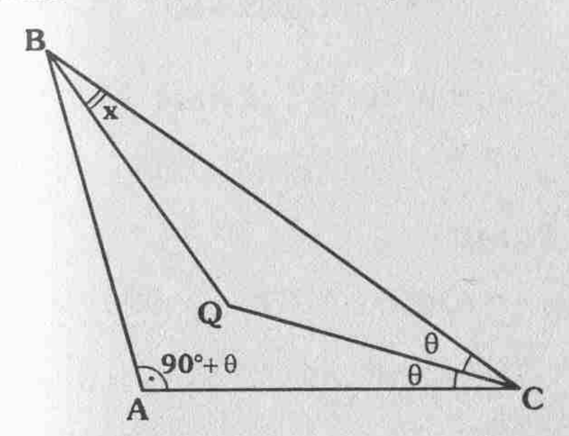
$$x + 60° = 2\theta + 60° - x$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = \theta}$$

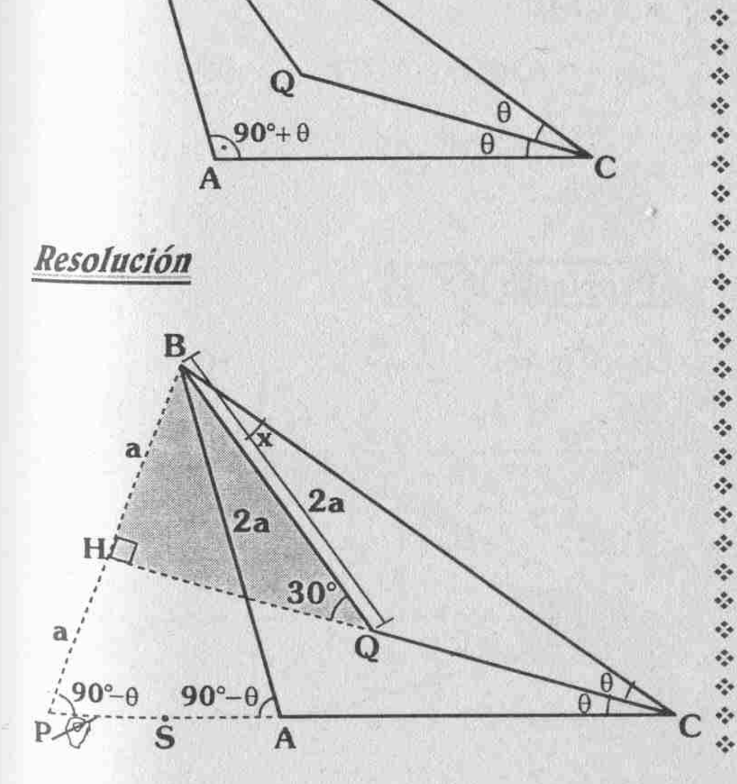
Problema N° 13

En el gráfico $\theta < 30°$ y $AB = BQ$.

Calcule x en función de θ.



Resolución



- Al prolongar $\overline{CA}$, nos damos cuenta que $m\sphericalangle SAB = 90° - \theta$ y $m\sphericalangle BCA = 2\theta$, entonces nos conviene trazar $\overline{BP}$, tal que:

$$m\sphericalangle BPA = 90° - \theta$$

- Luego: ΔCBP y ΔAPB son isósceles

$$\Rightarrow \quad PB = BA \quad y \quad BC = CP$$

- Como ΔBCP es isósceles $\Rightarrow \overline{CH}$ es bisectriz, mediana y altura.

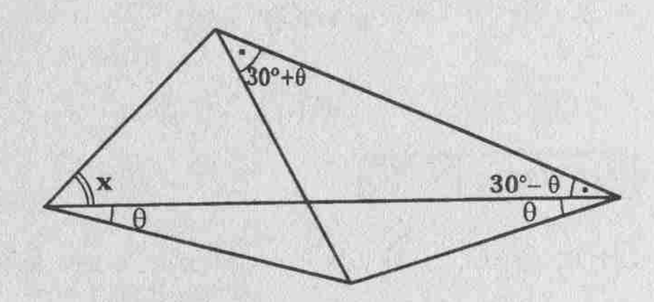
- Luego, el ⊿BHQ es notable de 30°

$$\Rightarrow \quad x + \theta = 30°$$

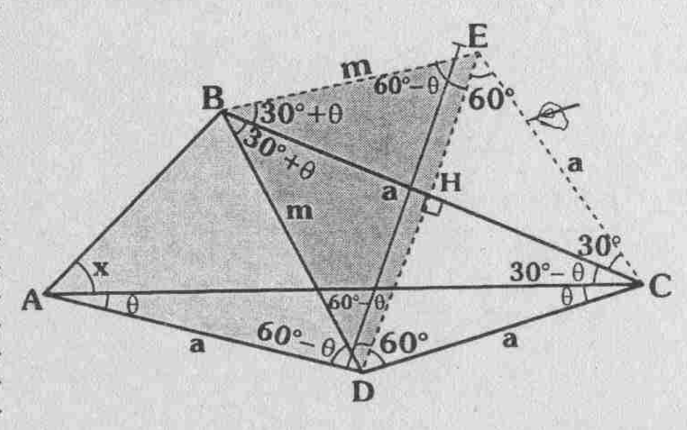
$$\therefore \quad \mathbf{x = 30° - \theta}$$

Problema N° 14

En el gráfico, $\theta < 30°$, calcule x en función de θ.



Resolución



- Notamos primero:

  ΔADC isósceles $\Rightarrow$ $AD = DC$

  $m\sphericalangle ADB = 60° - \theta$

  $m\sphericalangle DCB = 30°$

- Se traza $\overline{DH} \perp \overline{BC}$ y se prolonga hasta E tal que el $DH = HE = \dfrac{a}{2}$

  $\Rightarrow$ ΔDEC es equilátero

- Como $DH = HE \Rightarrow BE = BD$

  $\Delta ADB \cong \Delta EDB$ (LAL)

  $\Rightarrow$ $AB = m$

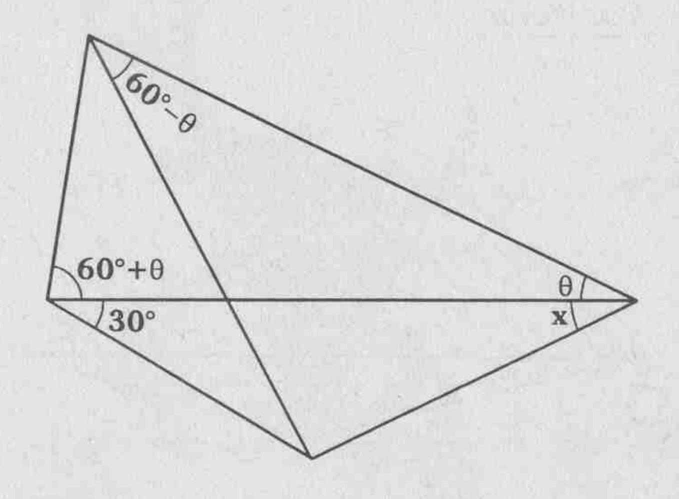
- ΔABD : isósceles

  $\Rightarrow$ $x + \theta = 60° - \theta$

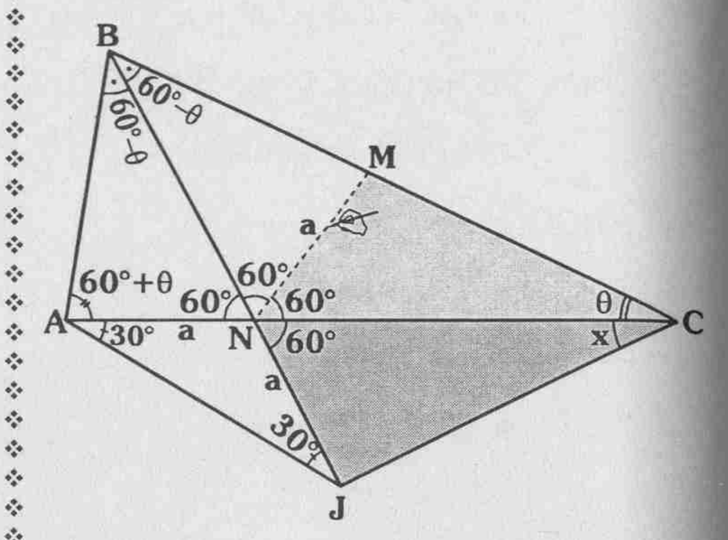
  $\therefore$ $\mathbf{x = 60° - 2\theta}$

Problema N° 15

En el gráfico, $\theta < 60°$, calcule x en función de θ.



Resolución



- Al completar ángulos, tenemos:

  $m\sphericalangle AJN = 30°$

  $m\sphericalangle ABJ = 60° - \theta$

  $m\sphericalangle ANB = 60°$

- Como $m\sphericalangle BNC$, se traza $\overline{NM}$, tal que:

  $m\sphericalangle BNM = 60°$

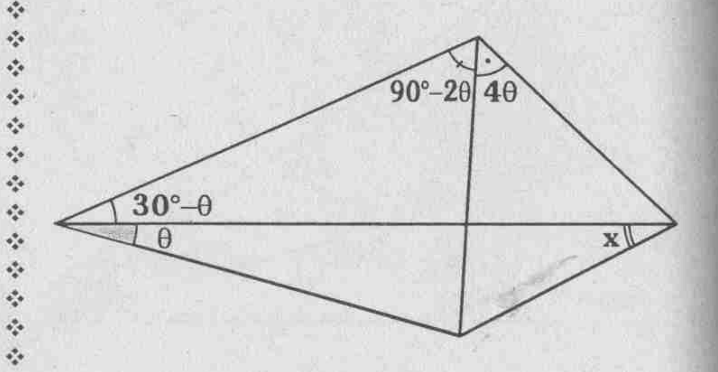
- Luego:

  $\Delta ANB \cong \Delta MNB \Rightarrow NM = a$

  $\Delta CNM \cong \Delta CNJ \Rightarrow \mathbf{x = \theta}$

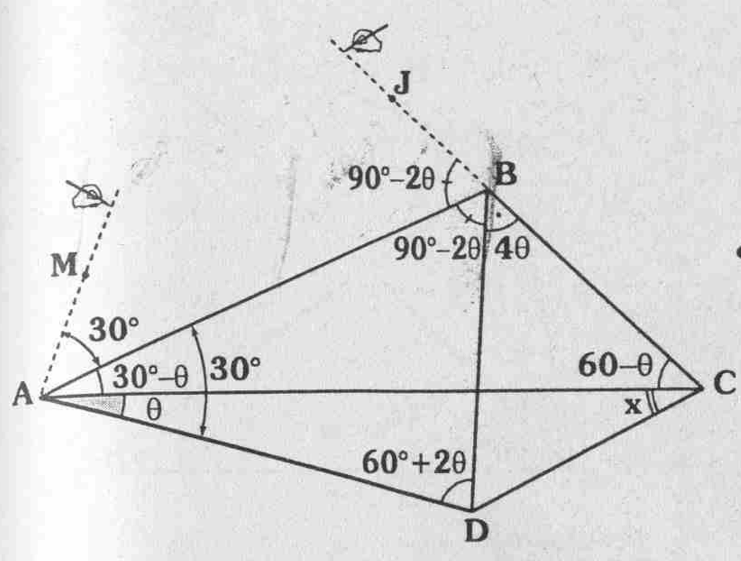
Problema N° 16

En el gráfico, $\theta < 30°$, calcule x.



Resolución

Paso I



- Cuando prolongamos $\overline{CB}$, nos damos cuenta:

$$m\sphericalangle JBA = m\sphericalangle ABD = 90° - 2\theta$$

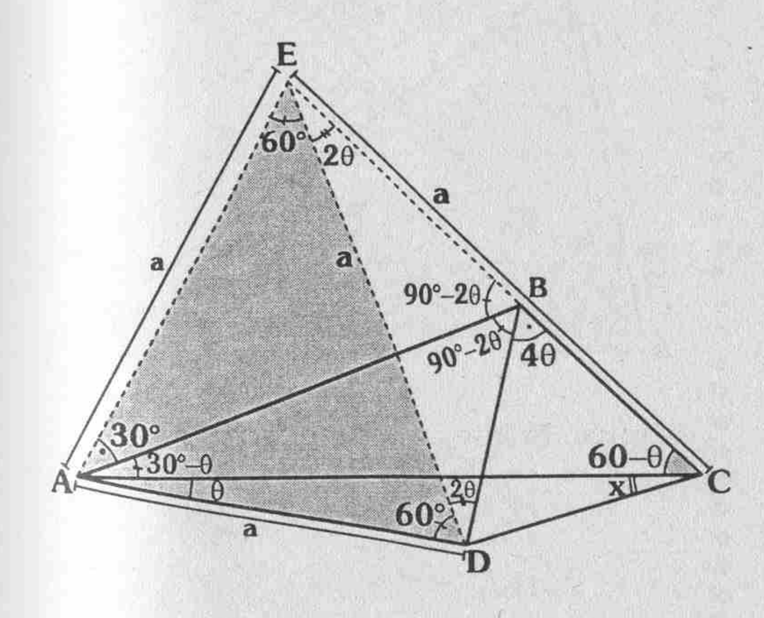
$$m\sphericalangle DAB = 30°$$

- Trazamos $\overline{AM}$ tal que:

$$m\sphericalangle BAM = 30°$$

para buscar un triángulo congruente con el ΔABD.

Paso II



- Al completar los trazos indicados tenemos:

$$\Delta BAE \cong \Delta BAD \Rightarrow AE = AD$$

- Como:

$$m\sphericalangle EAD = 60° \Rightarrow \Delta AED$$

es equilátero.

- Como:

$$m\sphericalangle EAC = m\sphericalangle ECA = 60° - \theta$$

$\Rightarrow \Delta AEC$ es isósceles

$\Rightarrow EA = EC = a$

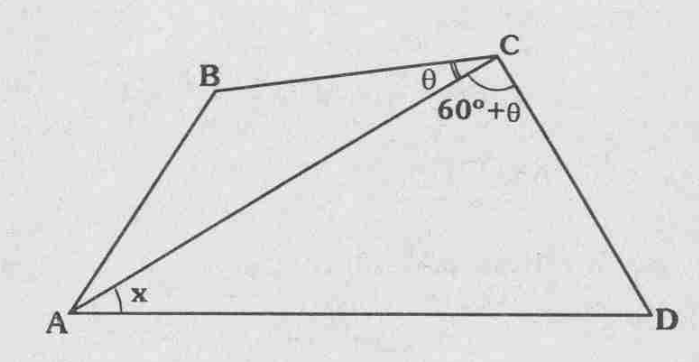
- ΔDEC es isósceles, como

$$m\sphericalangle DEB = 2\theta \Rightarrow x + 60° - \theta = 90° - \theta$$

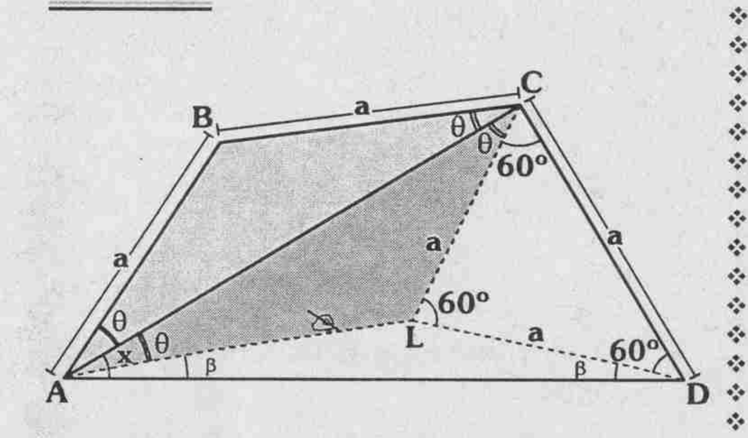
$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Problema N° 17

En el gráfico, $\theta < 90°$ y $AB = BC = CD$
Calcule x.



Resolución



- Como $m\measuredangle ACD = 60° + \theta$, trazamos $\overline{CL}$, tal que $m\measuredangle ACL = \theta$ y $CL = a$
  $\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta ALC$, luego: $CL = AL = a$
- Como $LC = CD$ y $m\measuredangle LCD = 60° \Rightarrow$ el ΔLCD es equilátero
- ΔALD es isósceles.
- En ACLD:

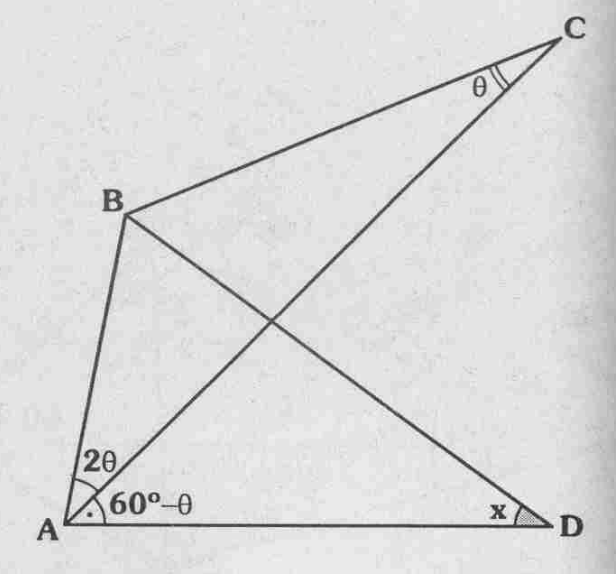
$$2\theta + 2\beta = 60°$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = 30°$$

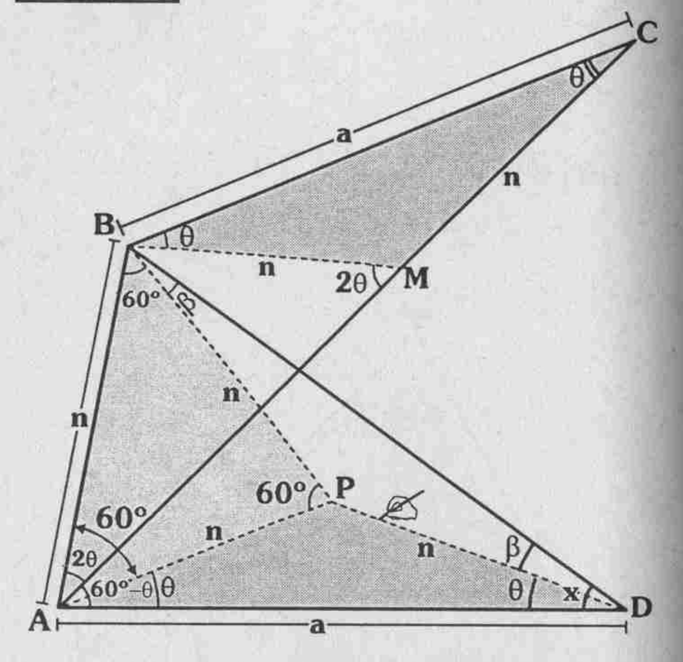
$$\therefore \quad \mathbf{x = 30°}$$

Problema N° 18

En el gráfico, $\theta < 90°$, $BC = AD$.
Calcule x.



Resolución



- Inicialmente nos damos cuenta:

  $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BCA)$ y

  $m\measuredangle BAD = 60° + \theta$

- Se traza $\overline{BM}$ tal que $m\measuredangle MBC = \theta$

  $\Rightarrow BM = MC = AB$

- Se traza también:

  $\overline{AP}$ tal que $m\sphericalangle DAP = \theta$ y $AP = n$

- $\Delta PAD \cong \Delta MBC$ (LAL) $\Rightarrow$ $PD = n$

- Además, como:

  $AB = AP$ y $m\sphericalangle BAP = 60°$

  entonces ΔABP es equilátero.

- ΔBPD es isósceles.

- En ⩓ADBP:

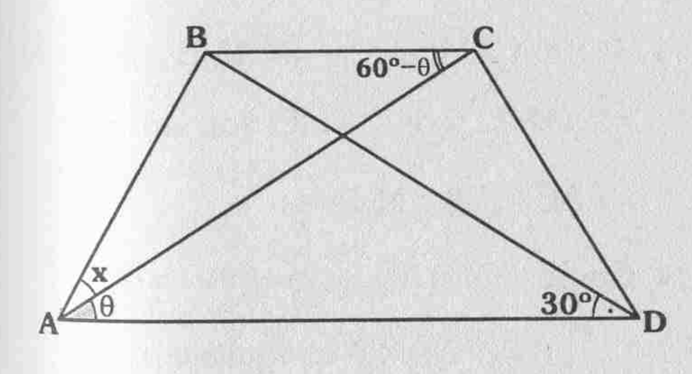
$$2\theta + 2\beta = 60°$$

$$\theta + \beta = 30°$$

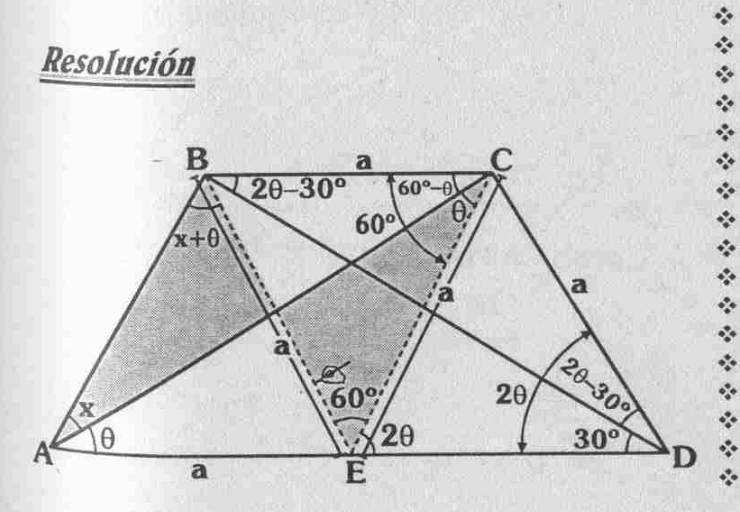
$$\therefore \quad \mathbf{x = 30°}$$

Problema N° 19

En el gráfico, $\theta < 60°$ y $BC = CD$. Calcule x.



Resolución



- Como el ΔBCD es isósceles

  $\Rightarrow$ $m\sphericalangle CBD = m\sphericalangle CDB = 2\theta - 30°$

  $\Rightarrow$ $m\sphericalangle ADC = 2\theta$

- En el ΔACD, se está notando :

  $m\sphericalangle CDA = 2(m\sphericalangle CAD)$

  $\Rightarrow$ Se traza $\overline{CE}$ tal que $m\sphericalangle ACE = \theta$

  $\Rightarrow$ $CE = CD = AE$

- Como $m\sphericalangle ABE = 60°$ y $BC = CE$ entonces el ΔBCE es equilátero.

- ΔAEB : isósceles

  $\Rightarrow$ $m\sphericalangle ABE = x + \theta$

- En la parte sombreada:

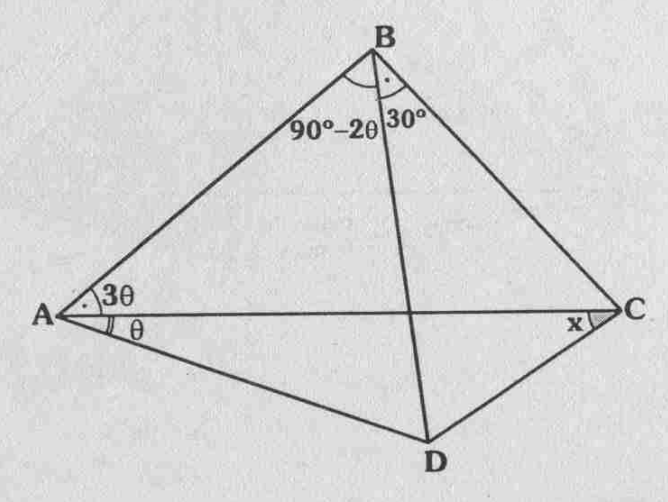
$$x + x + \theta = 60° + \theta$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 30°}$$

Problema N° 20

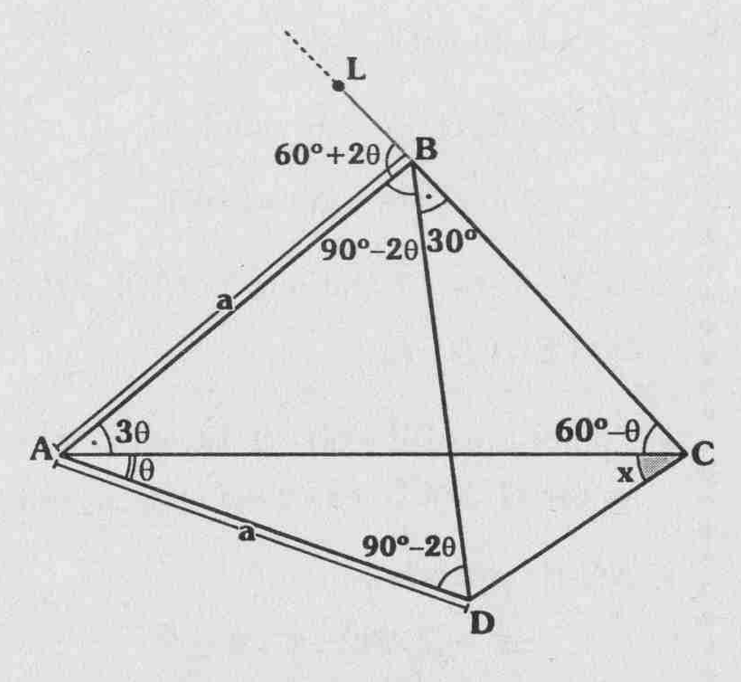
En el gráfico, $\theta < 15°$.

Calcule x.



Resolución

Paso I

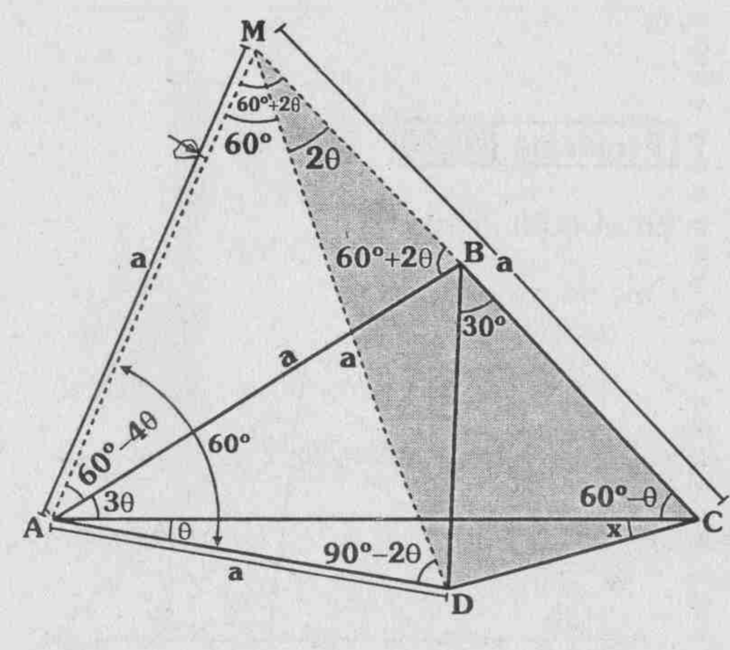


- Notamos inicialmente que el ΔABD es isósceles. También al prolongar $\overline{CB}$.
- Se nota:

$m\sphericalangle ACB = 60° - \theta$ y

$m\sphericalangle LBA = 60° + 2\theta$

Paso II



- Se traza $\overline{AM}$ tal que $m\sphericalangle AMB = 60° + 2\theta$

$\Rightarrow \Delta AMB$ y el ΔAMC son isósceles

$\Rightarrow AB = AM = MC = a$

- Como $AM = AD$ y $m\sphericalangle MAD = 60°$

$\Rightarrow \Delta AMD$ es equilátero

- ΔDMC: es isósceles

$\Rightarrow DM = MC = a$

- Como $m\sphericalangle DMC = 2\theta$

$\Rightarrow 60° - \theta + x = 90° - \theta$

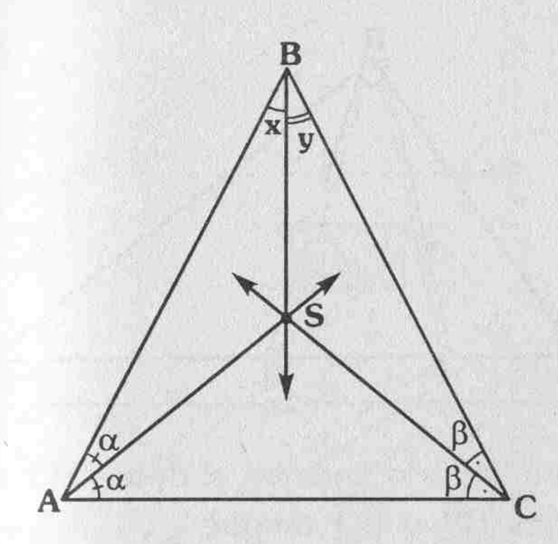
$\therefore$ $\mathbf{x = 30°}$

CONSIDERACIONES FINALES

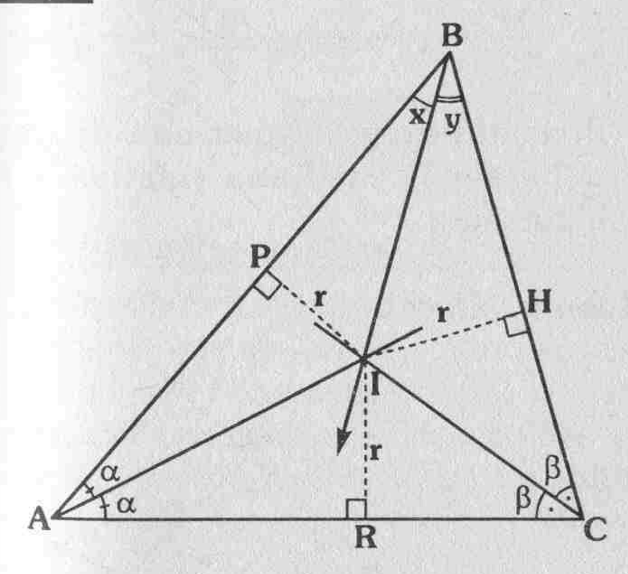
Veamos a continuación algunas situaciones comunes que el estudiante encontrará en la resolución de problemas. Aunque algunos de estos resultados, los estudiaremos en otros capítulos como puntos notables o circunferencia, los presentamos ahora, pues ellos tienen que ver con teoremas sobre congruencia.

Así tenemos:

- Si se tiene que $\overrightarrow{AS}$ y $\overrightarrow{CS}$ son bisectrices, entonces $\overrightarrow{BS}$ también es bisectriz.



Prueba:

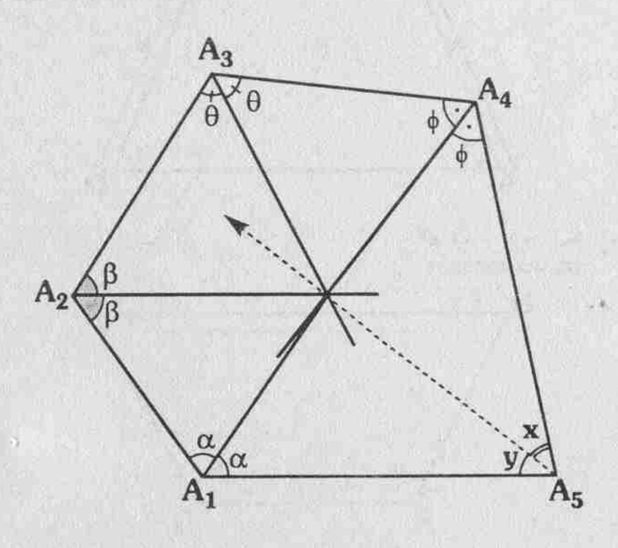


- Por teorema de la bisectriz:

$$IR = IH = IP$$

- Como: $IP = IH \Rightarrow x = y$

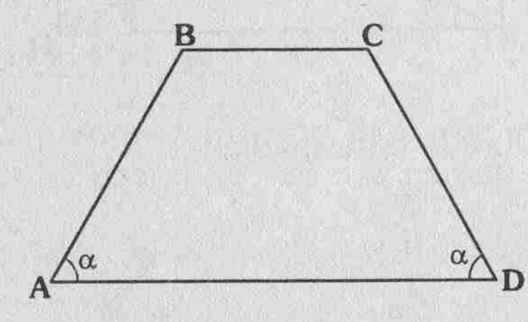
Generalizando:



- Consideremos un polígono de cinco vértices (puede ser de "n" vértices). Si las bisectrices desde A_1, A_2, A_3 y A_4 concurren, entonces: $x=y$



- Si $AB = DC$



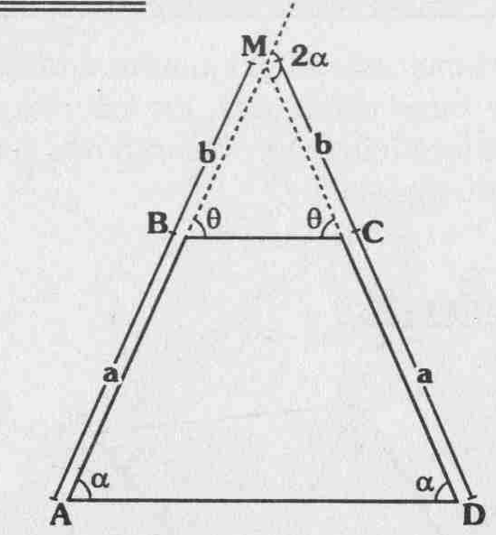
Se cumple:

$$\overline{AD} // \overline{BC}$$

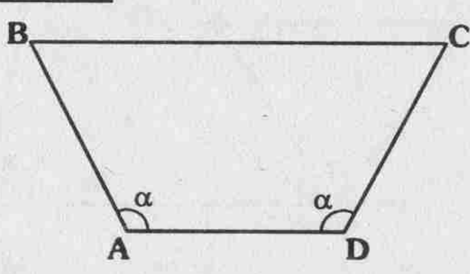
Prueba:

- Si $\alpha \neq 90°$, consideremos los siguientes casos:

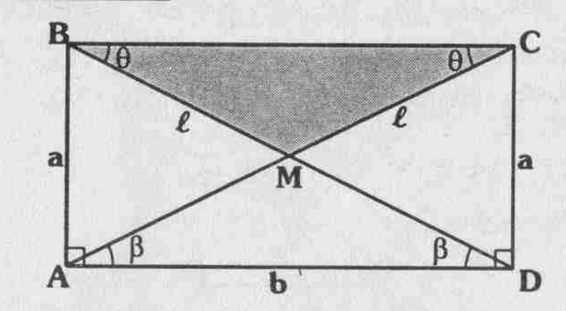
a) Si $\alpha < 90°$:



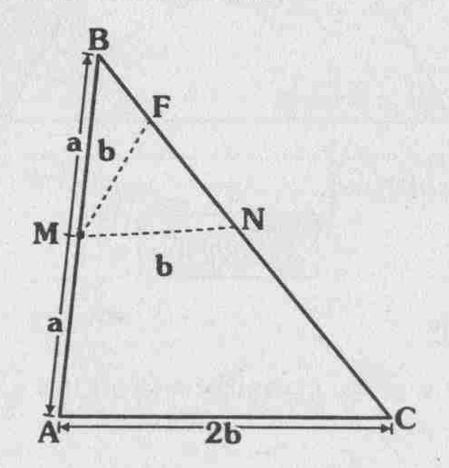
b) Si $\alpha > 90°$:



c) Si $\alpha = 90°$:



■ Sobre la base media:

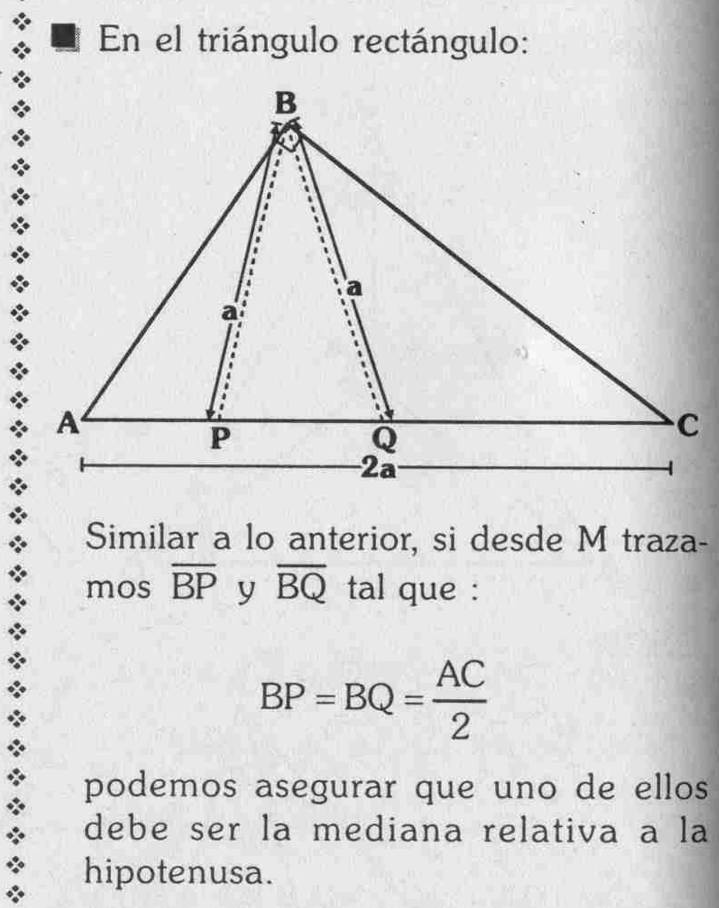


Si desde el punto medio M de $\overline{AB}$ trazamos los segmentos $\overline{MF}$ y $\overline{MN}$ tal que:

$$MF = MN = \frac{AC}{2}$$

entonces uno de ellos debe ser la base media (*no dejarse llevar por el gráfico*).

■ En el triángulo rectángulo:

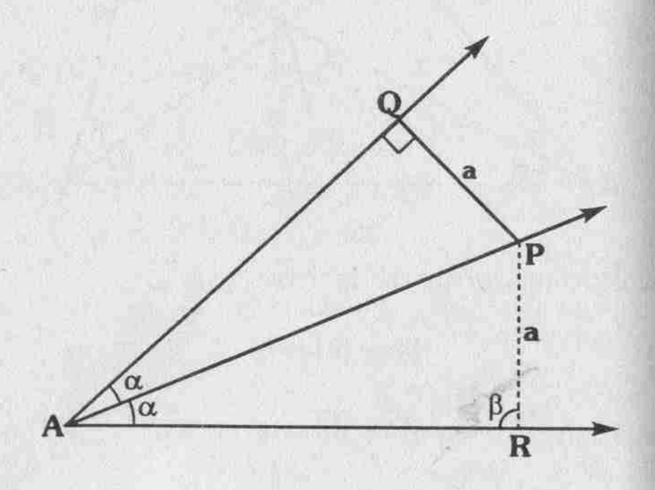


Similar a lo anterior, si desde M trazamos $\overline{BP}$ y $\overline{BQ}$ tal que :

$$BP = BQ = \frac{AC}{2}$$

podemos asegurar que uno de ellos debe ser la mediana relativa a la hipotenusa.

■ En la bisectriz:

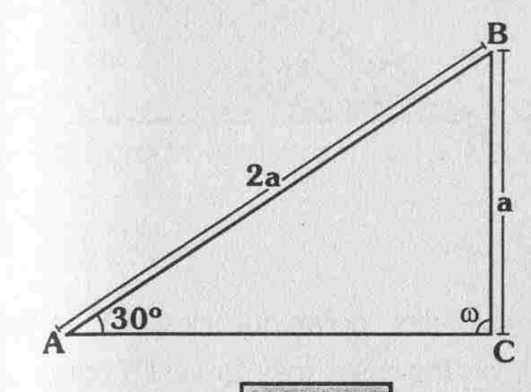


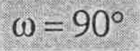
Si $\overrightarrow{AP}$ es bisectriz del $\measuredangle QAR$, tal que:

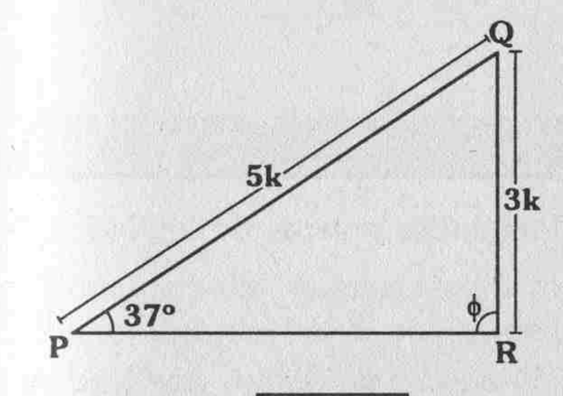
$\overline{PQ} \perp \overline{AQ}$ y $PQ = PR$

$\Rightarrow$ $\beta = 90°$

■ En algunos triángulos notables:



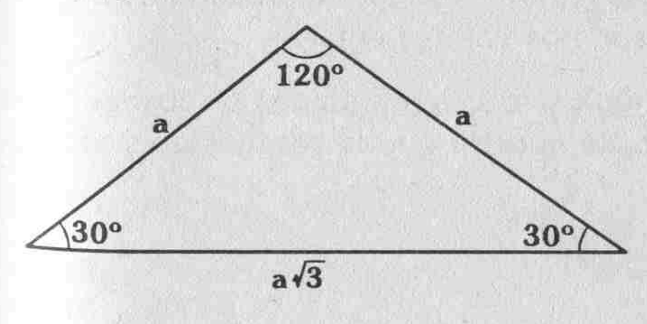
Se cumple:  $\omega = 90°$

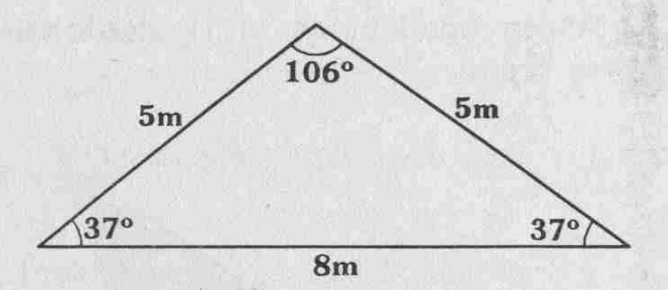


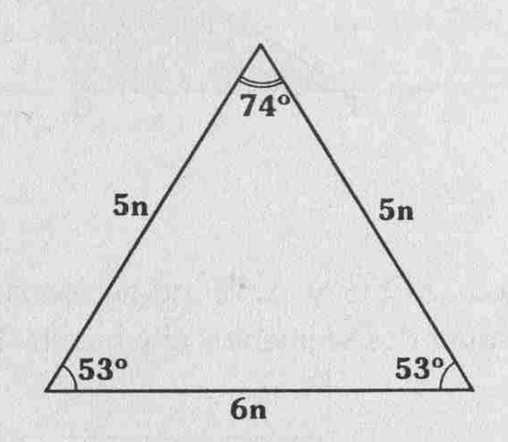
Se cumple: $\phi = 90°$

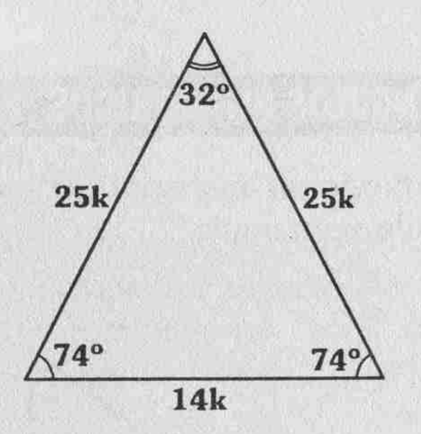
Otros triángulos notables :

Presentamos a continuación, algunos triángulos notables (*notar que no necesariamente son triángulos rectángulos*), notar que se conocen todas las medidas angulares y las razones de todos los lados.



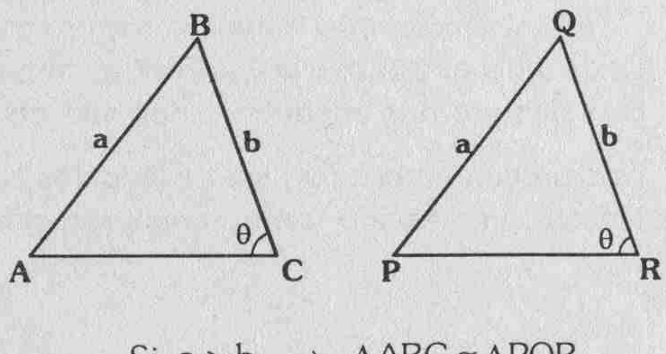






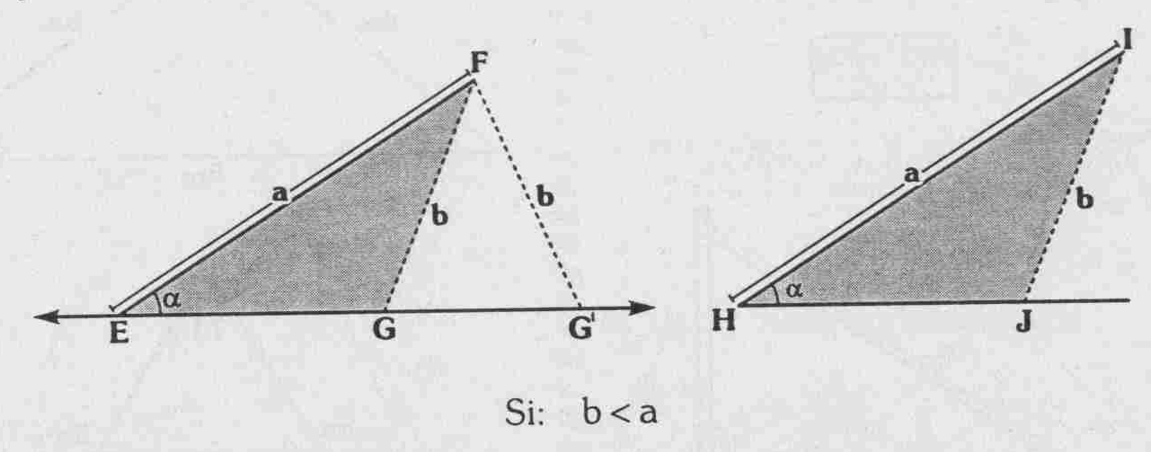
Sobre el 4to caso :

- El denominado 4to caso, estudiado en la página N° 14 nos indica:



Si $a > b \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta PQR$

- Ahora analicemos el siguiente caso en que el "ángulo opuesto" al menor lado se repita.

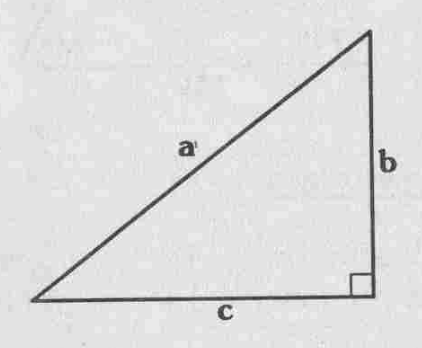


Si: $b < a$

$\Rightarrow$ Los ΔEFG y ΔHIJ no necesariamente son congruentes, notar que desde F se pueden trazar dos segmentos que miden "b", solo en uno de los casos los Δ_s serán congruentes.

TRIÁNGULOS PITAGÓRICOS

"Expresiones matemáticas para obtener las longitudes enteras de los lados de un triángulo rectángulo".



Pitágoras de Samos nos legó su teorema de los triángulos rectángulos, pilar fundamental de cálculos geométricos y trigonométricos, en el cual relaciona las medidas de los catetos y de la hipotenusa.

$$c^2 + b^2 = a^2 \qquad \ldots \text{(I)}$$

Dado que al aplicar la expresión, hemos de acabar calculando una raíz cuadrada, casi siempre nos encontraremos que no obtenemos valores enteros.

Nos preguntamos si existen triángulos rectángulos, cuyas longitudes de los lados son enteros, un sencillo y muy conocido ejemplo demuestra que la respuesta es afirmativa:

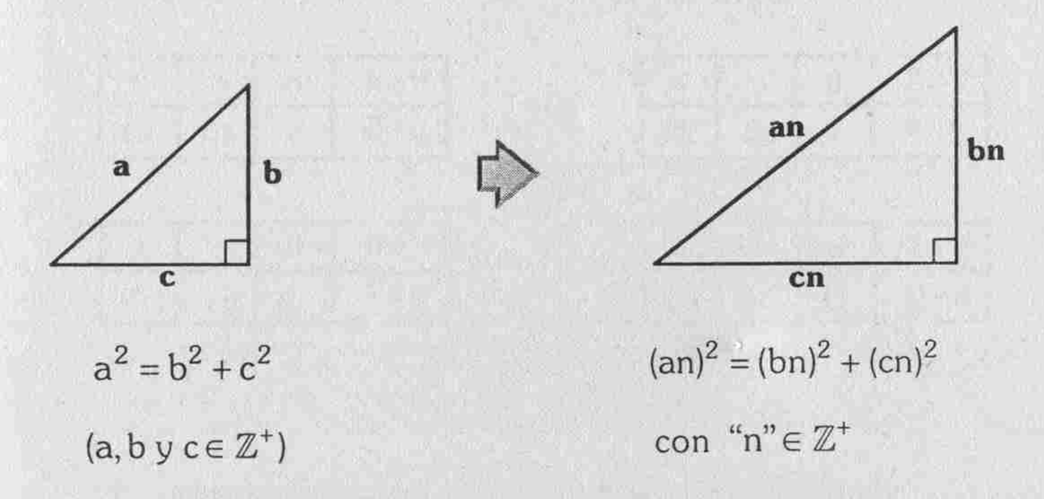
$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

¿Existen otras respuestas? ¿Cómo podemos hallarlas?

En este capítulo analizaremos dichas interrogantes.

Si tenemos la solución a; b y c de (I) podemos hallar otra multiplicando cada uno de los términos a, b y c con cualquier entero.

Puesto que 3; 4 y 5 es un resultado, podemos multiplicar por 2 para obtener 6; 8 y 10. Esto nos da $6^2+8^2=10^2$; también : $9^2+12^2=15^2$. En términos generales 3n; 4n y 5n será solución si "n" es un número entero. De la misma forma, si a, b y c es una solución cualquiera, entonces an; bn y cn es también solución.



Esta forma de hallar nuevos resultados es muy trivial y por lo tanto de poco interés. Es más interesante encontrar soluciones básicas, y estas no pueden hallarse meramente multiplicando otro resultado por un número entero. Denominaremos "soluciones reducidas" aquellas donde a; b y c no tengan un divisor común; luego 3; 4 y 5 es un resultado reducido.

Si dos o más números no tienen un divisor común diremos que son primos entre sí. En un resultado reducido cada par formado por los números a; b y c es primo.

A continuación, sólo se indicarán los resultados para obtener el triángulo rectángulo de lados enteros (*la demostración tiene que ver con procedimientos aritméticos los cuales no mencionaremos*)

$$\left.\begin{aligned} a &= \mu^2+v^2 \\ b &= \mu^2-v^2 \\ c &= 2\mu v \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

Con $\mu > v$ y μ y v son primos entre sí, ello para obtener "resultados reducidos".

Algunos ejemplos de números pitagóricos:

V=1	b	c	a
μ=2	3	4	5
μ=4	15	8	17
μ=6	35	12	37
μ=8	63	16	65
μ=10	99	20	101

V=2	b	c	a
μ=3	5	12	13
μ=5	21	20	29
μ=7	45	28	53
μ=9	77	36	85
μ=11	117	44	125

V=3	b	c	a
μ=4	7	24	25

V=4	b	c	a
μ=5	9	40	41

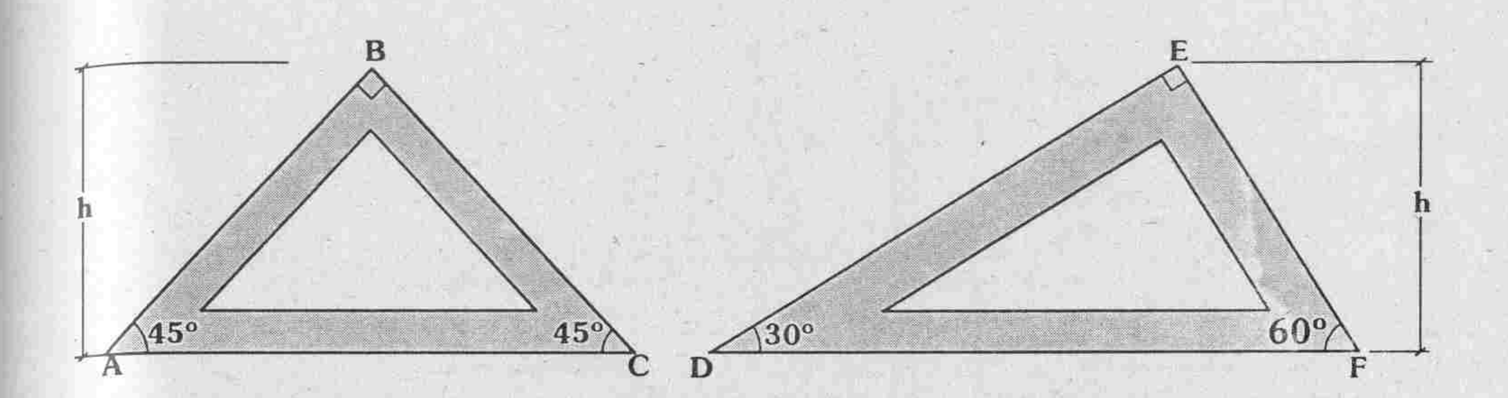
V=5	b	c	a
μ=6	11	60	61

V=6	b	c	a
μ=7	13	84	85



- *Si bien es cierto, los resultados indicados, si reemplazamos en la expresión* (II) *por enteros cualesquiera con la condición dada encontraremos triángulos de lados enteros, pero no serán resultados reducidos;*
- *En las soluciones reducidas,sólo uno es divisible por 2, más aun múltiplo de 4;*
- *Los tres valores a; b y c no pueden ser impares a la vez.*
- *Dos de los números son impares y uno par.*
- *Tampoco pueden tener un factor común impar.*

JUEGO DE ESCUADRAS



En el gráfico mostrado se tiene un juego de escuadras , representados por los triángulos rectángulos ABC *y* DEF(m∢ABC = 90° ; m∢BAC = m∢ACB = 45° ; m∢DEF = 90° ; m∢EDF = 30° *y* m∢DFE = 60°) , *es interesante notar que ambos triángulos tienen la misma altura relativa a la hipotenusa y como consecuencia de ello:* AC = DE .

El dibujo técnico es la representación gráfica de un objeto, dicha representación se guía por normas fijas y preestablecidas para poder describir las dimensiones, formas, características y construcción de lo que se quiere producir.

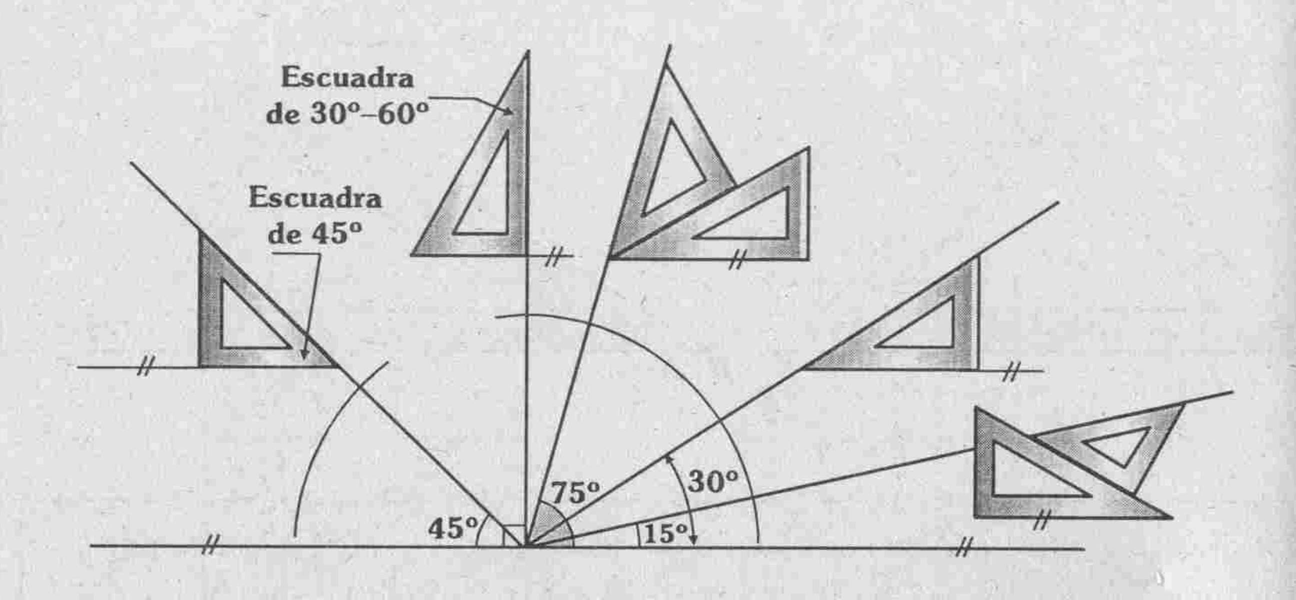
Para realizar el dibujo técnico se requiere de instrumentos de precisión, cuando no utilizamos estos instrumentos se llama dibujo a mano alzada.

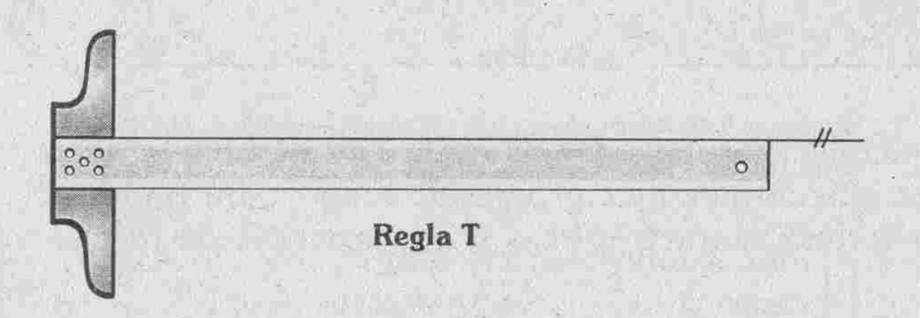
La realización de un dibujo técnico, exige cálculo, medición, líneas bien trazadas, una serie de condiciones hacen necesario el uso de buenos instrumentos, entre los principales tenemos: tablero de dibujo, regla T, transportadores, **juego de escuadras**, compás, portaminas, escalímetro, entre otros.

Entre los usos de las escuadras, se emplean para medir y trazar líneas horizontales, verticales, inclinadas y combinada con la regla T se trazan líneas paralelas, perpendiculares y oblícuas.

A la escuadra de 60° se le denomina también cartabón.

A continuación se representa algunas posiciones de diversos ángulos, lo cual nos posibilita usarlos en el diseño y trazado geométrico.





Regla T



Enunciado de los Problemas Resueltos

Ciclos

- ANUAL
- CEPRE-UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO
- OLIMPIADAS

Congruencia de Triángulos

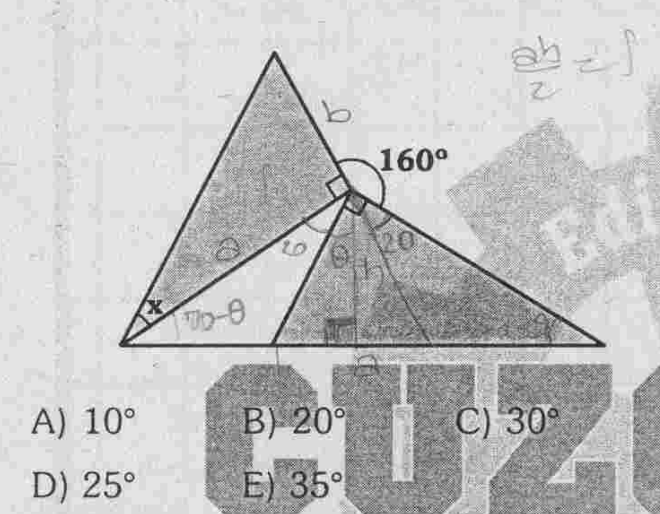
Geometría





PROBLEMA Nº1

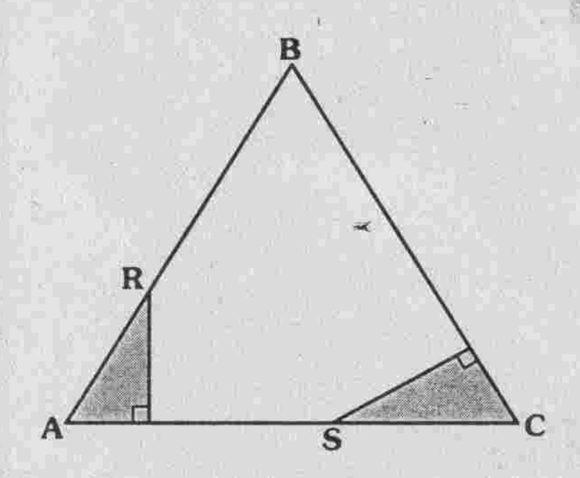
Según el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, calcule x.



A) 10° B) 20° C) 30°
D) 25° E) 35°

PROBLEMA Nº2

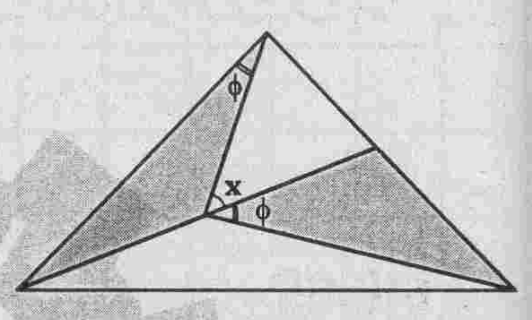
En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes y el triángulo ABC es equilátero. Calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{BS}$ y $\overleftrightarrow{CR}$.



A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 37°

PROBLEMA Nº3

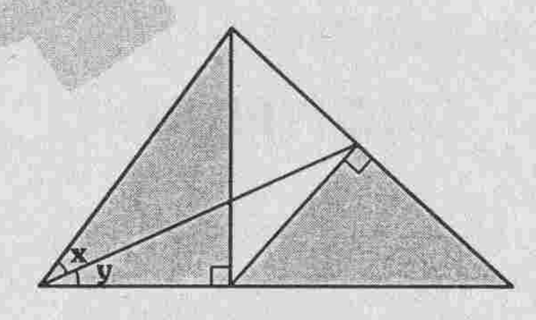
En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, calcule x.



A) 60° B) 53° C) 63°30'
D) 75° E) 72°

PROBLEMA Nº4

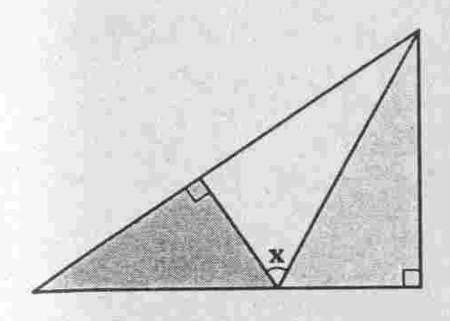
En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, calcule $\frac{x}{y}$.



A) 2 B) 1 C) 1/2
D) 3 E) 1/3

PROBLEMA Nº5

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, calcule x.

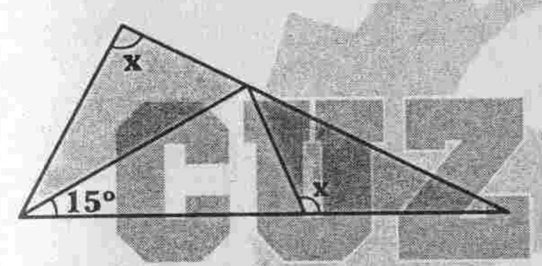


A) 30° B) 60° C) 45°

D) 75° E) 53°

PROBLEMA Nº6

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, calcule x.

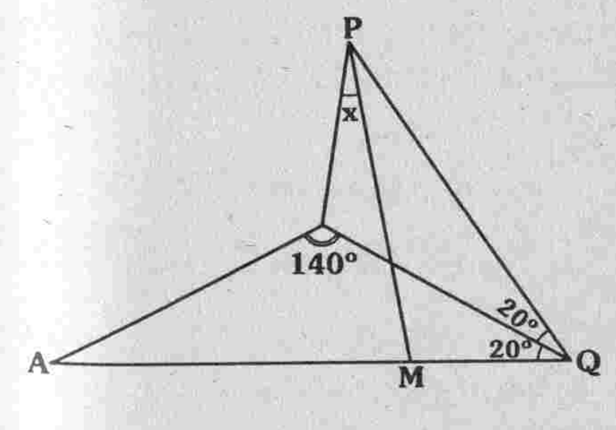


A) 150° B) 135° C) 120°

D) 127° E) 143°

PROBLEMA Nº7

En el gráfico, $AM = PQ$. Calcule x.

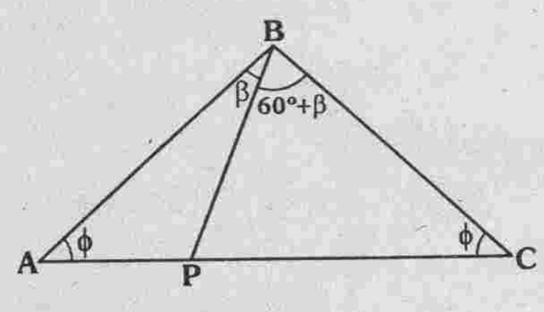


A) 40° B) 50° C) 30°

D) 20° E) 25°

PROBLEMA Nº8

Según el gráfico, $AP = 2$ y $PC = 7$, calcule PB.

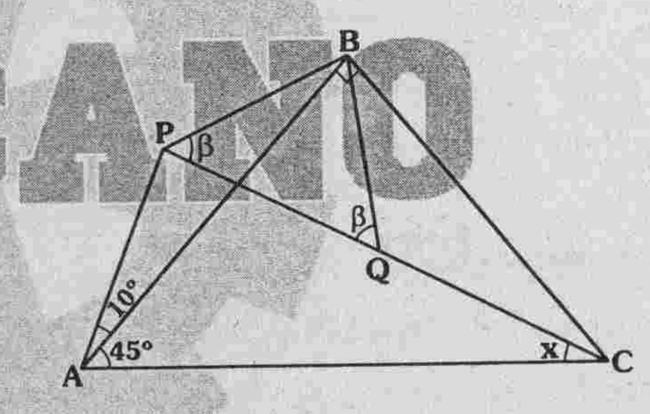


A) 5 B) 6 C) 7

D) 3,5 E) 9

PROBLEMA Nº9

En el gráfico, $AP = QC$. Calcule x.

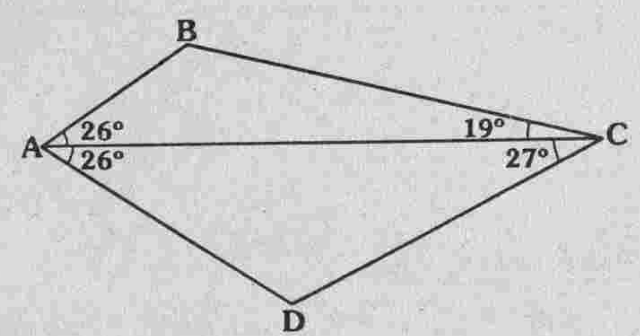


A) 35° B) 20° C) 15°

D) 25° E) 30°

PROBLEMA Nº10

Del gráfico, calcule $\dfrac{BC}{DC}$.



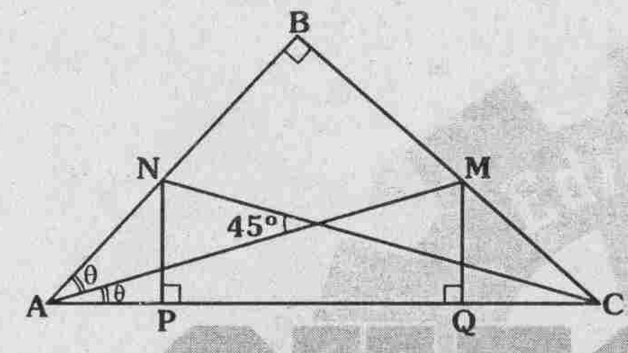
A) $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ B) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ C) $2\sqrt{2}$

D) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

PROBLEMA Nº11

En el gráfico, $AB = 4$ y $BC = 6$.

Calcule $QC - AP$.



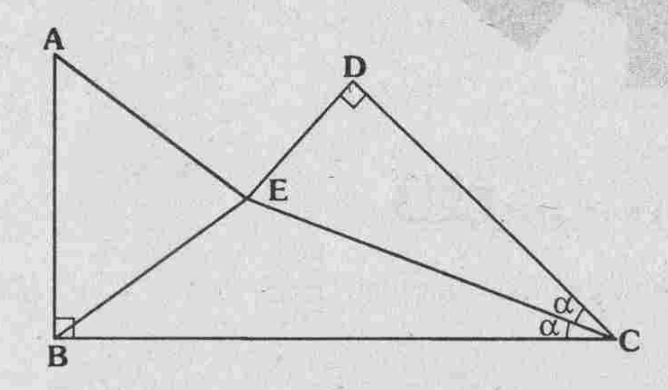
A) 4 B) 3 C) 5

D) 2 E) 1

PROBLEMA Nº12

Del gráfico, $AE = EB$ y $AB=6$.

Calcule ED.



A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 3,5

PROBLEMA Nº13

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz interior $\overline{AD}$, la mediatriz de $\overline{CD}$ interseca a $\overline{AC}$ y a la prolongación de $\overline{AD}$ en P y Q respectivamente. Si $BD = PC$, calcule $m\measuredangle AQP$.

A) 45° B) 45°/2 C) 37°/2

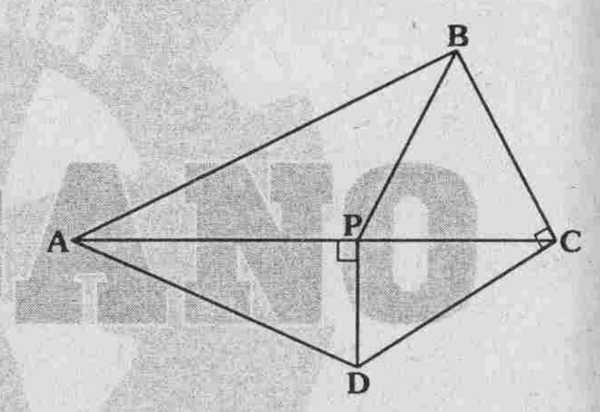
D) 37° E) 53°/2

PROBLEMA Nº14

En el gráfico:

$$BP = BC = CD \quad y \quad 2(AP) = 3(PC)$$

Calcule $m\measuredangle BAD$



A) 45° B) 53° C) 37°

D) 60° E) 75°

PROBLEMA Nº15

Exteriormente y relativo al cateto BC del triángulo rectángulo ABC, se ubica D, tal que:

$$m\measuredangle ADC = m\measuredangle ABC = 90°$$

$$\text{si } m\measuredangle CAD = m\measuredangle BCD = 15°$$

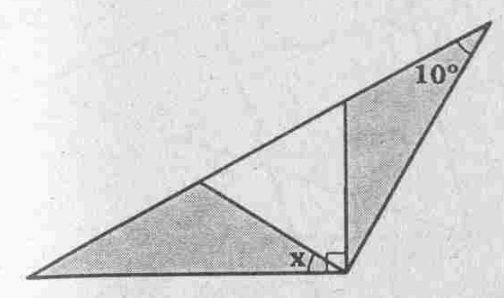
Calcule la razón entre AB y la distancia de D hacia $\overline{AB}$.

A) 1 B) 2 C) $2\sqrt{2}$

D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

PROBLEMA N°16

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, calcule x.

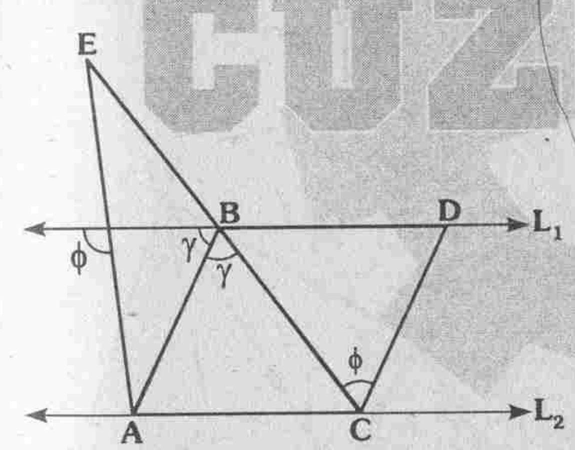


A) 20° B) 40° C) 60°
D) 80° E) 70°

PROBLEMA N°17

En el gráfico, $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, BD = 10 y AC = 7

Calcule EB.



A) 1 B) 5 C) 4
D) 3 E) 2

PROBLEMA N°18

En el triángulo ABC, se cumple que $m\measuredangle ABC = 105°$ y $m\measuredangle ACB = 25°$. Se traza la ceviana interior $\overline{BD}$ y la bisectriz interior AF. Si AB = DC.

Calcule $m\measuredangle BDF$.

A) 40° B) 20° C) 35°
D) 30° E) 25°

PROBLEMA N°19

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubica M en $\overline{AC}$, tal que $m\measuredangle MBC = 60°$; $m\measuredangle BAC = 50°$ y BM = a

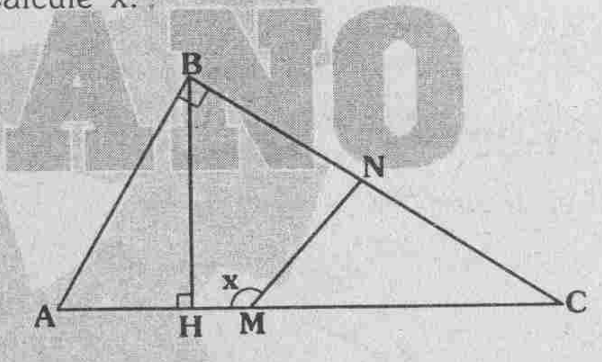
Calcule AC.

A) a B) $a\sqrt{3}$ C) 2a
D) $a\sqrt{2}$ E) $2a\sqrt{3}$

PROBLEMA N°20

En el gráfico, AB = NC y 5(AH) = 3(MN).

Calcule x.

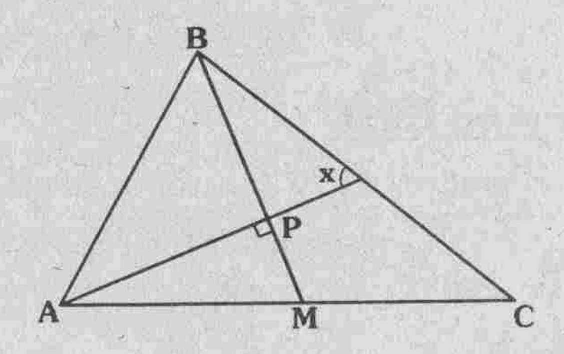


A) 120° B) 127° C) 143°
D) 135° E) 150°

PROBLEMA N°21

En el gráfico, AM = MC y BC = 2(AP)

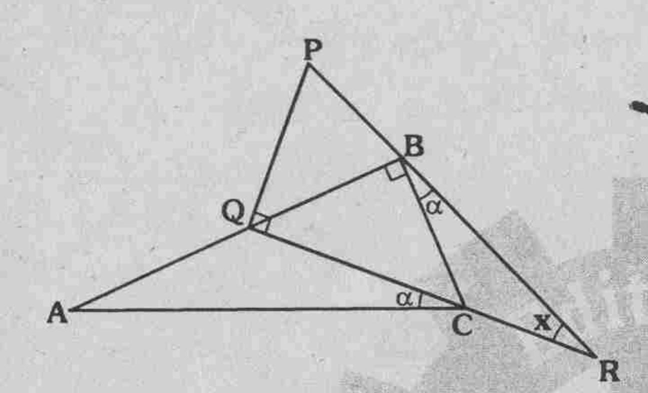
calcule x.



A) 53° B) 60° C) 75°
D) 45° E) 54°

PROBLEMA Nº22

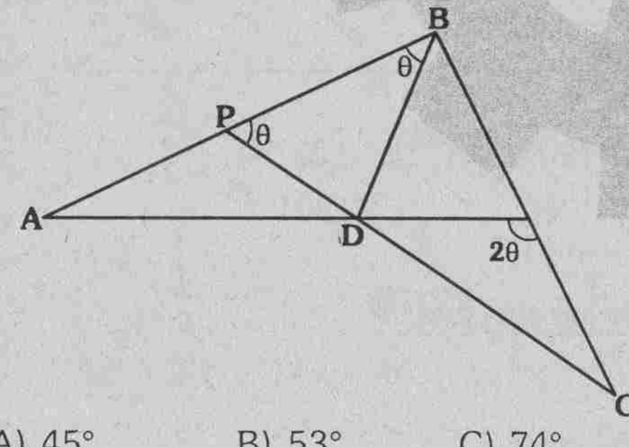
En el gráfico, los triángulos ABC y RQP son congruentes. Calcule x.



A) 30° B) 37° C) 45°/2
D) 45° E) 15°

PROBLEMA Nº23

En el gráfico, BC = AD, calcule θ.



A) 45° B) 53° C) 74°
D) 60° E) 75°

PROBLEMA Nº24

En el gráfico, $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son mediatrices de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si AB = 6 y AM = MC. Calcule TM.

A) 6 B) 3 C) 1,5
D) 2,5 E) 4,5

PROBLEMA Nº25

En el gráfico, los triángulos ABC y CDE son equiláteros y AC = PE.
Calcule α.

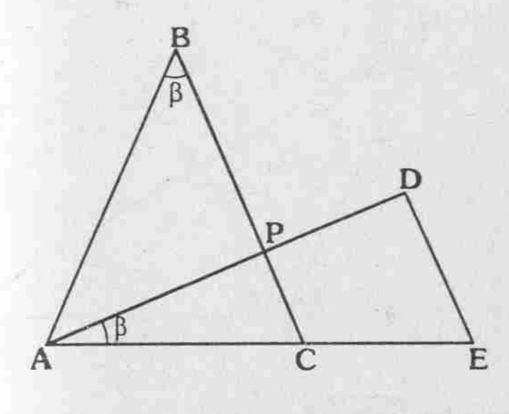
A) 20° B) 30° C) 25°
D) 40° E) 15°

PROBLEMA Nº26

En el gráfico:

$\overline{BC} // \overline{DE}$, AB = AD, AE = 10 y PC = 2

Calcule BP.

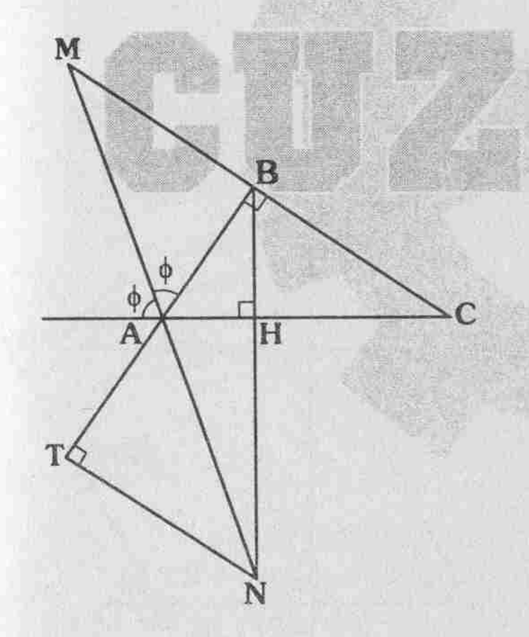


A) 4 B) 6 C) 5
D) 7 E) 8

PROBLEMA Nº27

En el gráfico, MB = 10 y BH = 4

Calcule TN.



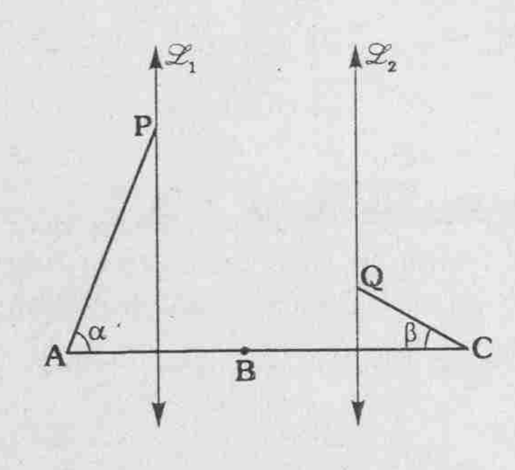
A) 5 B) 7 C) 6
D) 9 E) 8

PROBLEMA Nº28

Del gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

Si $3(AP) = 4(QC) = 12$ y $\alpha + \beta = 90°$

Calcule PQ.



A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 10

PROBLEMA Nº29

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos N y M respectivamente, tal que $m\measuredangle NMA = 90°$ y los triángulos NMA y NBC son congruentes, calcule $m\measuredangle NCM$.

A) 53° B) 45° C) 30°
D) 74° E) 60°

PROBLEMA Nº30

En el triángulo ABC se traza la altura AH y la mediana BM que se intersecan en N. Si AN = BC, calcule $m\measuredangle MBC$.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 37° E) 50°

PROBLEMA Nº31

En el triángulo ABC, la mediatriz de $\overline{BC}$ interseca a $\overline{AC}$ en Q, tal que:

$$AB = 2(QC) \quad y \quad m\measuredangle ACB = 45°$$

Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 16° B) 45° C) 53°
D) 37° E) 30°

PROBLEMA N°32

En el triángulo ABC se traza la mediana AM y en el triángulo ABM la altura BH, si $3(AC)=5(BH)$. Calcule $m\sphericalangle MAC$.

A) 60° B) 45° C) 30°
D) 53° E) 37°

PROBLEMA N°33

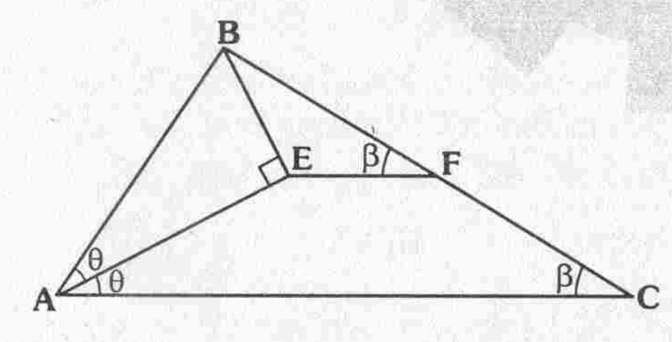
En el triángulo ABC, obtuso en B se cumple $m\sphericalangle BAC=8°$ y $AB=5(BC)$.

Calcule $m\sphericalangle BCA$.

A) 53° B) 45° C) 5°
D) 46° E) 60°

PROBLEMA N°34

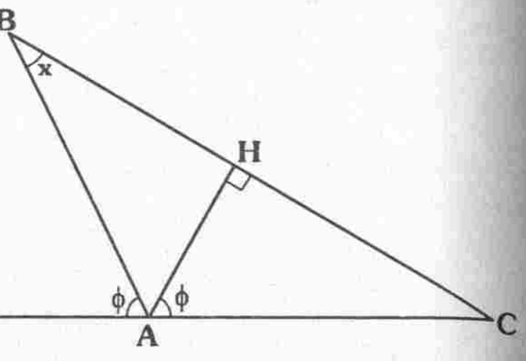
En el gráfico, $AB=5$ y $AC=13$.
Calcule EF.



A) 3 B) 2 C) 4
D) 5 E) 6

PROBLEMA N°35

En el gráfico, $BH=HC$.
Calcule x.



A) 30°
B) 60°
C) 40°
D) 45°
E) 20°

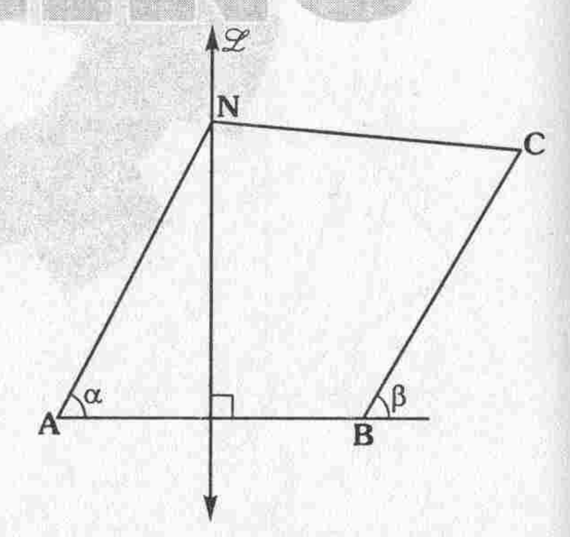
PROBLEMA N°36

En el triángulo ABC recto en B se cumple $AC=6\sqrt{2}$ y $m\sphericalangle ACB<45°$. Calcule el mayor valor entero de AB.

A) 3 B) 4 C) 7
D) 5 E) 6

PROBLEMA N°37

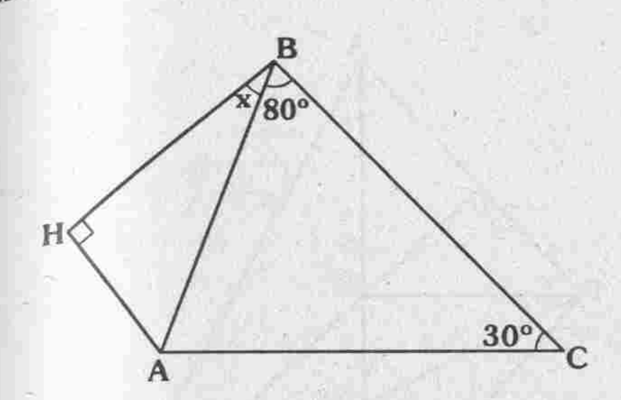
En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AB}$, $AN=BC=5$ y $\beta+\alpha=120°$. Calcule NC.



A) 4 B) 5 C) 6
D) $5\sqrt{3}$ E) 10

PROBLEMA N°38

En el gráfico, $BC=2(BH)$.
Calcule x.



A) 10° B) 20° C) 15°
D) 16° E) 25°

PROBLEMA N°39

En el gráfico, $AM = MC$ y $7(AB) = 4(BC)$, calcule $\frac{DC}{BD}$.

A) 1
B) 2
C) 3
D) $\frac{4}{3}$
E) $\frac{3}{4}$



PROBLEMA N°40

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$, la cual se prolonga hasta E y en $\overline{AD}$ se ubica el punto medio M. Si $\overline{ME} \parallel \overline{BC}$ y $EM = 2$. Calcule AB

A) 4 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) 2,5

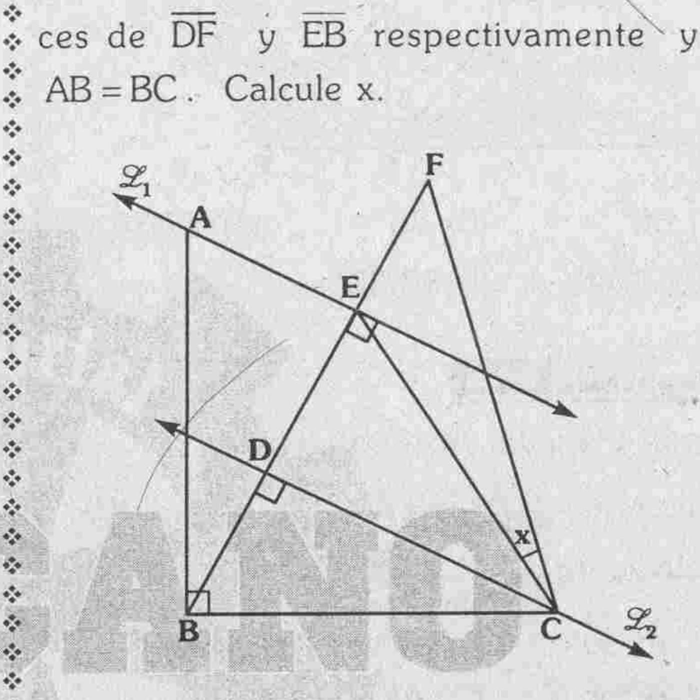
PROBLEMA N°41

En el triángulo rectángulo ABC se traza $\overline{CD}$ perpendicular a la bisectriz del ángulo BAC. Si $BC = 6$, calcule la distancia de D a $\overline{AC}$.

A) 3 B) 6 C) 4,5
D) 1,5 E) 2

PROBLEMA N°42

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son mediatrices de $\overline{DF}$ y $\overline{EB}$ respectivamente y $AB = BC$. Calcule x.

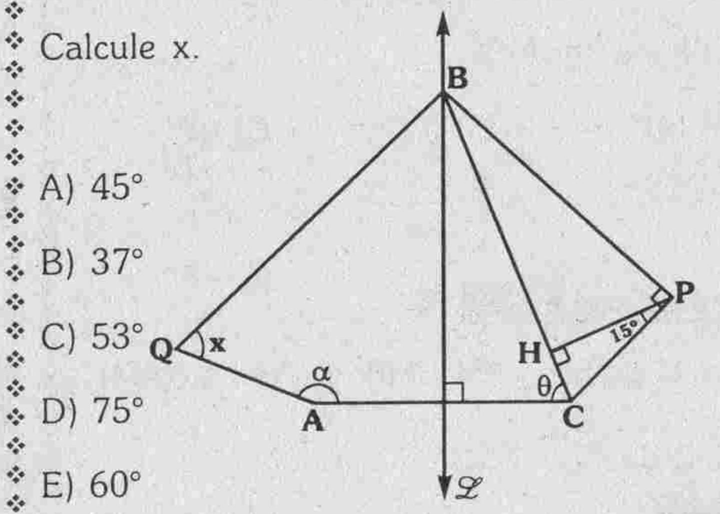


A) 22°30' B) 18°30' C) 26°30'
D) 15° E) 30°

PROBLEMA N°43

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AC}$, $AQ = 3(PH)$ y $\alpha - \theta = 90°$.

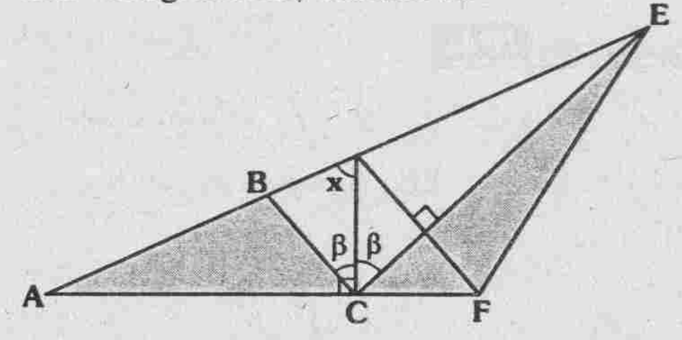
Calcule x.



A) 45°
B) 37°
C) 53°
D) 75°
E) 60°

PROBLEMA Nº44

En el gráfico, los triángulos ABC y ECF son congruentes, calcule x.



A) 60° B) 75° C) 67°30'
D) 63°30' E) 72°30'

PROBLEMA Nº45

En el triángulo ABC se cumple:

$m\sphericalangle ABC = 90° + m\sphericalangle BAC$ y $AC = 3(BC)$

Calcule $m\sphericalangle CAB$

A) 18°30' B) 37° C) 53°
D) 22°30' E) 26°30'

PROBLEMA Nº46

Se tiene el triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la ceviana interior AM y en el triángulo AMC la ceviana interior MN. Si $AM = 4$; $NC = 6$; $m\sphericalangle NMC = 90°$ y $m\sphericalangle BAM = m\sphericalangle MCA$.

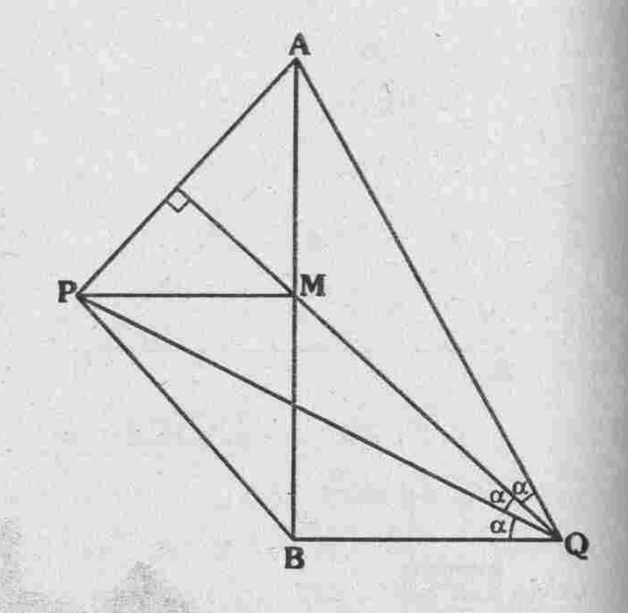
Calcule $m\sphericalangle MAC$.

A) 30° B) 37° C) 60°
D) 15° E) 53°/2

PROBLEMA Nº47

En el gráfico, $AM = MB$ y $PB = \sqrt{2}(AM)$.

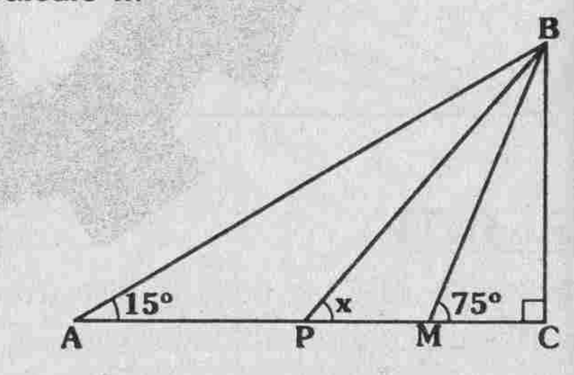
Calcule $\dfrac{BQ}{AP}$



A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) 1
D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ E) 2

PROBLEMA Nº48

En el gráfico, $12(PB) = 5(AC + MC)$.
Calcule x.



A) 37° B) 60° C) 30°
D) 53° E) 45°

PROBLEMA Nº49

En el triángulo ABC $(AB < BC)$, la mediatriz de la bisectriz exterior $\overline{BE}$ interseca a $\overline{AE}$ en F de modo que $AB = FE$ y $FC = 8$.

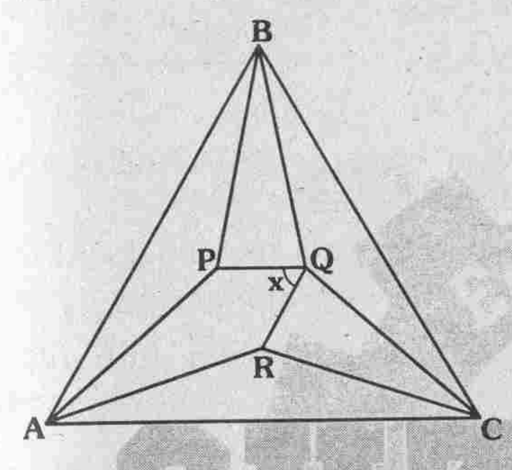
Calcule BC.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 4 E) 12

PROBLEMA N°50

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero. Calcule x, si :

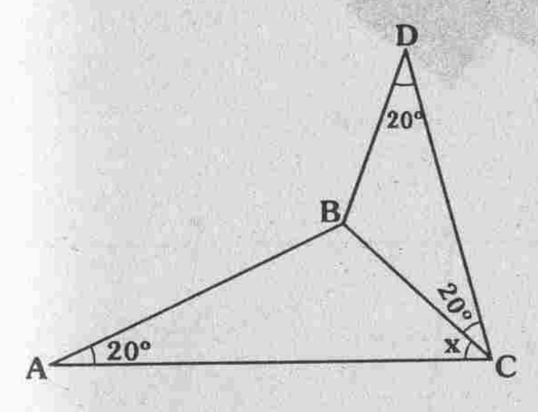
$AP = PB = QC = RA = RC = QB$



A) 60° B) 45° C) 90°
D) 53° E) 75°

PROBLEMA N°51

En el gráfico, $AB = CD$, calcule x.



A) 20° B) 30° C) 40°
D) 35° E) 45°

PROBLEMA N°52

Se tienen los triángulos rectángulos ABC y ADC ambos de hipotenusa $\overline{AC}$, $\overline{AD} \cap \overline{BC} = \{P\}$, Si $m\sphericalangle BAD = 45°$ y $AC = 10$, calcule BD.

A) 5 B) $5\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{2}$
D) 10 E) $10\sqrt{2}$

PROBLEMA N°53

En el triángulo equilátero ABC se ubican M y N en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, tal que $MB = 2$, $NC = 5$ y $m\sphericalangle MNC = 90°$. Calcule CM.

A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{7}$ C) $2\sqrt{13}$
D) $\sqrt{13}$ E) 4

PROBLEMA N°54

Se tiene el triángulo ABC, en el cual se traza la ceviana interior BF, tal que:

$AB = CF$ y

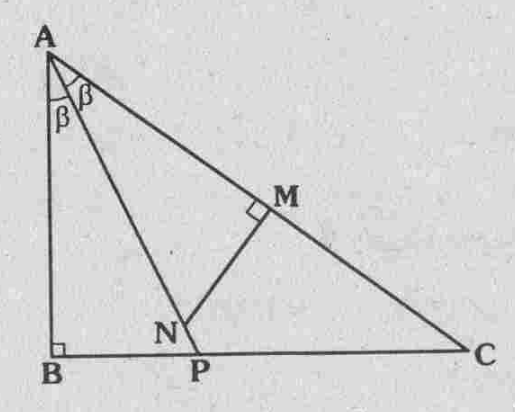
$m\sphericalangle FBC = 2(m\sphericalangle ABF) = 2(m\sphericalangle ACB)$

Calcule $m\sphericalangle ACB$.

A) 30° B) 18° C) 22°30'
D) 26°30' E) 36°

PROBLEMA N°55

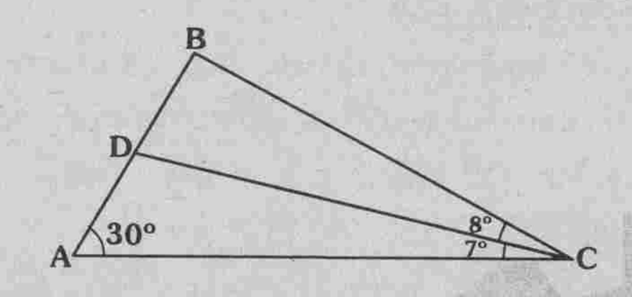
En el gráfico, $AM = MC$ y $PC = 18$. Calcule MN.



A) 6 B) 7 C) 9
D) 4,5 E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA N°56

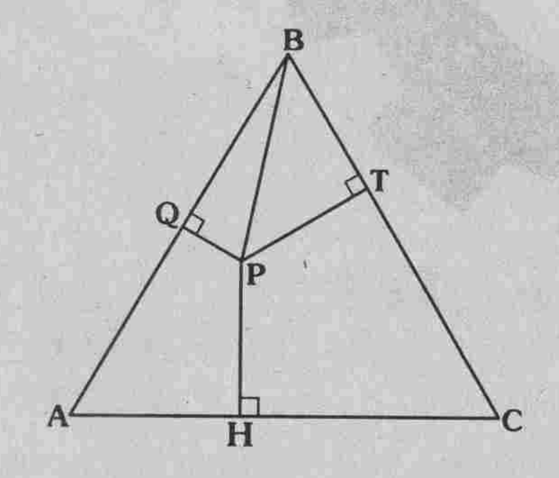
En el gráfico, $AC=12$, calcule BD.



A) 1 B) 2,5 C) 1,5
D) 3 E) 2

PROBLEMA N°57

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, $PH=PB$, $PQ=2$ y $TP=11$. Calcule PH.

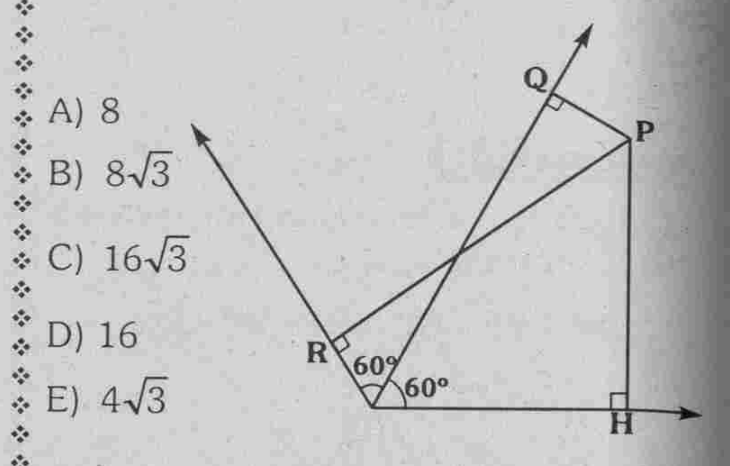


A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 12

PROBLEMA N°58

En el gráfico, $PQ=1$ y $PH=7$.

Calcule PR.



A) 8
B) $8\sqrt{3}$
C) $16\sqrt{3}$
D) 16
E) $4\sqrt{3}$

PROBLEMA N°59

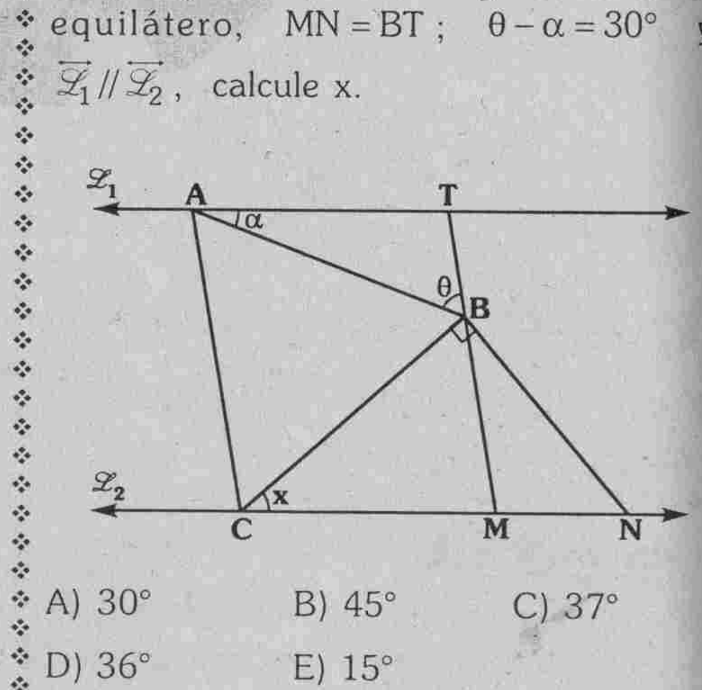
Dado el triángulo rectángulo ABC, recto en B, en la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica D, cumpliéndose que $AC=10$, $DC=3$ y $BD=5$.

Calcule $m\measuredangle BAD$.

A) 30° B) 37° C) 18°30'
D) 26°30' E) 45°

PROBLEMA N°60

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, $MN=BT$; $\theta-\alpha=30°$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$, calcule x.



A) 30° B) 45° C) 37°
D) 36° E) 15°

Problemas Resueltos

Ciclo Cepre-Uni

PROBLEMA N°61 [1er. Seminario 99-I]

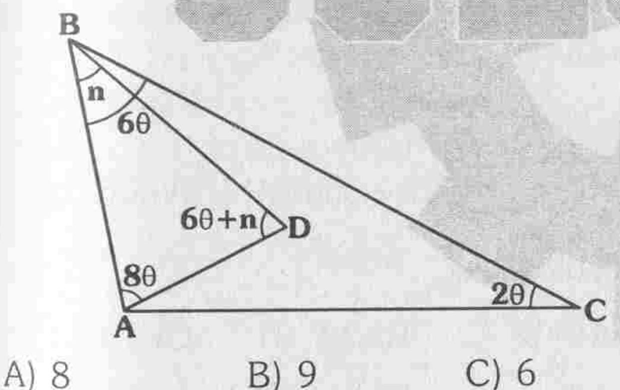
Dado el triángulo ABC, $m\measuredangle B = 80°$, $R \in \overline{AC}$, las mediatrices de $\overline{AR}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en Q, AB = CR y $m\measuredangle BCA = 3(m\measuredangle ACQ)$. Calcule $m\measuredangle ACQ$.

A) 10° B) 12° C) 15°
D) 16° E) 18°

PROBLEMA N°62 [1er. Seminario 99-I]

En el gráfico, AD = 1 y AC = 7

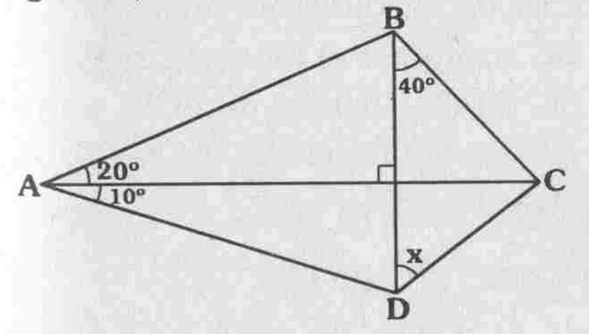
Calcule BC.



A) 8 B) 9 C) 6
D) 11 E) 12

PROBLEMA N°63 [1er. Seminario 99-I]

Del gráfico, calcule x.



A) 81° B) 45° C) 46°
D) 50° E) 60°

PROBLEMA N°64 [1er. Seminario 99-I]

En el triángulo isósceles ABC, se cumple $m\measuredangle ABC = 90°$, se considera el punto Q en su interior, con la condición siguiente:

$$m\measuredangle BAQ = m\measuredangle QBC = m\measuredangle QCA$$

Calcule $m\measuredangle BCQ$.

A) 37° B) 37°/2 C) 53°/2
D) 30° E) 15°

PROBLEMA N°65 [1er. Seminario 99-I]

En el triángulo obtusángulo ABC obtuso en B, el ángulo en B mide 150° y el ángulo en C mide 10°, la distancia de C a la bisectriz interior del ángulo A mide 4. Calcule AB.

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

PROBLEMA N°66 [1er. Seminario 99-I]

Se tiene el triángulo ABC, se traza $\overline{BD}$ ($D \in \overline{AC}$), $E \in \overline{BD}$ tal que:

$$AB = AE = BC$$

$$m\measuredangle BAE = 2(m\measuredangle BCE)$$

Calcule $m\measuredangle BDA$.

A) 50° B) 52° C) 54°
D) 58° E) 60°

PROBLEMA N°67 [1er. Seminario 99-I]

Sea el triángulo rec ngulo ABC recto en B, se construye exteriormente el triángulo equilátero BMC. P y Q son puntos medios de $\overline{BM}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.

Si $AM=8$, calcule PQ.

A) 4 B) 6 C) 2
D) 8 E) 1

PROBLEMA N°68 [1er. Seminario 99-I]

En el triángulo ABC, se cumple:

$$m\measuredangle A = 2(m\measuredangle C) = 30°$$

Se traza la mediana $\overline{BM}$, calcule $m\measuredangle MBC$.

A) 25° B) 15° C) 30°
D) 45° E) 22°50'

PROBLEMA N°69 [1er. Seminario 99-I]

Se tiene el triángulo ABC, $m\measuredangle C=36°$ y $m\measuredangle B=96°$, N y E están en $\overline{AC}$, tal que AN=NE, M es punto medio de $\overline{BC}$ y CE=AB.

Calcule $m\measuredangle MNC$.

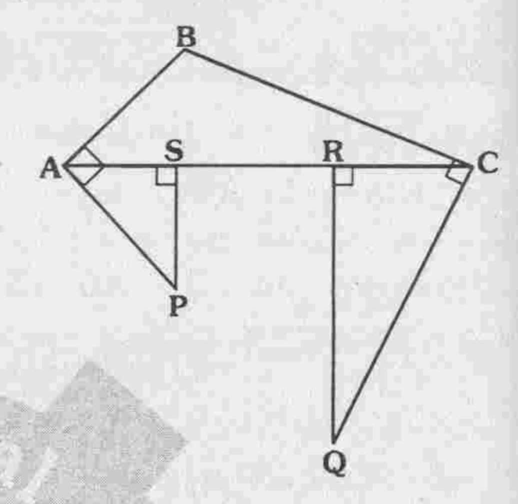
A) 24° B) 26° C) 20°
D) 30° E) 32°

PROBLEMA N°70 [1er. Seminario 99-I]

Dado el ángulo AOB y el punto exterior P, se trazan $\overline{PE}$ y $\overline{PF}$ por perpendiculares a los lados del ángulo, demostrar que la recta que une los puntos medios de $\overline{OP}$ y $\overline{EF}$ es perpendicular a $\overline{EF}$.

PROBLEMA N°71 [1er. Seminario 98-II]

En el gráfico, $AB=AP$, $BC=QC$, $PS=3$ y $RQ=5$. Calcule AC.



A) 6 B) 10 C) 8
D) 9 E) 10,5

PROBLEMA N°72 [1er. Seminario 98-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana BD, tal que:

$$AB=DC \quad y$$

$$2(m\measuredangle ABD)=5(m\measuredangle A)=10(m\measuredangle C)$$

Calcule $m\measuredangle C$.

A) 10° B) 20° C) 12°
D) 18° E) 36°

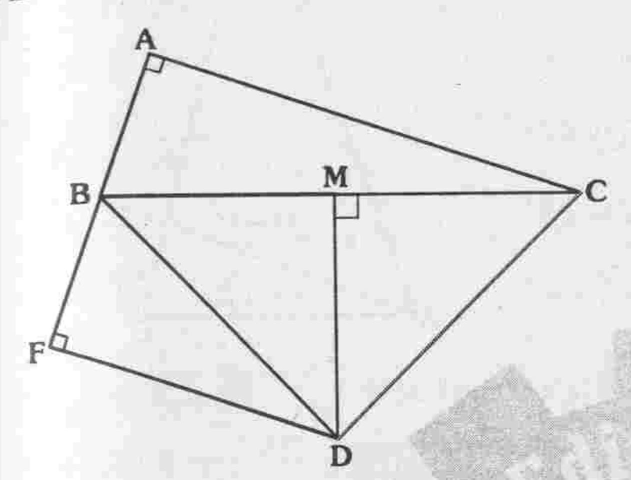
PROBLEMA N°73 [1er. Seminario 98-II]

Por el vértice B del triángulo ABC se trazan las perpendiculares $\overline{BA'}$ a $\overline{BA}$ y $\overline{BC'}$ a $\overline{BC}$ exteriores al triángulo, si $BA'=BA$ y $BC'=BC$. Calcule $m\measuredangle AOC$, siendo O el punto de intersección de $\overline{A'C}$ y $\overline{AC'}$.

A) 45° B) 60° C) 90°
D) 120° E) 135°

PROBLEMA Nº74 [1er. Seminario 98-II]

En el gráfico, $BM = MC = MD$. Si $AB = 10$ y $DF = 14$, calcule AC.



A) 24 B) 18 C) 22
D) 30 E) 28

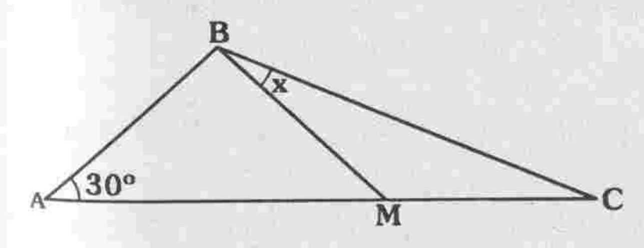
PROBLEMA Nº75 [1er. Seminario 98-II]

En el triángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior BD y la mediatriz de $\overline{AD}$, la cual corta a la bisectriz del ángulo BDE en F (E es el punto de intersección de la mediatriz trazada con $\overline{AB}$).
Si $m\measuredangle CBD = \theta$. Calcule $m\measuredangle DFE$.

A) $45° - \theta$ B) $\theta/2$ C) $90° - \theta/2$
D) $45° + \theta/2$ E) $45° - \theta/2$

PROBLEMA Nº76 [1er. Seminario 98-II]

En el gráfico, $BC = AM$ y $BM = MC$
Calcule x.



A) 20° B) 30° C) 40°
D) 15° E) 18°

PROBLEMA Nº77 [1er. Seminario 98-II]

Dado el triángulo ABC, $m\measuredangle B = \beta > 90°$, $m\measuredangle C = \alpha$, $P \in \overline{AC}$, $AB = CP$, las mediatrices de $\overline{AP}$ y $\overline{BC}$ se cortan en R. Calcule $m\measuredangle ACR$.

A) $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ B) $\beta - \alpha$
C) $\beta - 2\alpha$ D) $\dfrac{\beta - 2\alpha}{2}$
E) $\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

PROBLEMA Nº78 [1er. Seminario 98-II]

Dado una recta y tres puntos consecutivos sobre ella A, B y C, se construyen dos triángulos equiláteros ABE y BFC a un mismo lado de la recta AE. Sean M y N los puntos medios de $\overline{AF}$ y $\overline{EC}$.

Demostrar que el triángulo MNB es equilátero.

PROBLEMA Nº79 [1er. Seminario 98-II]

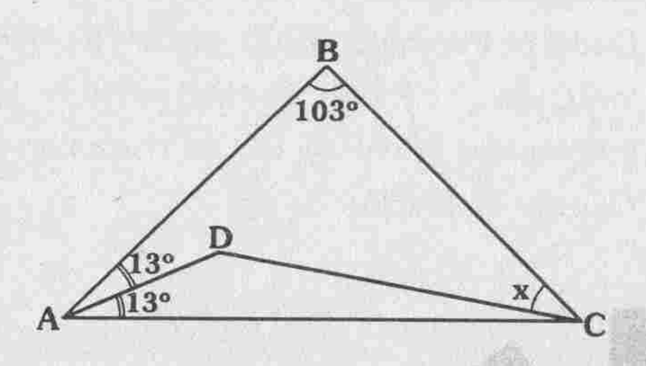
En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, $m\measuredangle C = 15°$. Sobre $\overline{BC}$ se ubica un punto cuyas distancias a la hipotenusa y a la mediana relativa a la hipotenusa miden "a" y "b".
Calcule la longitud de la hipotenusa.

A) $a+b$ B) $2(a+b)$
C) $4(a+b)$ D) $4\sqrt{a^2+b^2}$
E) $\sqrt{a^2+b^2}$

PROBLEMA N°80 [1er. Seminario 97-I]

En el gráfico, $BC = CD$.

Calcule x.



A) 30° B) 45° C) 36°
D) 40° E) 34°

PROBLEMA N°81 [1er. Seminario 2008-I]

En un triángulo ABC, $m\sphericalangle ABC = 45°$ y $m\sphericalangle ACB = 30°$. Si M es punto medio de $\overline{AC}$, entonces la $m\sphericalangle ABM$ es:

A) 22,5° B) 30° C) 36°
D) 37° E) 45°

PROBLEMA N°82 [1er. Seminario 2007-II]

En un triángulo ABC, $(AB < BC)$ se traza la altura BH y la mediana BM de modo que el ángulo B quede trisecado. Entonces, la $m\sphericalangle BCA$ es:

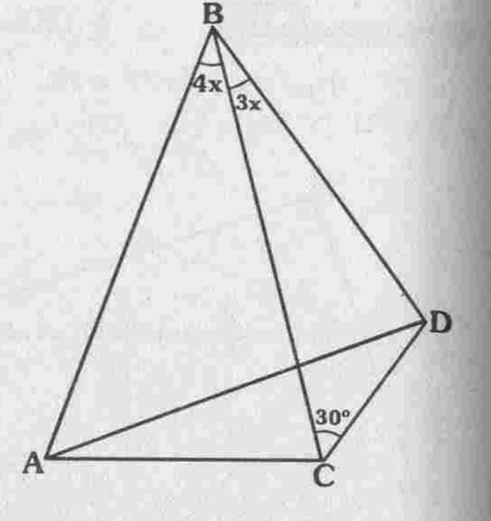
A) 15° B) 22,5° C) 28°
D) 30° E) 35°

PROBLEMA N°83 [1er. Seminario 97-I]

En el gráfico:

$AB = BC$ y $AD = BD$

Calcule $m\sphericalangle ABC$.

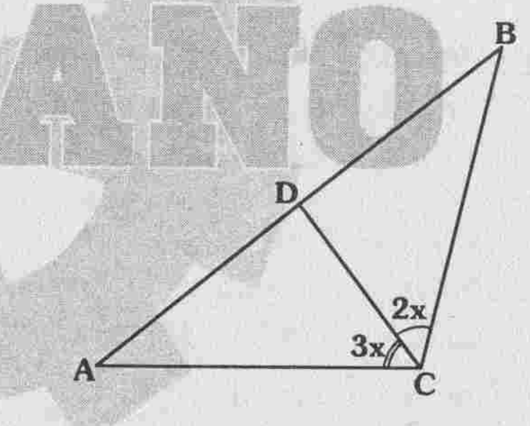


A) 18°
B) 20°
C) 66°
D) 24°
E) 26°

PROBLEMA N°84 [1er. Seminario 97-I]

En el gráfico, $AD = DB$ y $BC = 2(CD)$.

Calcule x.



A) 15° B) 18° C) 22,5°
D) 10° E) 30°

PROBLEMA N°85 [1er. Seminario 2006-I]

En un triángulo ABC, $AB < BC$, $AB = k_1$, la mediatriz de AC interseca a la bisectriz exterior del ángulo B en T. Se traza $\overline{TH}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{AB}$, si $BH = k_2$. Halle BC.

A) $3k_1 + k_2$ B) $k_1 + \frac{k_2}{2}$ C) $k_1 + 2k_2$
D) $2k_1 + k_2$ E) $k_1 + k_2$

PROBLEMA Nº86 [1er. Seminario 97-I]

En el triángulo acutángulo ABC sobre $\overline{BC}$ se ubica E de modo que $AB = EC$. Si $m\measuredangle ABC = 60°$ y $AB = 18$. Calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{BC}$.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 14

PROBLEMA Nº87 [1er. Seminario 97-I]

En el triángulo ABC, se cumple $AB = c$; $BC = a$; $AC = b$ y p es el semiperímetro, se trazan desde A perpendiculares a las bisectrices de los ángulos interiores en B y C. Calcule la longitud del segmento que une los pies de las perpendiculares.

A) p B) $a-b$ C) $(b+c)/2$
D) $p-a$ E) $p-b$

PROBLEMA Nº88 [Texto CEPRE - UNI]

Desde un punto P interior a un triángulo equilátero ABC, se trazan las perpendiculares $\overline{PD}$, $\overline{PE}$ y $\overline{PF}$ a los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.

Hallar $\dfrac{PD+PE+PF}{BD+CE+AF}$.

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) 1/2
D) 1 E) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

PROBLEMA Nº89 [1er. Seminario 97-I]

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BE}$ de modo que $\overline{AE} \cong \overline{BC}$ y $m\measuredangle BAC = m\measuredangle AEB = 3(m\measuredangle EBC)$. Calcule $m\measuredangle ABE$.

A) 90° B) 120° C) 75°
D) 60° E) 150°

PROBLEMA Nº90 [1er. Seminario 97-I]

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), exterior a $\overline{AC}$ se ubica M de modo que $m\measuredangle ACM = m\measuredangle ACB$,

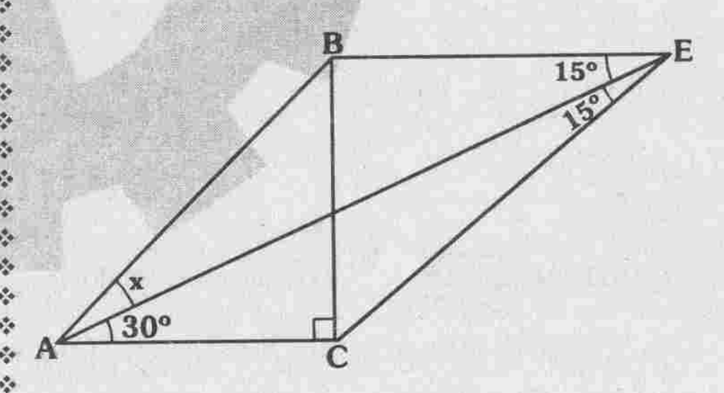
$m\measuredangle MAC = 2(m\measuredangle ACM)$ y
$m\measuredangle MBC = 3(m\measuredangle ACB)$.

Calcule $m\measuredangle ACM$.

A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 18,5°

PROBLEMA Nº91 [1er. Seminario 2005-II]

En el gráfico, calcule x.



A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 30°

PROBLEMA Nº92 [1er. Seminario 2005-II]

Dado el triángulo ABC, obtuso en B, por B se traza $\overline{QB} \perp \overline{BC}$, $Q \in \overline{AC}$. Si $AB = a$ y $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BCA)$.

Calcule QC.

A) a B) $\frac{a}{2}$ C) 2a

D) 3a E) $\frac{a}{3}$

PROBLEMA Nº93 [1er. Seminario 2006-II]

En el triángulo rectángulo ABC, se traza la mediana BM, relativa a la hipotenusa, la mediatriz de $\overline{BM}$ interseca a $\overline{MC}$ en F, si $\overline{BC} \cong \overline{MF}$, halle $m\sphericalangle BAC$.

A) 10° B) 12° C) 15°

D) 18° E) 21°

PROBLEMA Nº94 [1er. Seminario 2001-II]

En el triángulo rectángulo MNP recto en N, se traza la bisectriz interior NQ ($Q \in \overline{MP}$), por Q se traza una perpendicular a $\overline{MP}$ intersectando a la prolongación del cateto MN en T. Si $m\sphericalangle NPM = \phi$, halle $m\sphericalangle NTP$.

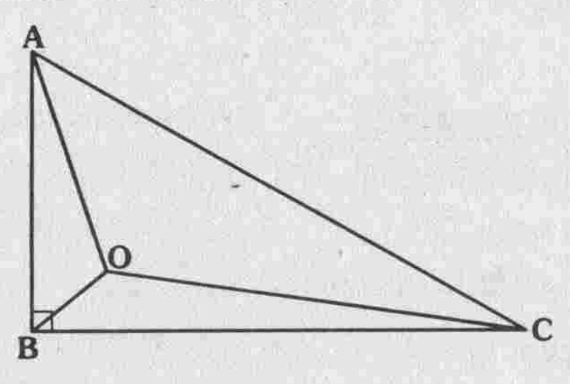
A) 45° B) 60° C) $\phi + 45°$

D) $\phi + 30°$ E) $\phi + 15°$

PROBLEMA Nº95 [1er. Seminario 2001-I]

En el gráfico, $m\sphericalangle OBC = 3(m\sphericalangle BCO)$, $m\sphericalangle OAC = 2(m\sphericalangle BCO)$ y $m\sphericalangle BAO = m\sphericalangle OCB$

Calcule $m\sphericalangle OCB$.



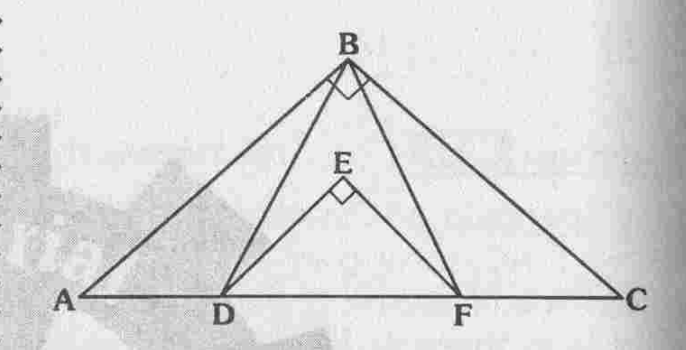
A) 5° B) 9° C) 15°

D) 18° E) 20°

PROBLEMA Nº96 [1er. Seminario 2005-II]

En el gráfico, $AB = BC$; $AD = DE$; $EF = FC$.

Calculemos $m\sphericalangle DBF$.



A) 75° B) 60° C) 53°

D) 45° E) 30°

PROBLEMA Nº97 [1er. Seminario 2001-I]

En el triángulo ABC, donde $m\sphericalangle BAC = 90°$, se traza la ceviana $\overline{AP}$ y resulta que:

$$m\sphericalangle PAC = 36° \quad y \quad m\sphericalangle APB = 84°$$

Si $BC = \ell$, calcule AP.

A) $\ell/3$ B) $2\ell/3$ C) $\ell/2$

D) $\ell/4$ E) $2\ell/5$

PROBLEMA Nº98 [1er. Seminario 2005-II]

Dado el triángulo ABC, recto en A, se ubica D en $\overline{BC}$, tal que $AB = CD$, $m\sphericalangle ABD = 3\theta$ y $m\sphericalangle DAC = \frac{9\theta}{2}$. Halle θ.

A) 5° B) 15° C) 18°

D) 22,5° E) 27°

PROBLEMA N°99 [1er. Seminario 2001-I]

En el triángulo ABC (recto en A), $\overline{AM}$ es mediana, $\overline{BN}$ es ceviana interior, $\measuredangle BCN \cong \measuredangle CBN$ y $m\measuredangle ABN = 38°$. Si L es punto medio de $\overline{BN}$. Calcule $m\measuredangle LAM$.

A) 38° B) 26° C) 13°
D) 27° E) 52°

PROBLEMA N°100 [1er. Seminario 2001-I]

En el triángulo ABC (recto en B), se tiene $m\measuredangle A = 2(m\measuredangle AMB)$, M es punto medio de $\overline{BC}$ y $AC = 22cm$. Calcule AB

A) 10 cm B) 16cm C) 12cm
D) $\frac{22}{3}$ cm E) 14cm

PROBLEMA N°101 [1er. Seminario 2001-I]

En un triángulo ABC se traza la ceviana BP ($P \in \overline{AC}$). Si $AB = CP$; $m\measuredangle PBC = 5\alpha$; $m\measuredangle BAC = 4\alpha$ y $m\measuredangle BCA = 3\alpha$.
Calcule $m\measuredangle PBC$.

A) 40° B) 30° C) 50°
D) 45° E) 65°

PROBLEMA N°102 [1er. Seminario 2001-I]

En el triángulo ABC, se cumple $m\measuredangle A = \alpha$. Se traza la bisectriz interior BP y la mediatriz de $\overline{BP}$, la cual corta a la prolongación de $\overline{AC}$ en Q. Calcule $m\measuredangle QBC$.

A) α B) $\frac{\alpha}{2}$ C) $\frac{\alpha}{3}$
D) $\frac{3\alpha}{2}$ E) $\frac{2\alpha}{3}$

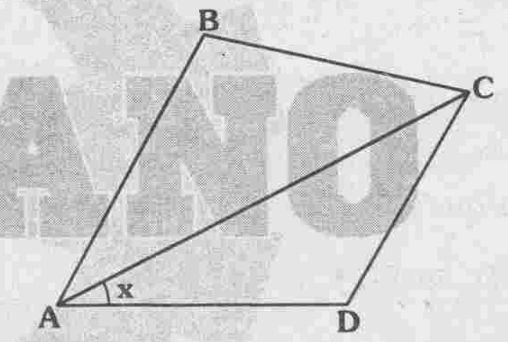
PROBLEMA N°103

El ángulo interior de B del triángulo ABC mide 72°, Las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en L y a $\overline{AC}$ lo intersecan en E y F respectivamente.
Calcule $m\measuredangle FBE$.

A) 12° B) 17° C) 9°
D) 36° E) 19°

PROBLEMA N°104 [1er. Seminario 2001-I]

En el gráfico, $AB = AD$, $m\measuredangle BAC = 57°$, $m\measuredangle BCA = 22°$ y $m\measuredangle ACD = 11°$.
Calcule x.



A) 15° B) 16° C) 19°
D) 22° E) 27°

PROBLEMA N°105 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BD, de modo que $BD = AC$, $m\measuredangle BAC = 100°$ y $m\measuredangle BCA = 30°$.
Calcule $m\measuredangle DBC$.

A) 9° B) 10° C) 12°
D) 15° E) 20°

PROBLEMA N°106 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo MNP se traza la ceviana interior NQ, tal que $\overline{MN} \cong \overline{QP}$.

Si $\frac{m\measuredangle MNQ}{7} = \frac{m\measuredangle NPQ}{2} = m\measuredangle QNP$

Calcule $m\measuredangle NPM$.

A) 8° B) 10° C) 20°
D) 25° E) 30°

PROBLEMA N°107 [1er. Seminario 2007-II]

ABC es un triángulo escaleno, se ubica el punto interior D, de modo que $\overline{AD} \cong \overline{DC} \cong \overline{BC}$. Si $m\measuredangle BCD = 2(m\measuredangle BAD)$

Calcule $m\measuredangle BAD + m\measuredangle ABC$.

A) 90° B) 95° C) 100°
D) 110° E) 120°

PROBLEMA N°108 [1er. Seminario 2007-II]

En el interior del triángulo ABC, se ubica D, tal que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$,

$\frac{m\measuredangle BAD}{9} = \frac{m\measuredangle DCA}{3} = \frac{m\measuredangle DCB}{4} = m\measuredangle DBC = m\measuredangle DAC$

Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 60° B) 70° C) 75°
D) 80° E) 88°

PROBLEMA N°109 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BD, tal que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$.

Si $m\measuredangle ACB = 4x$, $m\measuredangle ABD = x$ y

$m\measuredangle DBC = 2x$, entonces x es:

A) 12° B) 14° C) 15°
D) 18° E) 21°

PROBLEMA N°110 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC (AB<BC) se ubica P en $\overline{AB}$ y Q en $\overline{BC}$, tal que $\overline{PB} \cong \overline{QC}$, las mediatrices en F, entonces BF es:

A) Perpendicular a $\overline{PQ}$.
B) Perpendicular a $\overline{AC}$.
C) Pasa por el punto medio de $\overline{AC}$.
D) Bisectriz del ángulo ABC.
E) Mediatriz de $\overline{PQ}$.

PROBLEMA N°111 [1er. Seminario 2007-II]

ABC es un triángulo rectángulo isósceles (AB = BC), se ubica el punto interior D, de modo que $m\measuredangle BAD = m\measuredangle DCA$ y $\overline{AD} \perp \overline{BD}$. Si BD = 4, entonces $\overline{DC}$ mide:

A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) 4
D) $4\sqrt{2}$ E) 5

PROBLEMA N°112 [1er. Seminario 2007-II]

Exteriormente al triángulo rectángulo ABC (recto en B) y relativo a $\overline{BC}$, se ubica D.

Si AB = n y

$m\measuredangle DAC = m\measuredangle BCA = m\measuredangle DCB = 15°$

entonces $\overline{CD}$ mide:

A) $n\sqrt{2}$ B) $n\sqrt{3}$ C) $n\sqrt{5}$
D) $n\sqrt{6}$ E) $n\sqrt{7}$

PROBLEMA N°113 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, se traza la mediana BM.

Si $m\measuredangle ACB = 30°$ y

$m\measuredangle MBA = 2(m\measuredangle BAC)$

entonces $m\measuredangle ABM$ es:

A) 20° B) 25° C) 12°

D) 35° E) 15°

PROBLEMA N°114 [1er. Seminario 2007-II]

Sea el triángulo isósceles ABC (AB = BC), en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos P, Q y H respectivamente, tal que $BP = BQ$; $m\measuredangle QHC = 40°$ y $HA = HQ + HC$. Calcule $m\measuredangle PHA$.

A) 10° B) 20° C) 30°

D) 40° E) 50°

PROBLEMA N°115 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo isósceles ABC, donde $AB = BC$ y $m\measuredangle ABC = 40°$. En el interior se ubica Q tal que:

$$QB = AC \quad y \quad m\measuredangle ABQ = 10°$$

Calcule $m\measuredangle QAB$

A) 15° B) 18° C) 20°

D) 24° E) 16°

PROBLEMA N°116 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, se trazan las alturas BH y CQ. M es punto medio de $\overline{BC}$. Si $m\measuredangle BAC = \omega$, entonces $m\measuredangle HMQ$ es:

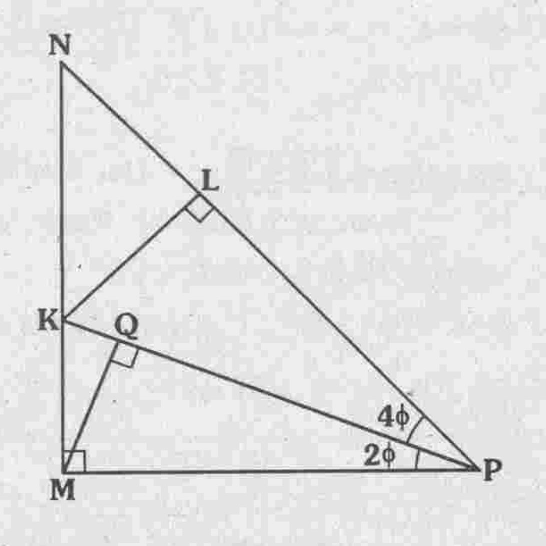
A) $90° - \frac{\omega}{3}$ B) $90° + \frac{\omega}{2}$

C) $180° - 2\omega$ D) $90° - \frac{\omega}{2}$

E) $180° - 3\omega$

PROBLEMA N°117 [1er. Seminario 2007-II]

En el gráfico, $KL = \ell$ entonces QM es:



A) $\frac{3}{4}\ell$

B) $\frac{2}{3}\ell$

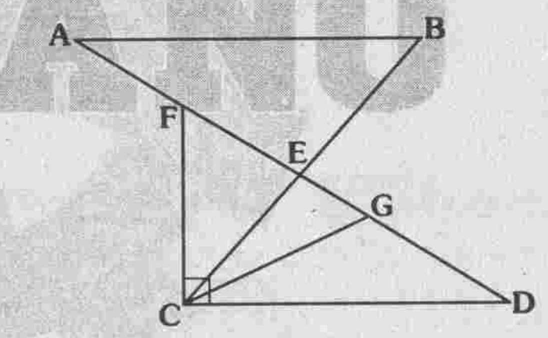
C) $\frac{1}{2}\ell$

D) $\frac{1}{3}\ell$

E) $\frac{1}{4}\ell$

PROBLEMA N°118 [1er. Seminario 2007-II]

En el gráfico, $\overline{AB} // \overline{CD}$ y E es punto medio de $\overline{BC}$. Si $AF = m$, $FE = n$ y G es punto medio de $\overline{FD}$, entonces $\overline{GC}$ mide:



A) $\frac{m}{2} + 3n$ B) $\frac{m}{2} + n$ C) $\frac{n-m}{2}$

D) $\frac{n+m}{3}$ E) $2m + \frac{m}{3}$

PROBLEMA N°119 [1er. Seminario 2009-II]

Se tiene el triángulo isósceles ABC (AB=BC), se ubica P en la región interior, tal que:

$$CP = AB, \; m\measuredangle PAC = x, \; m\measuredangle PAB = \theta$$
$$y \; m\measuredangle APC = 4x + \theta$$

Calcule x.

A) 30° B) 12° C) 15°
D) 18,5° E) 22,5°

PROBLEMA N°120 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BM. Si $m\sphericalangle A = 20°$ y $m\sphericalangle C = 80°$ $AM = BM + BC$. Calcule $m\sphericalangle ABM$.

A) 30° B) 40° C) 45°
D) 50° E) 60°

PROBLEMA N°121 [1er. Seminario 2007-II]

Se tienen los triángulos ABC y ADC $(AB \cap DC = \{Q\})$, $m\sphericalangle BCD = 20°$, $m\sphericalangle DAC = m\sphericalangle ACD = 40°$ y $AC = AD + BC$
Calcule $m\sphericalangle AQC$.

A) 100° B) 110° C) 115°
D) 120° E) 130°

PROBLEMA N°122 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BQ}$.

Si: $m\sphericalangle A = 2(m\sphericalangle ABQ)$ y

$m\sphericalangle C - m\sphericalangle ABQ = 90°$

Calcule $m\sphericalangle BQC$.

A) 15° B) 45° C) 25°
D) 30° E) 35°

PROBLEMA N°123 [1ra. P. Calificada 2007-I]

Se tiene el triángulo escaleno ABC, se traza la bisectriz del ángulo ABC y la mediatriz de $\overline{AC}$ que se intersecan en Q. Calcule $m\sphericalangle ACQ$ en función del ángulo en B del triángulo ABC.

A) $\frac{2}{3}m\sphericalangle B$ B) $m\sphericalangle B$ C) $\frac{1}{2}m\sphericalangle B$
D) $\frac{1}{4}m\sphericalangle B$ E) $\frac{1}{3}m\sphericalangle B$

PROBLEMA N°124 [1ra. P. Calificada 2007-I]

En el triángulo ABC, las bisectrices de los ángulos ABC y BCA se intersecan en Q. Sea:

$$\frac{m\sphericalangle BAC}{3} = \frac{m\sphericalangle BCA}{2}$$

y $\overline{QC} \cong \overline{AB}$

Calcule $m\sphericalangle ABC$.

A) 50° B) 60° C) 75°
D) 80° E) 90°

PROBLEMA N°125 [1ra. P. Calificada 2006-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BQ de manera que $QC = AB$ y

$$\frac{m\sphericalangle QBC}{4} = \frac{m\sphericalangle QBA}{3} = m\sphericalangle BCA.$$

Calcule $m\sphericalangle BAC$.

A) 17° B) 18° C) 19°
D) 20° E) 21°

PROBLEMA N°126 [1ra. P. Calificada 2006-I]

Es verdadero

I. Dos triángulos son congruentes, si tienen sus respectivos lados congruentes dos a dos.

II. Dos triángulos son congruentes si tienen sus respectivos lados iguales dos a dos.

III. Dos triángulos con congruentes, si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman iguales dos a dos.

IV. Dos triángulos son congruentes, si tienen un ángulo congruente y los lados que lo determinan respectivamente congruentes dos a dos.

A) I y III B) I y IV

C) I, II, III y IV D) II

E) IV

PROBLEMA N°127 [1ra. P. Calificada 2006-I]

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, la altura BF que interseca a la hipotenusa AC interseca a la bisectriz interior AP en E, se traza $\overline{EQ}$ paralelo a $\overline{AC}$, donde Q pertenece a $\overline{BC}$. Entonces se puede afirmar que:

A) $QC=\frac{1}{2}(BP)$ B) $QC=BP$

C) $QC=\frac{3}{2}(BP)$ D) $QC=2(BP)$

E) $QC=\frac{5}{2}(BP)$

PROBLEMA N°128 [1ra. P. Calificada 2004-II]

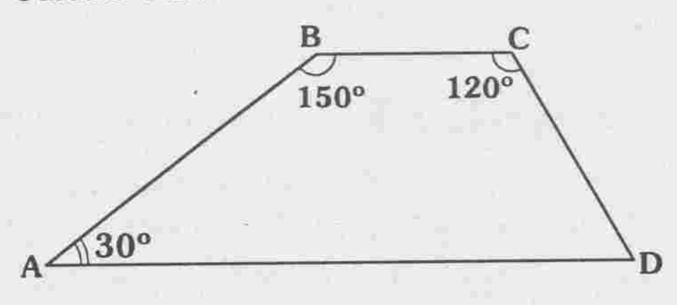
En el triángulo ABC, la distancia del punto medio de $\overline{BC}$ a $\overline{AC}$ mide 2μ. Si $AB=8\mu$ y $m\measuredangle BAC=2(m\measuredangle ACB)$, entonces $m\measuredangle ABC$ es:

A) 150° B) 135° C) 120°

D) 90° E) 75°

PROBLEMA N°129 [1er. E. Parcial 2003-II]

En el gráfico $AB=24\sqrt{3}$ y $BC=16$, Calcule AD.



A) 52 B) 64 C) $32\sqrt{3}$

D) $32\sqrt{2}$ E) $64\sqrt{3}$

PROBLEMA N°130 [1er. Seminario 2001-II]

En el interior del triángulo ABC se ubica P tal que $AB=PC$, $AP=8$ $m\measuredangle ABP=2(m\measuredangle BAP)$; $m\measuredangle BAP=m\measuredangle ACP$ y $m\measuredangle APC=5(m\measuredangle ACP)$. Calcule AC

A) 12 B) 14 C) 16

D) 20 E) 24

PROBLEMA N°131 [1er. Seminario 2001-II]

En el triángulo ABC, $AB=5$ y $BC=8$. La mediatriz de $\overline{AC}$ interseca a la bisectriz exterior del ángulo trazado desde B en F, luego se traza $\overline{FH}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{AB}$. Calcule BH.

A) 3 B) 1,5 C) 3,5

D) 4 E) 8

PROBLEMA N°132 [1er. Seminario 2007-II]

En un triángulo acutángulo ABC, se ubica el punto exterior D relativo a $\overline{BC}$, tal que $AB=BC=CD$.

Si $m\sphericalangle ABC = 2(m\sphericalangle ABC)$, entonces $m\sphericalangle DAC$ es:

A) 15° B) 18° C) 22,5°
D) 30° E) 36°

PROBLEMA Nº133 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, las bisectrices interiores trazadas desde A y C se intersecan en D. Si $AD = BC$ y $m\sphericalangle DCA = 2(m\sphericalangle DAC)$. Calcule $m\sphericalangle ABC$.

A) 60° B) 80° C) 55°
D) 65° E) 70°

PROBLEMA Nº134 [1er. Seminario 2005-II]

Dado el triángulo ABC, sobre $\overline{AC}$ se tiene el punto F de modo que $AF = 3(FC)$. En el triángulo ABF se traza la mediana AM cuya prolongación interseca a $\overline{BC}$ en N. Si $AM = 17cm$. Halle MN.

A) 1cm B) 2cm C) $\frac{3}{2}$cm
D) $\left(\frac{9}{5}\right)$cm E) $\left(\frac{17}{7}\right)$cm

PROBLEMA Nº135 [1er. Seminario 2007-II]

En un triángulo ABC, en el interior se ubica el punto Q. Si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, $\overline{AQ} \cong \overline{QB}$,

$m\sphericalangle QAB = m\sphericalangle QCA$ y

$m\sphericalangle QBC = 5(m\sphericalangle QAB)$

Entonces $m\sphericalangle BQC$ es :

A) 60° B) 65° C) 80°
D) 75° E) 70°

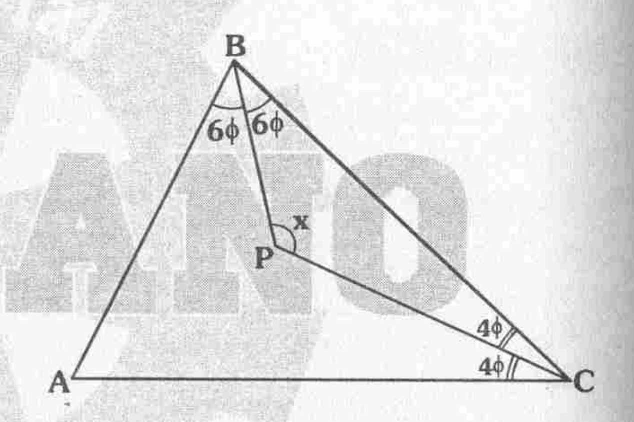
PROBLEMA Nº136 [1er. Seminario 1999-II]

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la mediana BM y se ubica Q punto medio de $\overline{BM}$, la prolongación de $\overline{CQ}$ interseca a $\overline{AB}$ en F. Si $CQ = 12$. Calcule FM.

A) 6 B) 8 C) 19
D) 10 E) 12

PROBLEMA Nº137 [1er. Seminario 2008-I]

En el gráfico $AB = PC$, calcule x.



A) 100° B) 110° C) 120°
D) 130° E) 140°

PROBLEMA Nº138 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo MNP, obtuso en N, se cumple $m\sphericalangle N = \phi$, se construyen los triángulos equiláteros MPK y NPQ de modo que N, Q y K se encuentran en el mismo semiplano respecto de $\overleftrightarrow{MP}$.

Halle $m\sphericalangle KQN$.

A) $2\phi - 30°$ B) $\phi - 30°$
C) $\phi - 60°$ D) $2\phi - 60°$
E) $\phi - 120°$

PROBLEMA Nº139 [1er. Seminario 2007-I]

En el triángulo ABC obtusángulo ($m\sphericalangle B > 90°$), se traza la mediana $\overline{BM}$, si $m\sphericalangle A = 2(m\sphericalangle C) = m\sphericalangle MBC$.

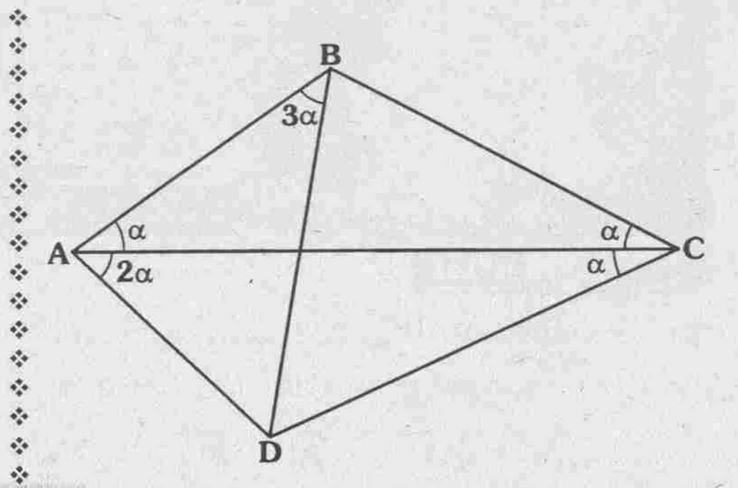
Calcule $m\sphericalangle MBC$.

A) 40° B) 30° C) 15°

D) 10° E) 5°

PROBLEMA Nº140 [Ciclo Repaso 2007-I]

En la figura se indica los valores de los ángulos. Halle el valor de α.



A) 10° B) 12° C) 15°

D) 18° E) 20°



PROBLEMA N°141

En el triángulo ABC, se trazan la mediana AD y la ceviana interior BQ, tal que:

$$\overline{AD} \cong \overline{BQ} \quad y \quad \overline{AD} \perp \overline{BQ}$$

Calcule $m\measuredangle DAC$.

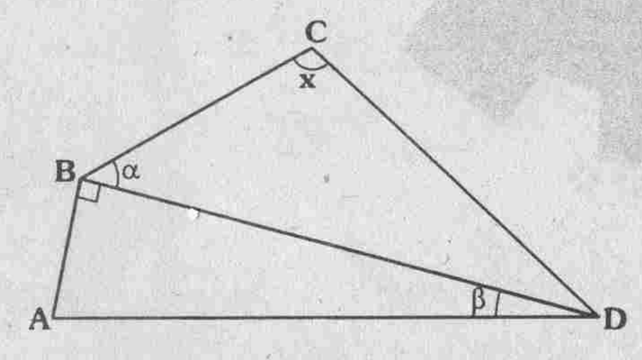
A) 30° B) 45° C) 60°
D) $\frac{53°}{2}$ E) 37°

PROBLEMA N°142

En el gráfico:

$$\alpha + \beta = 60° \quad y \quad \frac{AD}{2} = \frac{CD}{\sqrt{2}} = BC$$

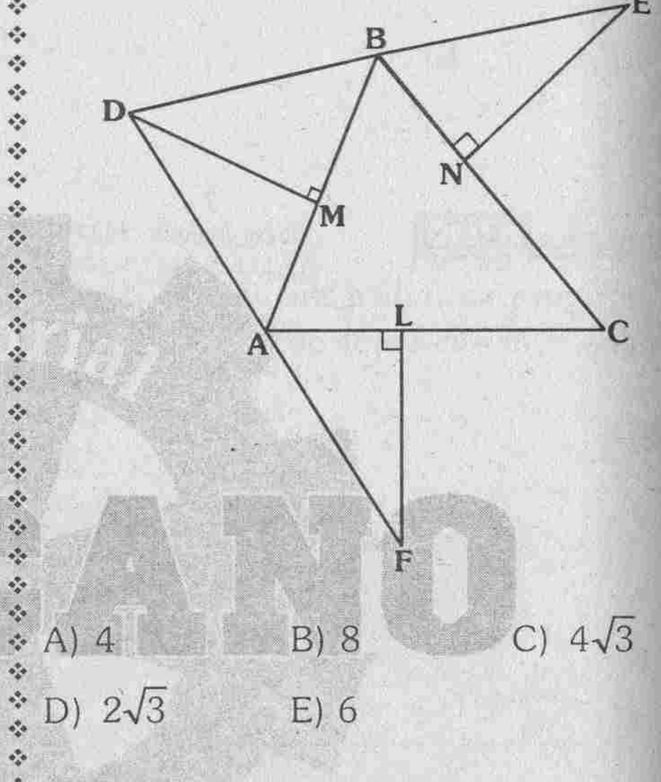
Calcule x.



A) 90° B) 106° C) 105°
D) 115° E) 130°

PROBLEMA N°143

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, DB = BE, DA = AF y $FL + EN - MD = 4\sqrt{3}$. Calcule AB.

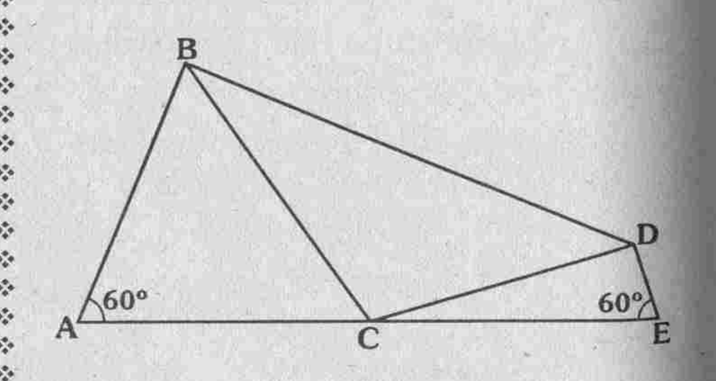


A) 4 B) 8 C) $4\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$ E) 6

PROBLEMA N°144

En el gráfico, AC = CE = AB + DE y $BC = \ell$.

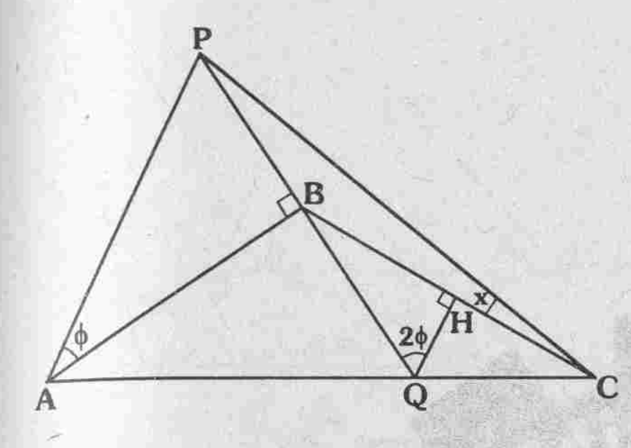
Halle BD.



A) ℓ B) 2ℓ C) 3ℓ
D) $\ell\sqrt{3}$ E) $2\ell\sqrt{3}$

PROBLEMA N°145

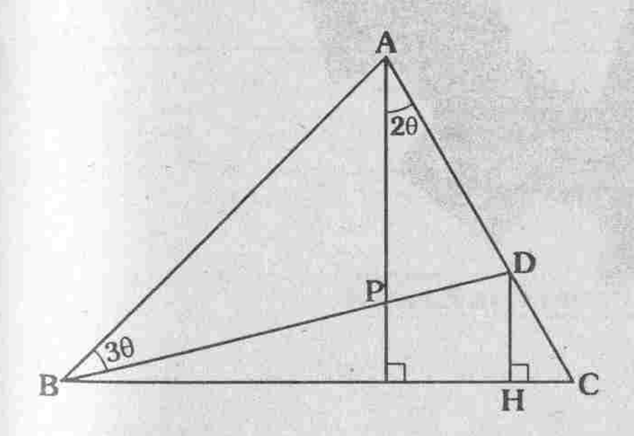
En el gráfico $AB=BC$, $PC=25$ y $QH=7$. Calcule x.



A) 8° B) 16° C) 14°
D) 30° E) 37°

PROBLEMA N°146

En el gráfico, $CD=3$, $AP=7$ y $AB=BC$. Calcule HC.

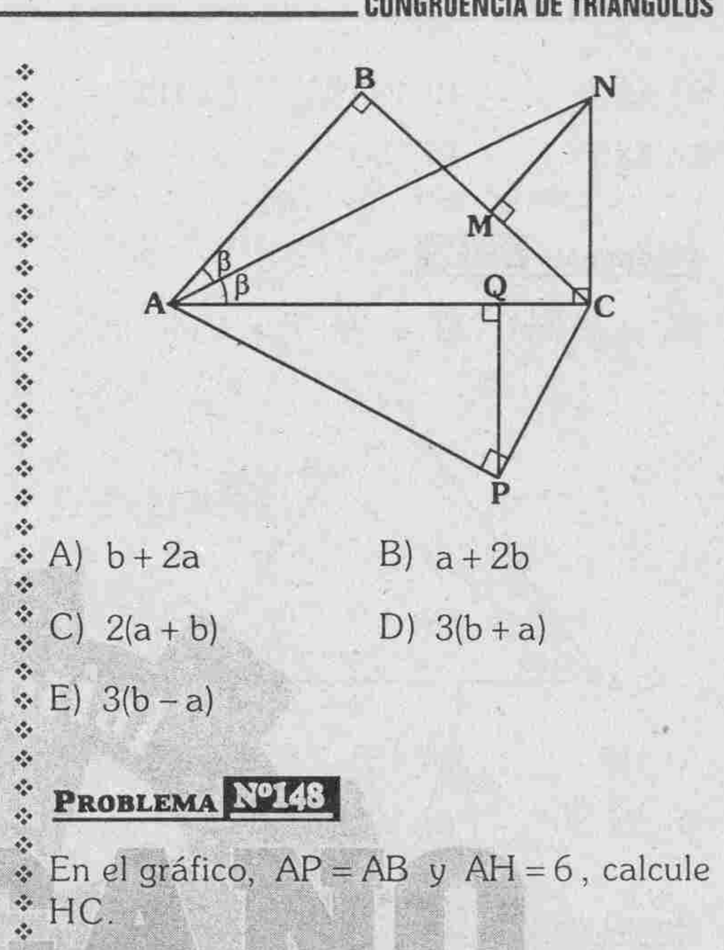


A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{3}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

PROBLEMA N°147

En el gráfico, $m\measuredangle NAP=45°$, $MN=a$ y $PQ=b$. Calcule AC.



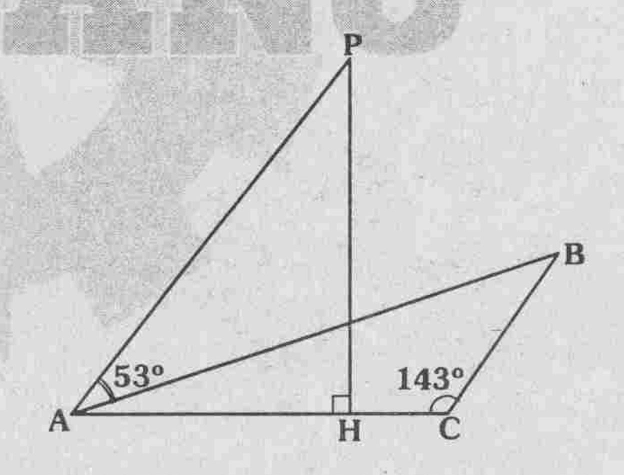
A) $b+2a$ B) $a+2b$

C) $2(a+b)$ D) $3(b+a)$

E) $3(b-a)$

PROBLEMA N°148

En el gráfico, $AP=AB$ y $AH=6$, calcule HC.



A) 3 B) 4 C) 5

D) 6 E) 8

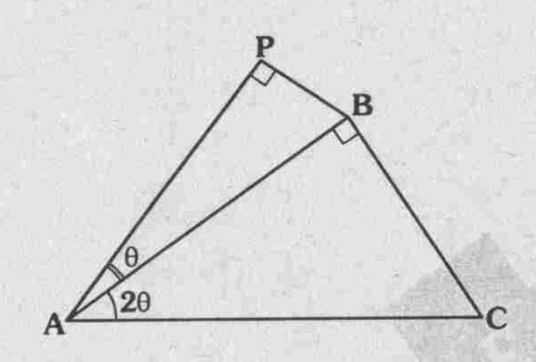
PROBLEMA N°149

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, en su región interior se ubica el punto P tal que $AB=BC$ y $(PC)^2=2(PB)^2+(AP)^2$. Calcule $m\measuredangle APB$.

A) 120° B) 135° C) 125°
D) 130° E) 150°

PROBLEMA Nº150

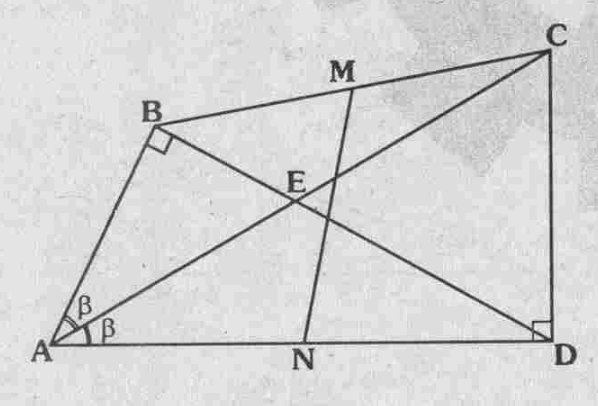
En el gráfico, $AC = 4(PB)$, calcule θ.



A) 15° B) 18° C) 21°
D) 22°30' E) 18°30

PROBLEMA Nº151

En el gráfico, $BM = MC$, $AN = ND$ y $(BE)^2 + (AD)^2 = 20$, calcule MN.



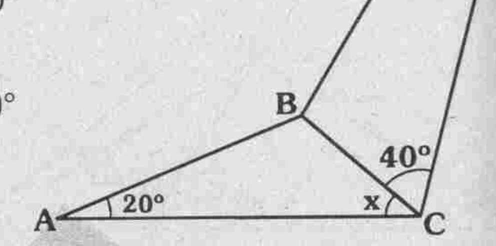
A) 4 B) 2 C) $\sqrt{5}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{5}$

PROBLEMA Nº152

En el gráfico, $BD = AB + AC$.

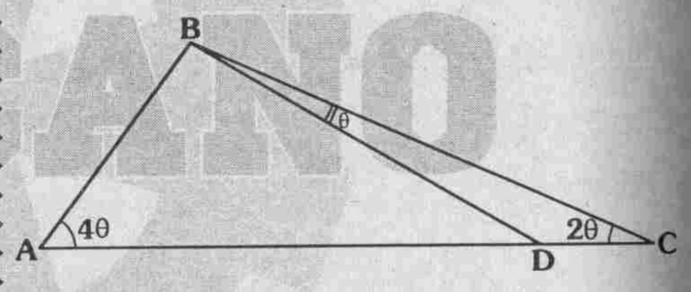
Calcule x.

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 60°
E) 70°



PROBLEMA Nº153

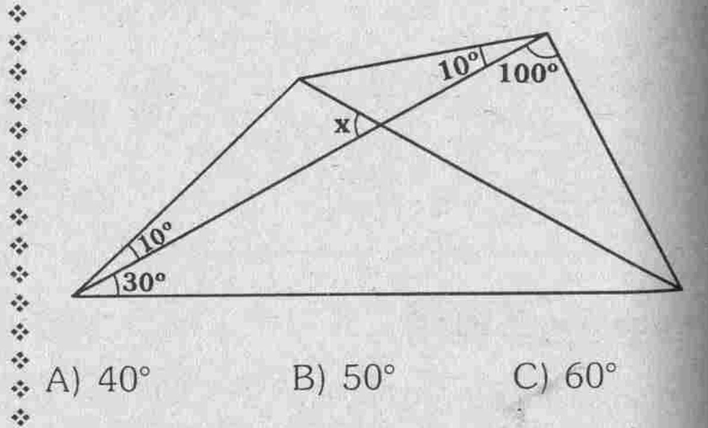
En el gráfico, $BC = AD$, calcule θ.



A) 5° B) 6° C) 7,5°
D) 10° E) 20°

PROBLEMA Nº154

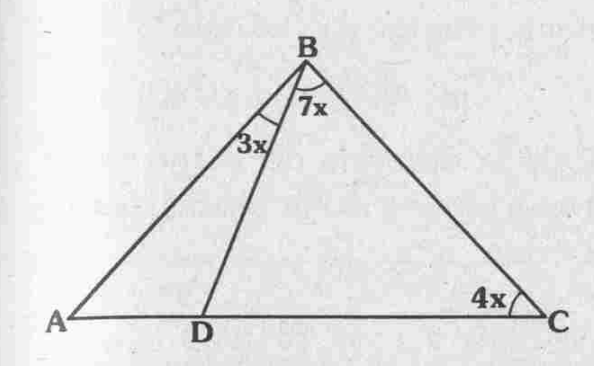
En el gráfico, calcule x.



A) 40° B) 50° C) 60°
D) 45° E) 55°

PROBLEMA N°155

En el gráfico, $AB = CD$, calcule x.



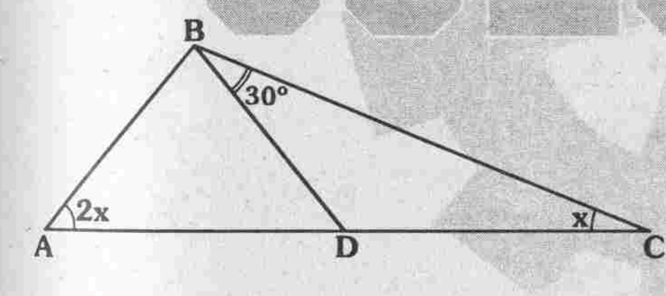
A) 10° B) 5° C) 12°
D) 8° E) 7,5°

PROBLEMA N°156

En el gráfico:

$m\sphericalangle ABD > 90°$ y $AD = CD$

Calcule x.



A) 15° B) 30° C) 20°
D) 25° E) 10°

PROBLEMA N°157

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BQ y en $\overline{BQ}$ se ubica P, tal que $\overline{BQ} \perp \overline{CP}$, $m\sphericalangle ACP = 15°$, $m\sphericalangle BAP = m\sphericalangle PAC$ y $QC = 2(PB)$. Calcule $m\sphericalangle PAB$.

A) 15° B) 18° C) 22°30'
D) 18°30' E) 16°

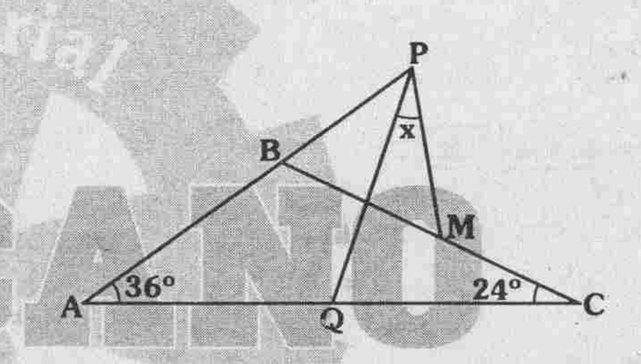
PROBLEMA N°158

En el triángulo ABC, se traza la altura BH y la mediana BM, tal que $BC=8$ y $2(m\sphericalangle ABH) - m\sphericalangle HBC = 90°$. Calcule HM.

A) 2 B) 4 C) 6
D) $2\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA N°159

En el gráfico, $BC = 2(PB)$, $BM = MC$ y $AQ = QC$. Calcule x.

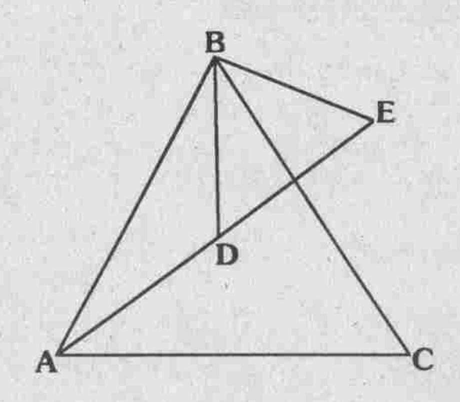


A) 12° B) 18° C) 24°
D) 30° E) 20°

PROBLEMA N°160

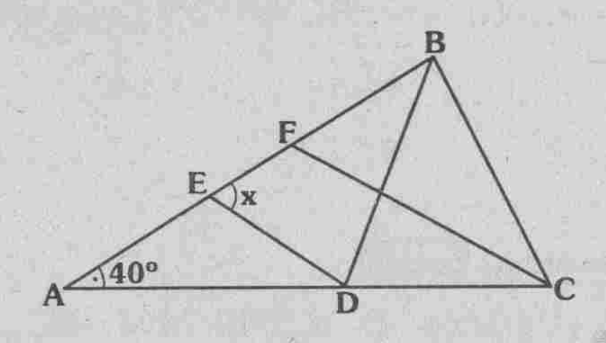
En el gráfico, los triángulos ABC y BDE son equiláteros y $AD = 22$. Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{DE}$.

A) 11
B) 22
C) $11\sqrt{3}$
D) $11\sqrt{2}$
E) 5,5



PROBLEMA Nº161

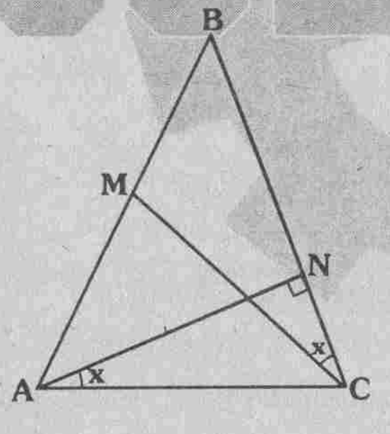
En el gráfico, BE=FC, FC=EB y BD=BC. Calcule x



A) 70° B) 80° C) 50°
D) 60° E) 77°

PROBLEMA Nº162

En el el gráfico $AB = BC$ y $MB = 2(NC)$. Calcule x.



A) 10°
B) 15°
C) 18°
D) 20°
E) 30°

PROBLEMA Nº163

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BD, tal que $BD = AC$, $m\measuredangle ACB = 3\theta$ y $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle ABD) = 4\theta$.

Calcule θ.

A) 10° B) 15° C) 18°
D)12° E) 24°

PROBLEMA Nº164

En el triángulo isósceles ABC, $AB = BC = a$ y $AC = b$, se traza la ceviana interior AP, tal que:

$$m\measuredangle ABC = 4(m\measuredangle CAP)$$

Calcule la distancia del punto medio de $\overline{AB}$ a la proyección ortogonal de C sobre $\overline{AP}$.

A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $a+b$
C) $\frac{a+b}{2}$ D) $2(a+b)$
E) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

PROBLEMA Nº165

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, en $\overline{AB}$ se ubica M y en $\overline{AC}$ el punto N, si $MC = a$, $BC = b$, $\overline{MN} // \overline{BC}$ y $m\measuredangle NMC = 2(m\measuredangle BAC)$. Calcule MN.

A) $a+b$ B) $2a+b$
C) $2b+a$ D) $2b-a$
E) $2a-b$

PROBLEMA Nº166

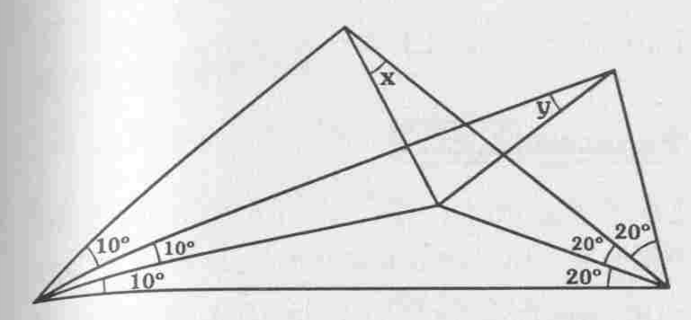
Se tiene el triángulo ABC, en el cual se traza la ceviana interior $\overline{BR}$ y la ceviana exterior $\overline{BS}$ ($\overline{BR} \perp \overline{BS}$). S en la prolongación de $\overline{AC}$. Si $AB = RC$; $m\measuredangle BAC = 40°$ y $m\measuredangle RBC = m\measuredangle BCR + m\measuredangle ABR$.

Calcule $m\measuredangle BSA$.

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

PROBLEMA N°167

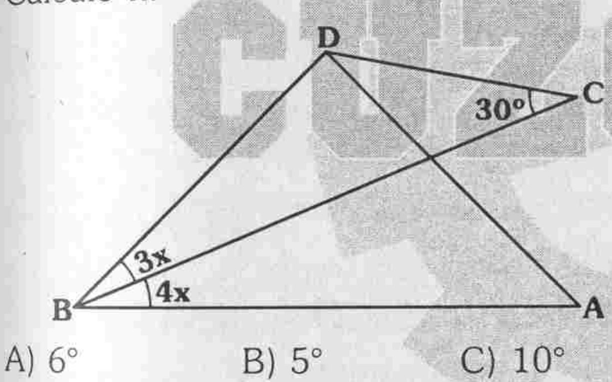
Del gráfico, calcule x+y.



A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 80°

PROBLEMA N°168

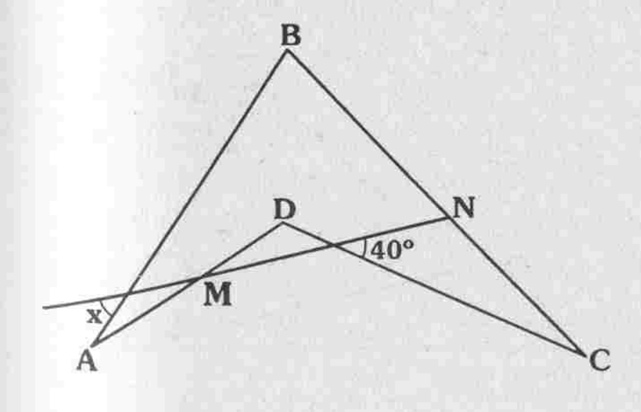
En el gráfico, AB = BC y AD = BD . Calcule x.



A) 6° B) 5° C) 10°
D) 12° E) 7,5°

PROBLEMA N°169

En el gráfico, AB = CD , AM = MD y BN=NC. Calcule x.



A) 50° B) 65° C) 80°
D) 40° E) 70°

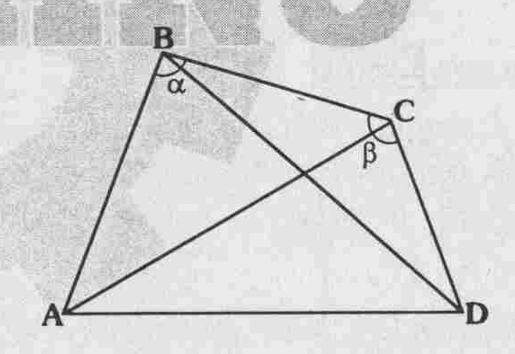
PROBLEMA N°170

En el triángulo ABC, se traza la bisectriz interior BD, luego $\overline{AH}$ perpendicular a $\overline{BD}$ (H en $\overline{BD}$) tal que $m\measuredangle HAC = 37°$; $BH = 9$ y $AC = 15$. Calcule AH.

A) 2 B) 2,5 C) 3
D) 3,5 E) 4

PROBLEMA N°171

Según el gráfico, $\alpha + \beta = 210°$, $AC = AD = BD$; $AB = 6$ y $CD = 2\sqrt{3}$. Calcule AD.



A) 8 B) 6 C) 4
D) $2\sqrt{21}$ E) $2\sqrt{13}$

PROBLEMA N°172

Exteriormente y relativo a $\overline{AC}$ del triángulo rectángulo ABC (recto en B) se ubica el punto P, sea M punto medio de $\overline{AC}$, se cumple:

$$m\measuredangle BAC = \alpha \quad \text{y}$$

$$6(m\measuredangle MCP) = 3(m\measuredangle CMP) = 2(m\measuredangle BPM)$$

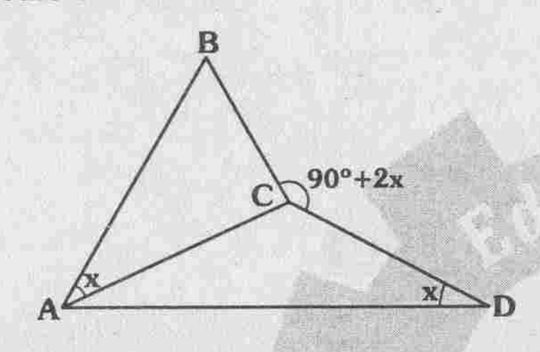
Calcule m∢BPC en función de α.

A) α B) $\dfrac{\alpha}{2}$ C) 2α

D) $90° - \alpha$ E) $45° - \alpha$

PROBLEMA Nº173

En el gráfico, $AC = CD$ y $AB + BC = AD$. Calcule x.



A) 37°/2 B) 53°/2 C) 15°

D) 30° E) 37°

PROBLEMA Nº174

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BP, por P se traza una recta perpendicular a $\overline{AC}$ que interseca a $\overline{AB}$ en M.

Además m∢BAC = 15° ; m∢ABP = 30° ;

m∢ABC = 120° y $AM = 4\sqrt{2}$.

Calcule PC.

A) 4 B 8) C) 2

D) 3 E) 5

PROBLEMA Nº175

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH, sea M punto medio de $\overline{BC}$. La prolongación de $\overline{MH}$ interseca a la prolongación de $\overline{BA}$ en N. Si $BC = 6$ y $3(AH) = HC$. Calcule MN.

A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$

D) 6 E) 9

PROBLEMA Nº176

En el triángulo ABC, se traza la mediana AM y en $\overline{AC}$ se ubica el punto D de modo que m∢AMD = 90° y la distancia de B hacia $\overline{AC}$ es la mitad de AD, si m∢BAM = 30°, calcule m∢CMD.

A) 30° B) 45° C) 60°

D) 37° E) 53°

PROBLEMA Nº177

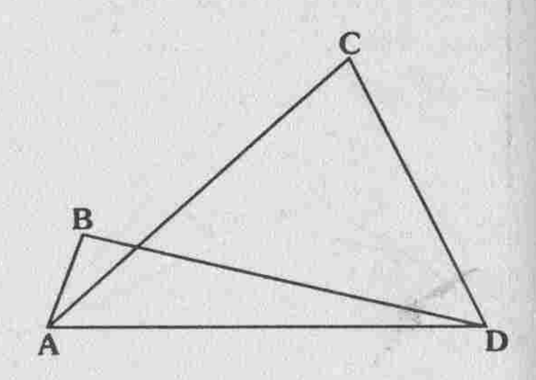
En el triángulo ABC, el ángulo ACB mide 60°, se traza la bisectriz interior BE, luego la mediatriz de $\overline{AB}$ contiene a E e interseca a lal prolongación de $\overline{BC}$ en F, calcule m∢BFE.

A) 10° B) 20° C) 30°

D) 15° E) 25°

PROBLEMA Nº178

En el gráfico, m∢BAD = m∢CDA ; AC = BD, AD = AB + CD y AB ≠ CD. Calcule m∢CDA.



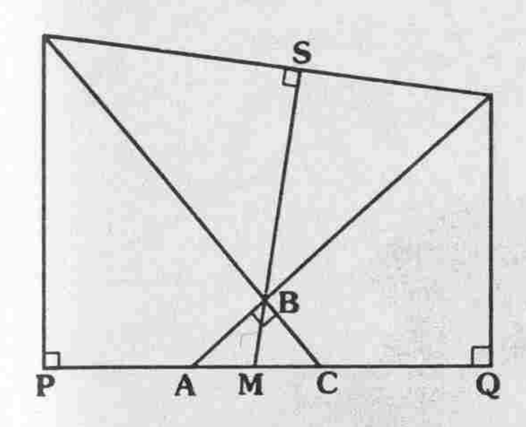
A) 37° B) 60° C) 45°

D) 75° E) 53°

PROBLEMA Nº179

Del gráfico, $AM = MC$ y $BS = 4$.

Calcule PQ.



A) 6 B) 8 C) $4\sqrt{2}$

D) 8 E) $4\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº180

En el triángulo ABC recto en B se traza la mediana BM y la ceviana interior $\overline{CN}$, $\overline{CN} \cap \overline{BM} = \{L\}$, $BL = LM$.

Calcule $\frac{MN}{CN}$

A) 1/3 B) 1 C) 1/2

D) 1/4 E) 2/3

PROBLEMA Nº181

En el triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la ceviana interior AE en cuya prolongación se ubica P, de modo que $m\sphericalangle APC = 90°$, si B dista "a" de $\overline{AE}$, $PC = b$ y $m\sphericalangle BCP = 2(m\sphericalangle ACB)$.

Calcule BC.

A) $4a - b$ B) $2a + b$

C) $\frac{3a+b}{2}$ D) $2b + a$

E) $a + b$

PROBLEMA Nº182

En el triángulo ABC, $m\sphericalangle BAC = 50°$ $m\sphericalangle BCA = 100°$, se trazan las alturas CQ y BH; si $CQ - CH = 2$. Calcular AC.

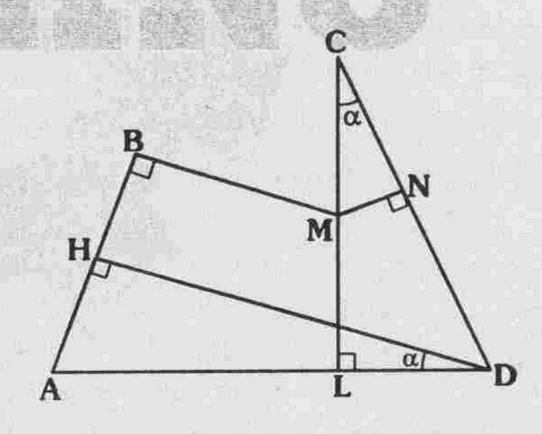
A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 3

D) 4 E) $\sqrt{6}$

PROBLEMA Nº183

Del gráfico, $MN = 2$, $BM = 5$, $CM = ML$.

Calcule DH.



A) 7 B) 9 C) 11

D) 13 E) 14

PROBLEMA Nº184

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BE}$, si $AE = BC$,

$2(m\sphericalangle BAE) = 3(m\sphericalangle BCA)$ y

$m\sphericalangle ABE = 90°$.

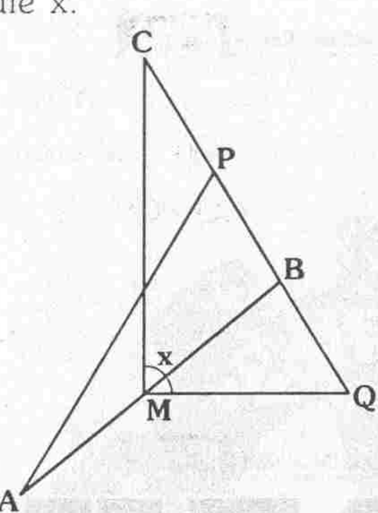
Calcule $m\sphericalangle EBC$.

A) 26,5 B) 22,5 C) 18°
D) 14° E) 15°



PROBLEMA Nº185

Del gráfico $AM = MB$; $CP = BQ$ y $AP = QC$. Calcule x.



A) 120°
B) 150°
C) 135°
D) 90°
E) 60°

PROBLEMA Nº186

En el triángulo ABC se traza la mediana $\overline{AM}$ y en el triángulo ABM se traza la altura $\overline{BH}$, donde $BH = 5$; si $AB = 2(HM)$ y $m\measuredangle ABH = 2(m\measuredangle MAC)$.

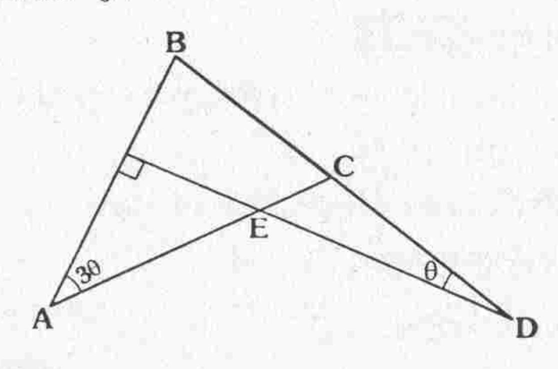
Calcule la distancia de C a $\overleftrightarrow{BH}$.

A) 6 B) 7 C) 8
D) $5\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº187

Del gráfico, $AE = CD$ y $ED = AB$.

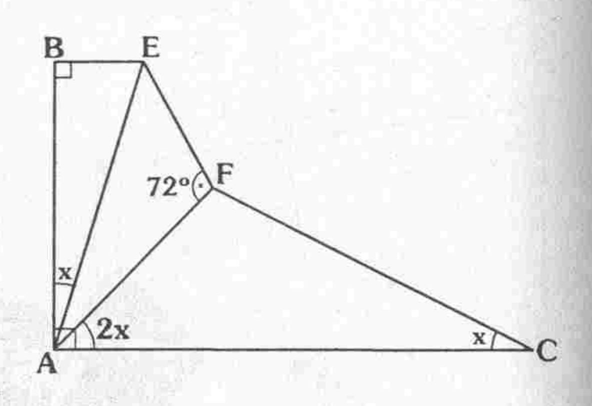
Calcule θ.



A) 15° B) 10° C) 8°
D) 18° E) 14°

PROBLEMA Nº188

En el gráfico, $CF = 2(AB)$. Calcule x.



A) 15° B) 10° C) 9°
D) 18° E) 22°30'

PROBLEMA Nº189

En la región interior de un triángulo ABC se ubica el punto D, tal que:

$$\frac{m\measuredangle DCA}{3} = \frac{m\measuredangle BAC}{7} = m\measuredangle DCB = 10°$$

y $AB = DC$.

Calcule $m\measuredangle DBC$.

A) 30° B) 15° C) $\frac{45°}{2}$
D) 20° E) 75°

PROBLEMA Nº190

En el triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{BM}$ y la ceviana interior $\overline{CN}$ que interseca a $\overline{BM}$ en su punto medio H, si las distancias de C a N y a $\overleftrightarrow{BH}$ están en la razón de 5 a 3 respectivamente.

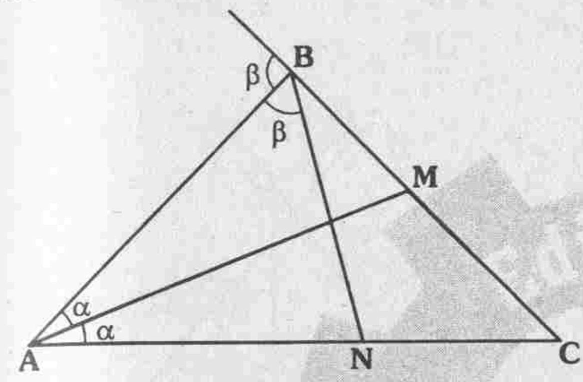
Calcule m∢NHB .

A) 30° B) 37° C) 45°

D) 53° E) 60°

PROBLEMA Nº191

Del gráfico, BN = CN , AB = 8 , MC = 3 . Calcule AC.

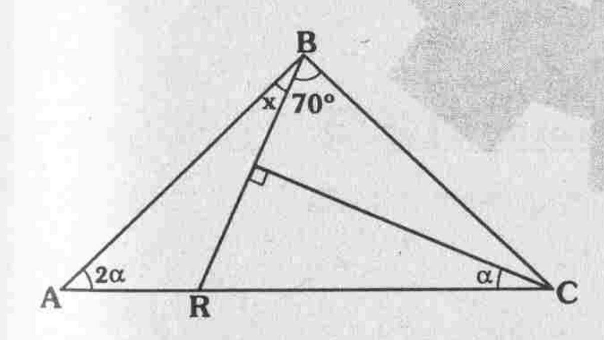


A) 5 B) 4 C) 5,5

D) 11 E) 9

PROBLEMA Nº192

Del gráfico, calcule x.



A) 120° B) 10° C) 30°

D) 25° E) 15°

PROBLEMA Nº193

En la región exterior relativo a $\overline{AB}$ de un triángulo ABC se ubica el punto P, tal que:

m∢APC = 90° ; m∢PAB = m∢PCA

Si M es punto medio de $\overline{BC}$ y $(AB)^2 + (AC)^2 = 36$. Calcule PM.

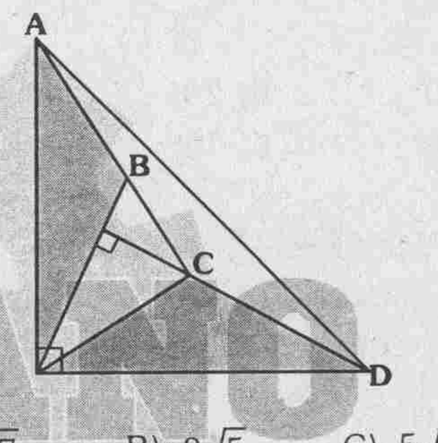
A) 4,5 B) 6 C) 4

D) 3 E) $3\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº194

Del gráfico, las regiones sombreadas son congruentes. Si AB=3 y BC=2.

Calcule AD.



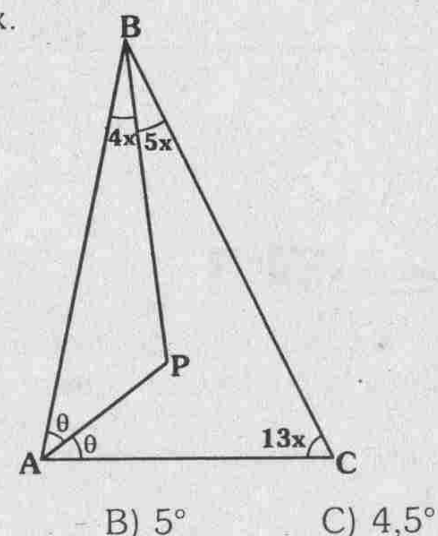
A) $2\sqrt{17}$ B) $3\sqrt{5}$ C) $5\sqrt{6}$

D) $\sqrt{29}$ E) $\sqrt{13}$

PROBLEMA Nº195

Del gráfico, AC=BP.

Calcule x.



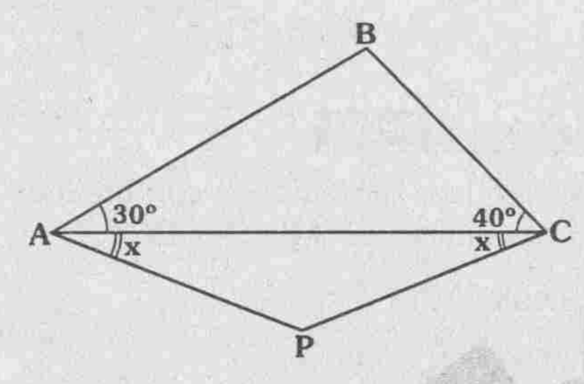
A) 4° B) 5° C) 4,5°

D) 7,5° E) 6°

PROBLEMA Nº196

Del gráfico, $AP = PC = BC$.

Calcule x.

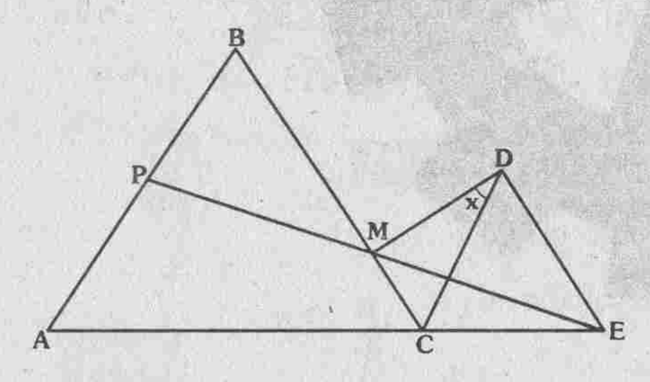


A) 10° B) 20° C) 35°
D) 25° E) 40°

PROBLEMA Nº197

Del gráfico, los triángulos ABC y CDE son equiláteros; $AP = PB$ y $PM = ME$.

Calcule x.



A) 15° B) 75° C) 53°/2
D) 30° E) 37°/2

PROBLEMA Nº198

En la región interior de un triángulo ABC se ubica el punto Q tal que :

$$\frac{m\sphericalangle ABQ}{3} = \frac{m\sphericalangle QBC}{2} = \frac{m\sphericalangle BAQ}{7} = m\sphericalangle QAC = 10°$$

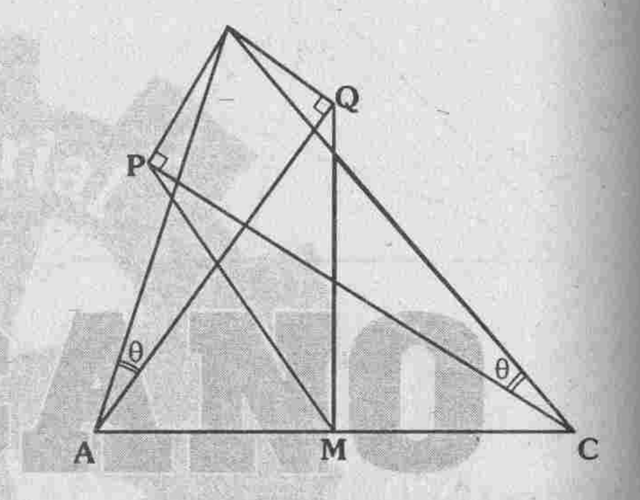
Calcule: $m\sphericalangle QCA$

A) 20° B) 30° C) 10°
D) 25° E) 15°

PROBLEMA Nº199

Del gráfico, $AM=MC$.

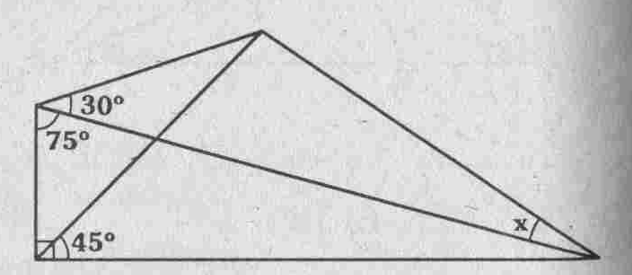
Calcule $\frac{PM}{QM}$



A) 1 B) 3/2 C) 5/4
D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº200

Del gráfico, calcule x.



A) 10° B) 15° C) 20°
D) 13° E) 14°

Problemas Resueltos

Ciclo Semestral Intensivo

PROBLEMA N°201

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz interior AQ, tal que $AC + QC = 2(AB)$. Calcule $m\sphericalangle QAC$.

A) 30° B) 22,5° C) 14°

D) 18,5° E) 26,5

PROBLEMA N°202

Se ubica el punto P en la región interior del triángulo ABC, tal que $AP = BC$, $m\sphericalangle PAC = 22°$, $m\sphericalangle PCB = m\sphericalangle ACP$ y $m\sphericalangle PBC = 79°$. Calcule $m\sphericalangle PCB$.

A) 11° B) 36° C) 22°

D) 57° E) $\frac{57°}{2}$

PROBLEMA N°203

En el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$ se ubica Q en la región interior, tal que:

$$m\sphericalangle BCQ = 10° \quad \text{y}$$

$$m\sphericalangle BAQ = m\sphericalangle QAC = 20°$$

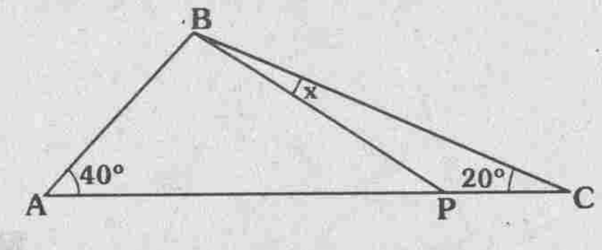
Calcule $m\sphericalangle CBQ$.

A) 10° B) 30° C) 15°

D) 20° E) 15°

PROBLEMA N°204

En el gráfico, $AP = BC$. Calcule x.

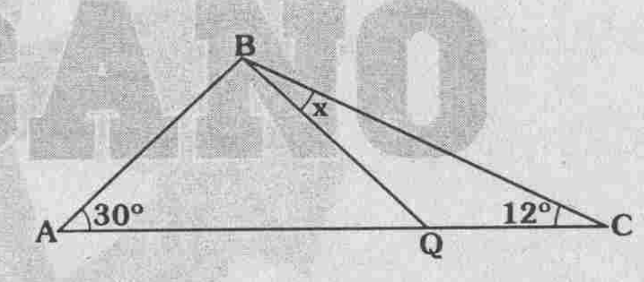


A) 5° B) 15° C) 30°

D) 10° E) 40°

PROBLEMA N°205

En el gráfico, BC=AQ. Calcule x.

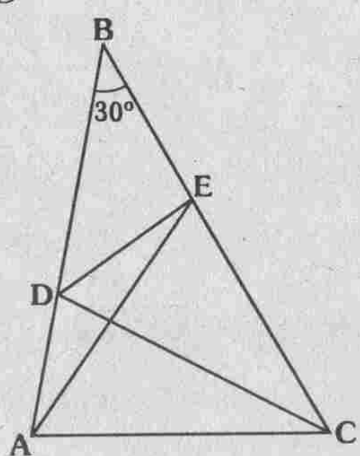


A) 10° B) 12° C) 6°

D) 20° E) 10°

PROBLEMA N°206

En el gráfico, $AC = AE = CD$, $AD = a$ y $EC = b$. Calcule ED



A) $\frac{a+b}{2}$

B) $\sqrt{a^2+b^2}$

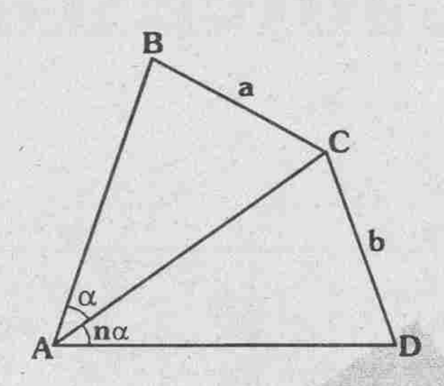
C) $\sqrt{ab}$

D) $2\sqrt{a^2+b^2}$

E) $2\sqrt{ab}$

PROBLEMA N°207

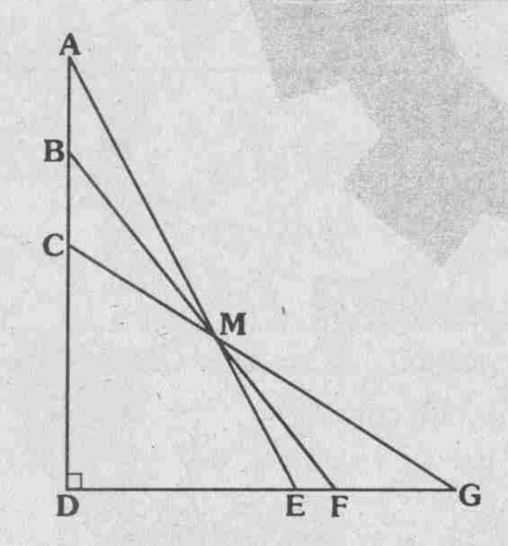
En el gráfico, $AB = AC = AD$ y $n \in \mathbb{Z}^+ (n > 1)$, indique la proposición correcta:



A) $a > nb$ B) $a < nb$ C) $a < 2b$
D) $a > 2b$ E) $b < na$

PROBLEMA N°208

En el gráfico, $BM = MF$; $AB = 2$; $BC = 3$; $EF = 1$ y $FG = 4$, calcule BM.



A) $2\sqrt{13}$ B) $\sqrt{190}$ C) $\sqrt{19}$
D) $2\sqrt{15}$ E) $\sqrt{35}$

PROBLEMA N°209

En la región interior del triángulo ABC se ubica D, tal que:

$AB = BC = AD$ y

$$m\measuredangle BCD = \frac{m\measuredangle DCA}{2} = \frac{m\measuredangle ADC}{9}$$

Calcule $m\measuredangle BCD$.

A) 7,5° B) 10° C) 15°
D) 22,5° E) 30°

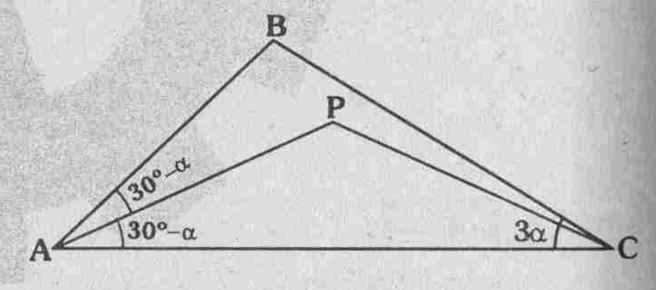
PROBLEMA N° 210

En el triángulo ABC se traza la altura BH (H en $\overline{AC}$). Si $m\measuredangle ABH = 18°$ y $BC = 2(AH) + AB$. Calcule $m\measuredangle BCA$.

A) 18° B) 36° C) 30°
D) 12° E) 24°

PROBLEMA N° 211

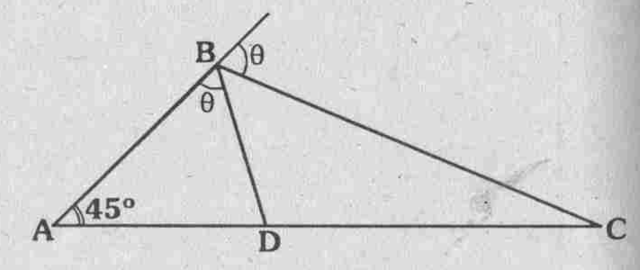
En el gráfico, $AB = AP = PC$. Calcule α.



A) 20° B) 12° C) 10°
D) 25° E) 15°

PROBLEMA N° 212

En el gráfico, $CD = 3(AD)$. Calcule $\frac{BC}{AB}$.



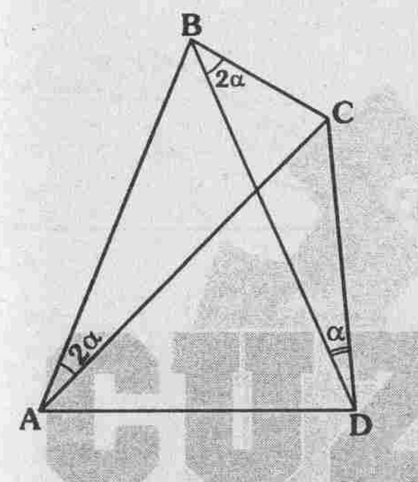
A) 3 B) $\frac{\sqrt{34}}{2}$ C) $\sqrt{34}$

D) $\sqrt{10}$ E) $\sqrt{15}$

PROBLEMA Nº 213

En el gráfico, $AB = BD$ y $AD = DC$.

Calcule α.



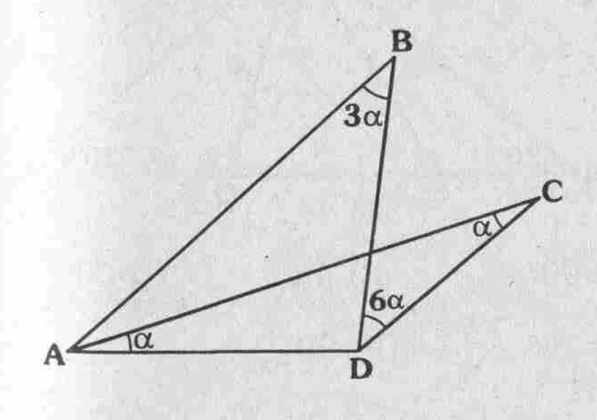
A) 5° B) 7,5° C) 10°

D) 20° E) 18°

PROBLEMA Nº 214

En el gráfico, $AB = AC$ y $AD = DC$.

Calcule α.



A) 5° B) 10° C) 12°

D) 18° E) 15°

PROBLEMA Nº 215

Interior al triángulo isósceles ABC ($AB = BC$) se ubica P, que pertenece a la bisectriz del ángulo A.

Si $m\sphericalangle BCP = 3(m\sphericalangle ACP) = 30°$

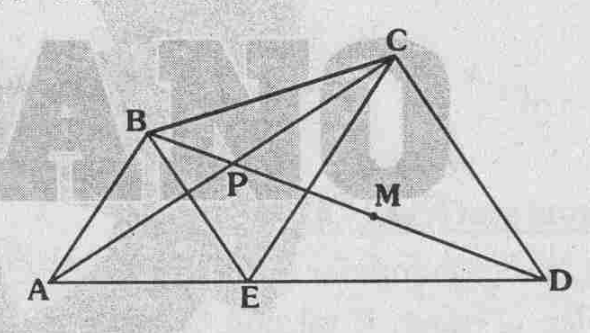
Calcule $m\sphericalangle PBC$.

A) 70° B) 80° C) 100°

D) 120° E) 90°

PROBLEMA Nº 216

En el gráfico, calcule PM, si $BC = 8$; $AB = BE$; $EC = CD$; $AP = PC$ y $BM = MD$.

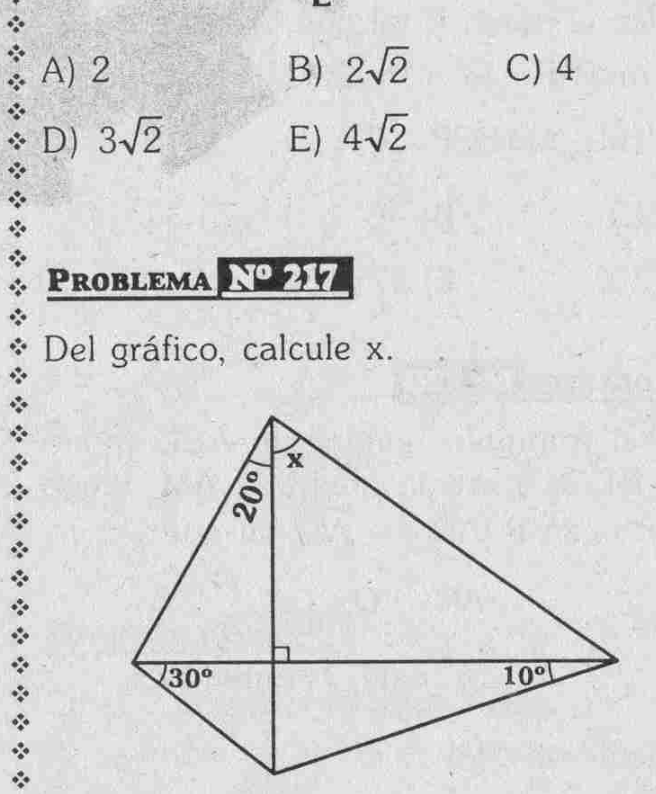


A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 4

D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 217

Del gráfico, calcule x.

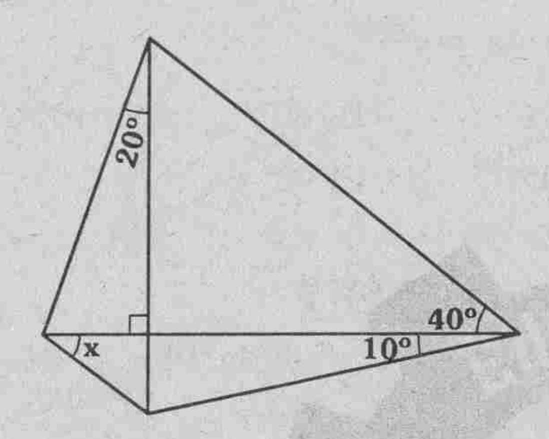


A) 80° B) 60° C) 65°

D) 50° E) 70°

PROBLEMA Nº 218

En el gráfico, calcule x.



A) 15° B) 30° C) 7,5°

D) 10° E) 22,5°

PROBLEMA Nº 219

En la región interior del triángulo ABC se ubica el punto P, tal que $AB = AP = PC$. Si $m\sphericalangle BAP = 30°$ y $m\sphericalangle PAC = m\sphericalangle PCA = 15°$. Calcule $m\sphericalangle BCP$.

A) 15° B) 45° C) 37°

D) 30° E) 37°/2

PROBLEMA Nº 220

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la mediana AM, luego se ubican P y Q en $\overline{AC}$ tal que:

$$AP = PQ = QC$$

$$\text{Si } m\sphericalangle PBQ = 2(m\sphericalangle MAC)$$

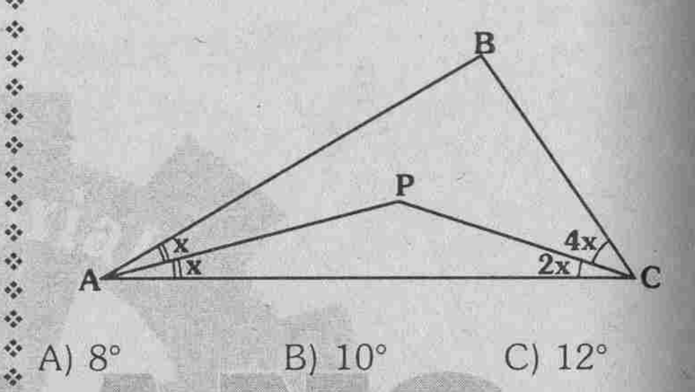
Calcule $m\sphericalangle MAP$.

A) 30° B) $\frac{37°}{2}$ C) 37°

D) 23° E) $\frac{53°}{2}$

PROBLEMA Nº 221

En el gráfico, $BC = PC$. Calcule x.



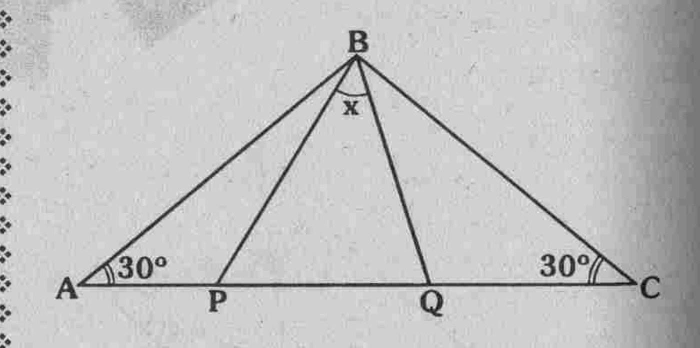
A) 8° B) 10° C) 12°

D) 15° E) 20°

PROBLEMA Nº 222

En el gráfico, $\frac{AP}{5} = \frac{PQ}{7} = \frac{QC}{8}$.

Calcule x.

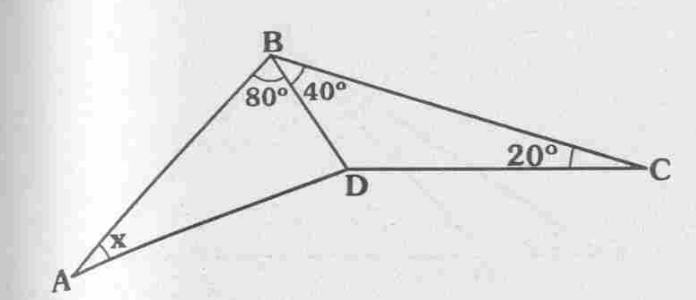


A) 90° B) 45° C) 60°

D) 75° E) 90°

PROBLEMA Nº 223

Del gráfico, $AB = DC$. Calcule x.

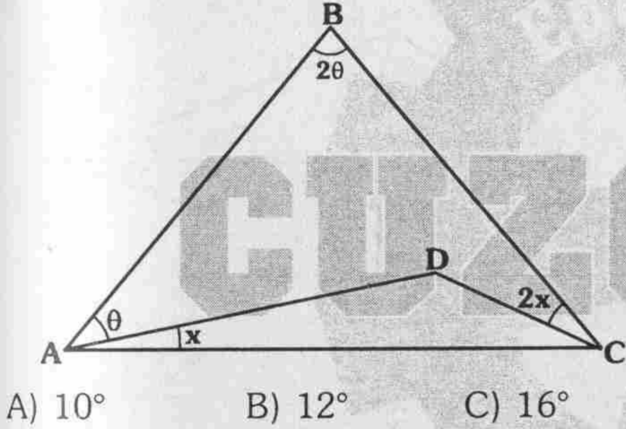


A) 140° B) 20° C) 30°

D) 25° E) 18°

PROBLEMA Nº 224

Del gráfico $AB = BC = AD$. Calcule x.

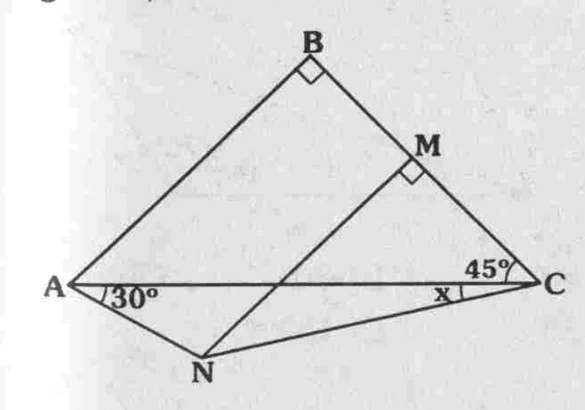


A) 10° B) 12° C) 16°

D) 15° E) 18°

PROBLEMA Nº 225

Del gráfico, $BM = MC$. Calcule x.



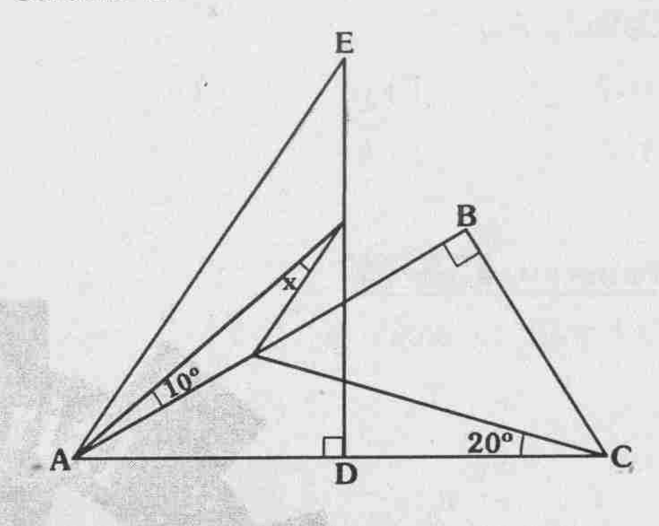
A) 5° B) 8° C) 16°

D) 15° E) 21°

PROBLEMA Nº 226

Del gráfico, los triángulos ABC y EDA son congruentes si $BC=DC$.

Calcule x.

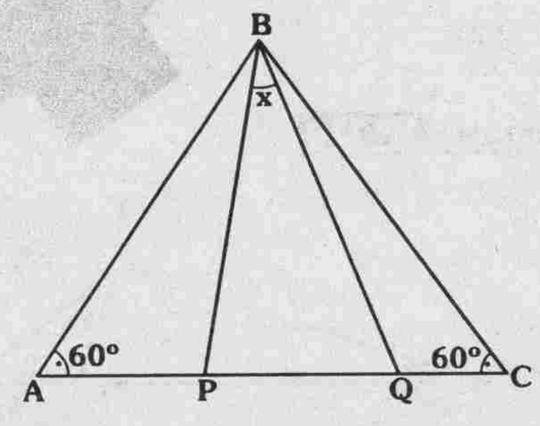


A) 10° B) 15° C) 18°

D) 20° E) 30°

PROBLEMA Nº 227

Del gráfico, $\dfrac{AP}{5} = \dfrac{PQ}{7} = \dfrac{QC}{3}$. Calcule x.



A) 20° B) 45° C) 30°

D) 40° E) 15°

PROBLEMA Nº 228

En el triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la ceviana interior $\overline{AQ}$ tal

que:

$$2(m\sphericalangle CAQ) + 3(m\sphericalangle BAQ) = 90° \ ;$$

$$BQ = 2 \ ; \ QC = 3$$

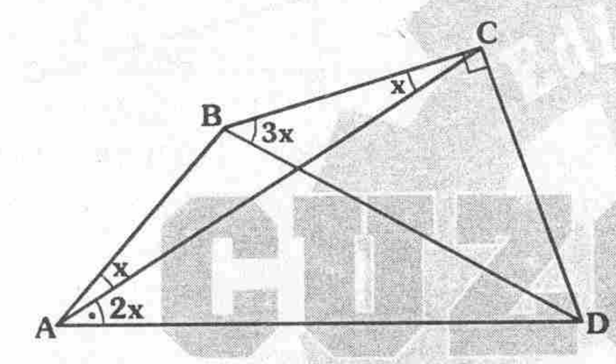
Calcule AQ.

A) 7 B) 6 C) 5

D) 4 E) 8

PROBLEMA Nº 229

Del gráfico, calcule x.



A) 10° B) 20°

C) 15° D) 18°

E) 22°30'

PROBLEMA Nº 230

Del gráfico, calcule x.

A) 10°

B) 12°

C) 8°

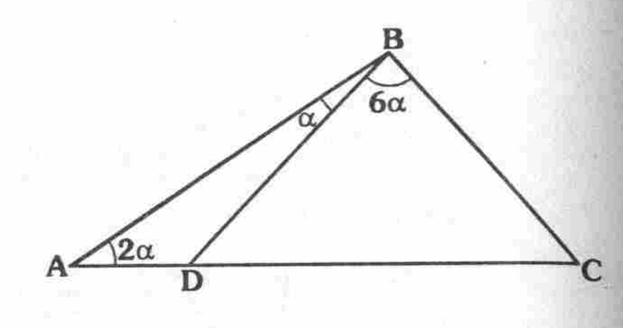
D) 7,5°

E) 15°

PROBLEMA Nº 231

En el gráfico, AB = CD .

Calcule α.

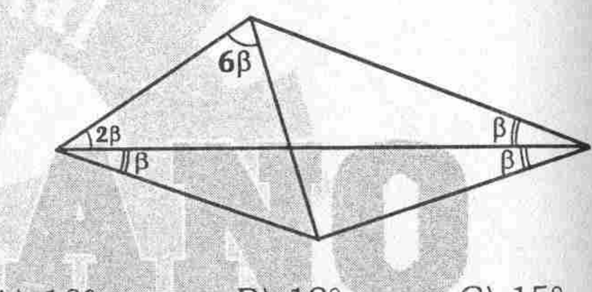


A) 8° B) 9° C) 10°

D) 12° E) 15°

PROBLEMA Nº 232

Del gráfico, calcule β .

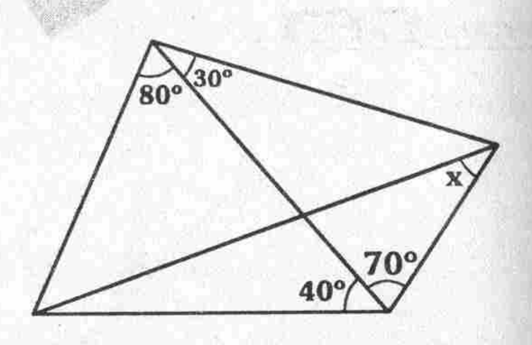


A) 10° B) 12° C) 15°

D) 18° E) 20°

PROBLEMA Nº 233

Del gráfico, calcule x.

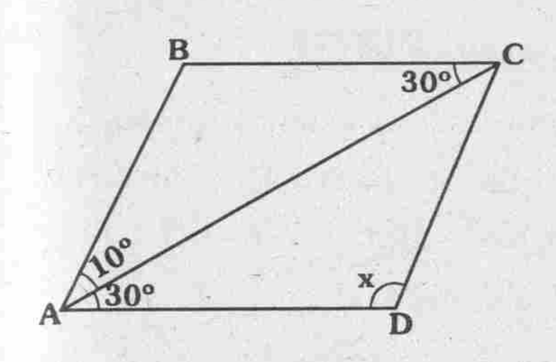


A) 50° B) 20° C) 50°

D) 25° E) 15°

PROBLEMA Nº 234

En el gráfico, AB=AD. Calcule x.



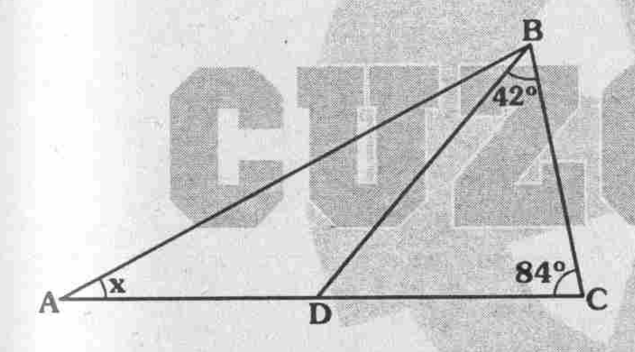
A) 105° B) 110° C) 135°

D) 120° E) 100°

PROBLEMA Nº 235

En el gráfico, AD=BC.

Calcule x.

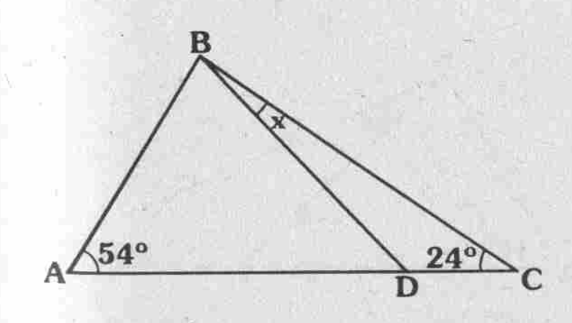


A) 30° B) 6° C) 24°

D) 21° E) 42°

PROBLEMA Nº 236

En el gráfico, AD = BC, calcule x.

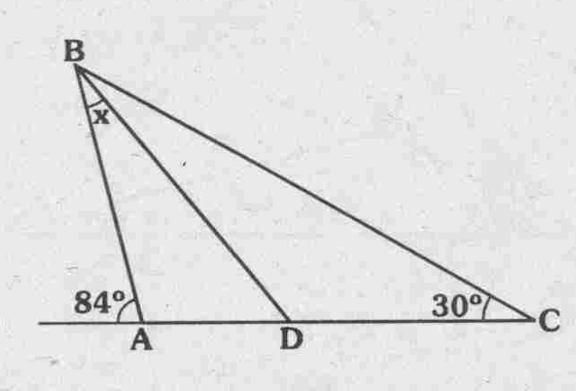


A) 30° B) 24° C) 6°

D) 12° E) 18°

PROBLEMA Nº 237

En el gráfico, AB = DC, calcule x.

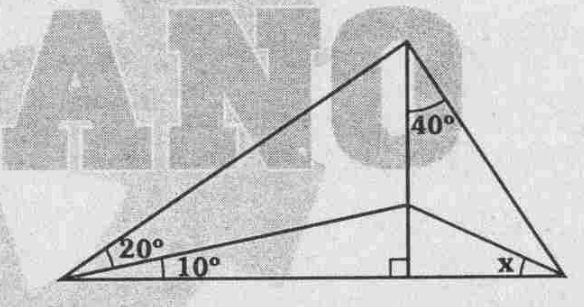


A) 30° B) 24° C) 6°

D) 18° E) 42°

PROBLEMA Nº 238

Del gráfico, calcule x.

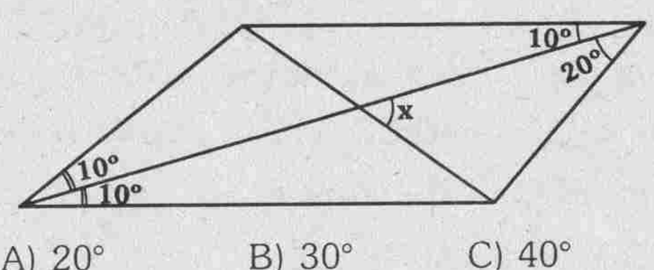


A) 10° B) 20° C) 30°

D) 15° E) 25°

PROBLEMA Nº 239

Del gráfico, calcule x.

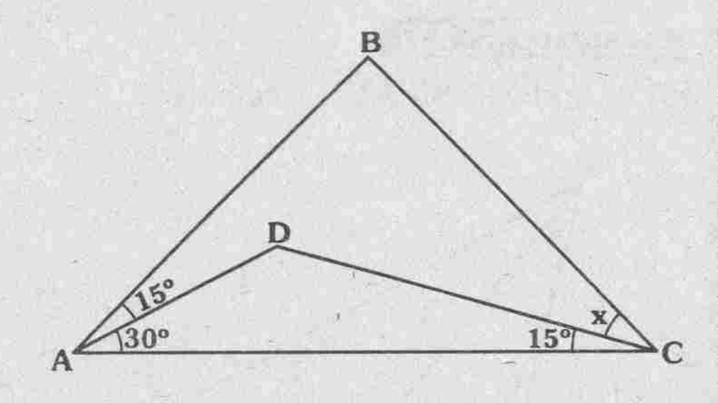


A) 20° B) 30° C) 40°

D) 50° E) 60°

PROBLEMA Nº 240

En el gráfico, AB=CD. Calcule x.



A) 10° B) 20° C) 30°

D) 45° E) 60°

PROBLEMA Nº 241

En el triángulo ABC, se cumple:

$m\sphericalangle BAC = 30°$ y $m\sphericalangle ACB = x$

se ubica D en la región exterior relativa a $\overline{AC}$.

Si: $AB = CD$, $\overline{BA} // \overline{CD}$,

$m\sphericalangle BDC = 30° + x$

Calcule x.

A) 27,5° B) 30° C) 22,5°

D) 45° E) 26,5°

PROBLEMA Nº 242

Se ubica D en la región exterior relativa a $\overline{AC}$ en el triángulo ABC, si $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle ACD = 45°$, $AB = CD$ y $m\sphericalangle BDC = 45° + m\sphericalangle ACB$.

Calcule $m\sphericalangle ACB$.

A) 15° B) 22,5°

C) 26,5° D) 18,5°

E) 30°

PROBLEMA Nº 243

El punto D es exterior y relativo a $\overline{BC}$, tal que $m\sphericalangle BAD = 45°$, $m\sphericalangle CAD = 30°$, $m\sphericalangle ADC = 105°$ y $AB = CD$.

Calcule $m\sphericalangle ADB$.

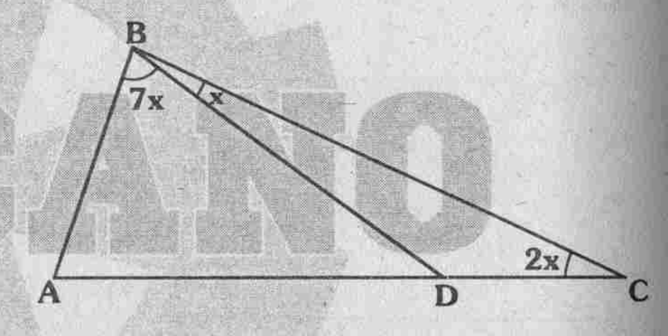
A) 10° B) 15° C) 30°

D) 53°/2 E) 37°/2

PROBLEMA Nº 244

En el gráfico, $AB = CD$.

Calcule x.



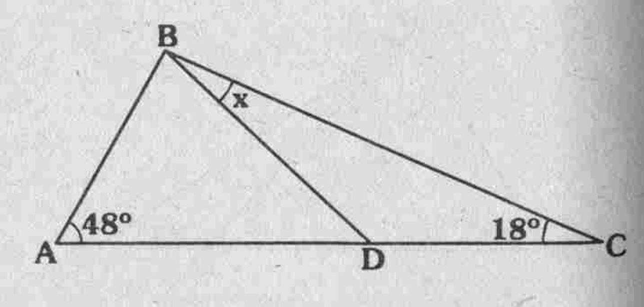
A) 10° B) 20° C) 12°

D) 7,5° E) 15°

PROBLEMA Nº 245

En el gráfico, $AB = CD$.

Calcule x.



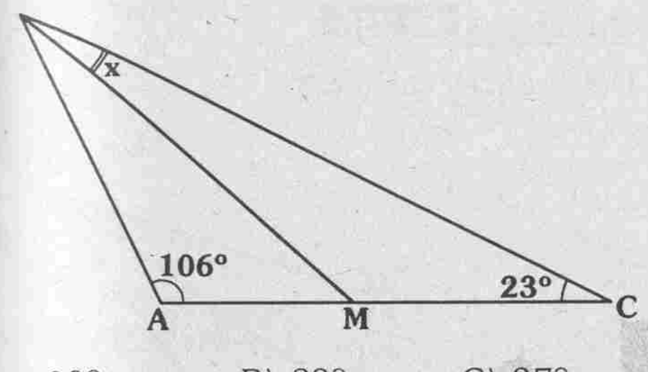
A) 10° B) 20° C) 18°

D) 45°/2 E) 12°

PROBLEMA Nº 246

En el gráfico, AM=MC.

Calcule x



A) 30° B) 23° C) 37°
D) 14° E) 17°

PROBLEMA Nº 247

En el triángulo ABC en su región interior se ubica el punto P, tal que:

m∢PAC = 20° , m∢PBC = 10°

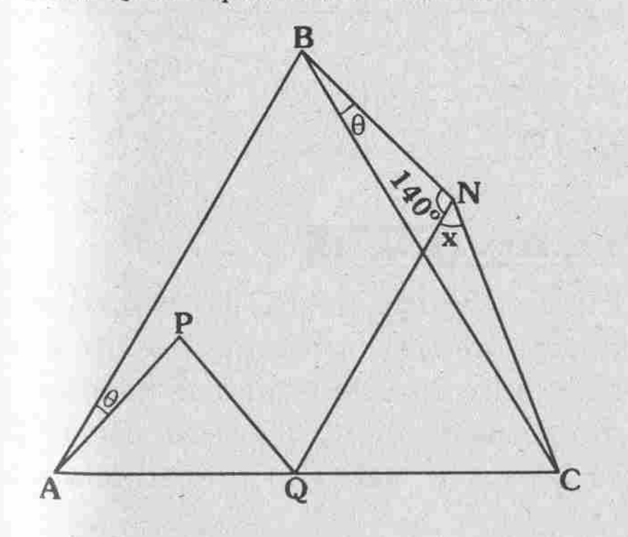
y m∢PCB = 40° , BP = AP + AC

Calcule m∢PCA .

A) 20° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 60°

PROBLEMA Nº 248

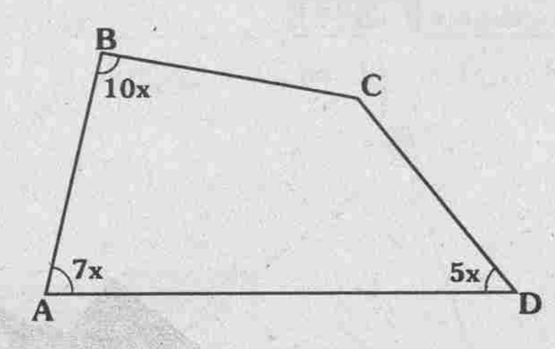
Del gráfico, AB = BC , BN = PQ y el triángulo APQ es equilátero. Calcule x.



A) 30° B) 50° C) 40°
D) 70° E) 20°

PROBLEMA Nº 249

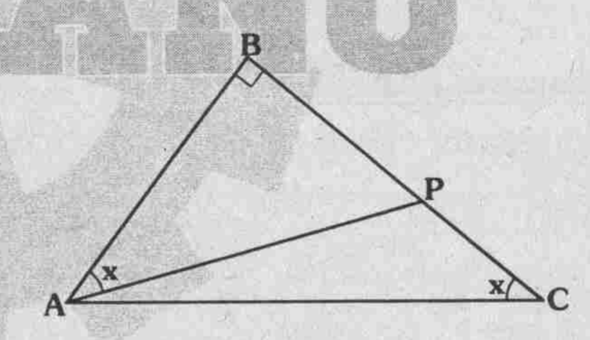
Del gráfico, AB = BC = CD . Calcule x.



A) 10° B) 8° C) 9°
D) 12° E) 15°

PROBLEMA Nº 250

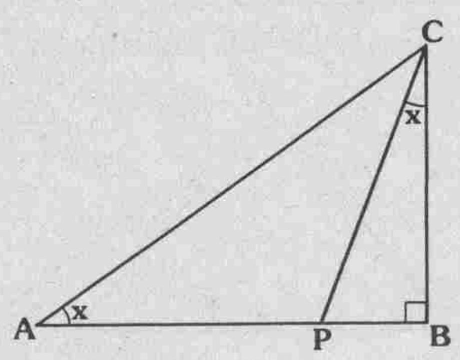
Del gráfico, AB = 2(PC) . Calcule x.



A) 53°/2 B) 24° C) 18°
D) 37° E) 38°

PROBLEMA Nº 251

Del gráfico, AP=BC, calcule x.

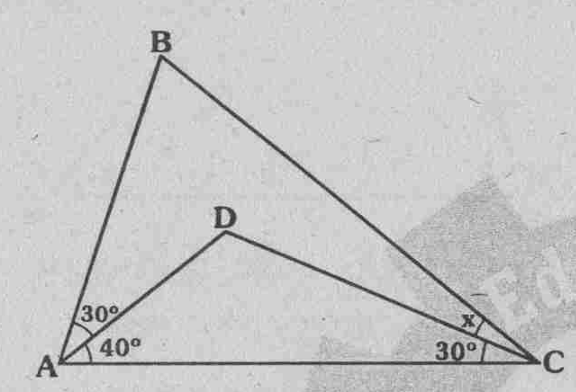


A) 36° B) 18° C) $\frac{37°}{2}$

D) 14° E) $\frac{127°}{4}$

PROBLEMA Nº 252

Del gráfico, $AB = CD$. Calcule x.



A) 10° B) 20° C) 15°

D) 7° E) 12°

PROBLEMA Nº 253

Del gráfico, calcule α.

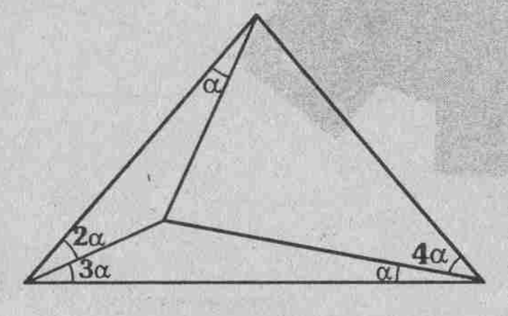
A) 10°

B) 20°

C) 15°

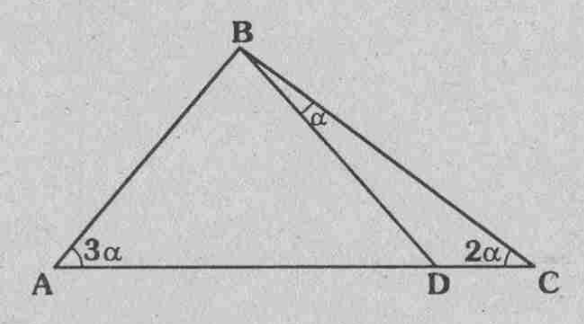
D) 12°

E) 9°



PROBLEMA Nº 254

Del gráfico $AD = BC$, calcule α.

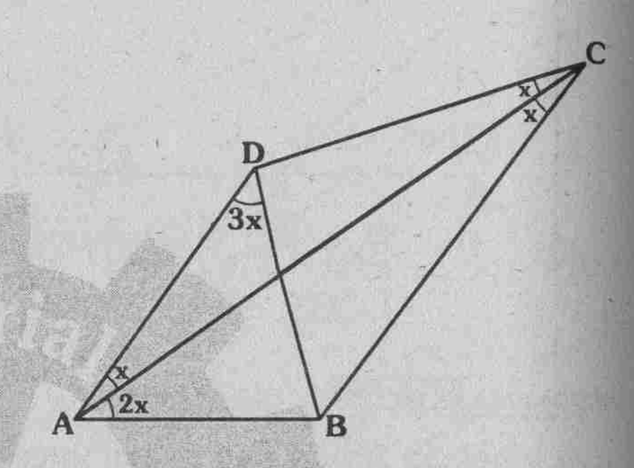


A) 15° B) 10° C) 20°

D) 9° E) 12°

PROBLEMA Nº 255

Del gráfico, calcule x.

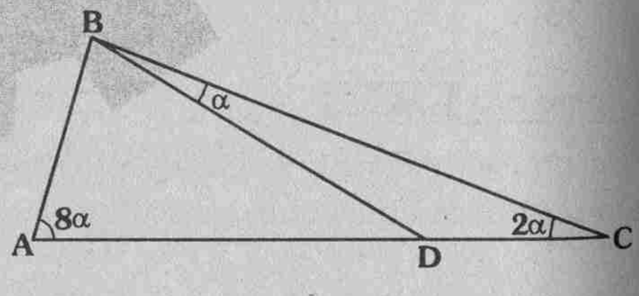


A) 9° B) 12° C) 10°

D) 15° E) 20°

PROBLEMA Nº 256

Del gráfico, $AB = CD$, calcule α.



A) 20° B) 10° C) 15°

D) 12° E) 18°

PROBLEMA Nº 257

En un triángulo ABC se traza las tres bases medias, obteniendo un nuevo triángulo, en este último se hace el mismo procedimiento y así sucesivamente se hace "n" veces el procedimiento, si

M es el perímetro de ABC y N el perímetro del último triángulo.

Indique: $\dfrac{N}{M}$.

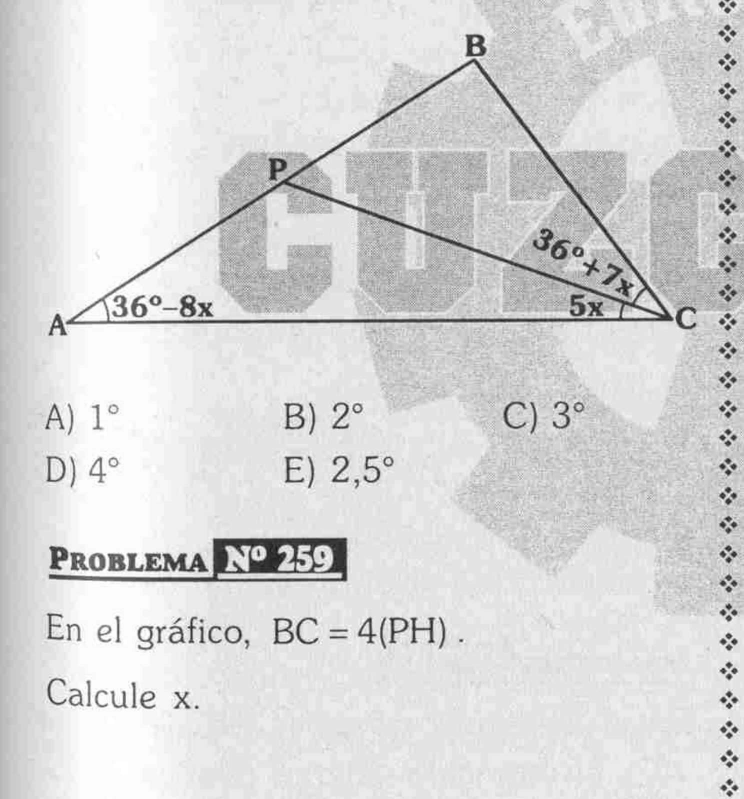
A) n B) n^n

C) n^2 D) 2^n

E) 2^{-n}

PROBLEMA Nº 258

En el gráfico, AP=BC. Calcule x.

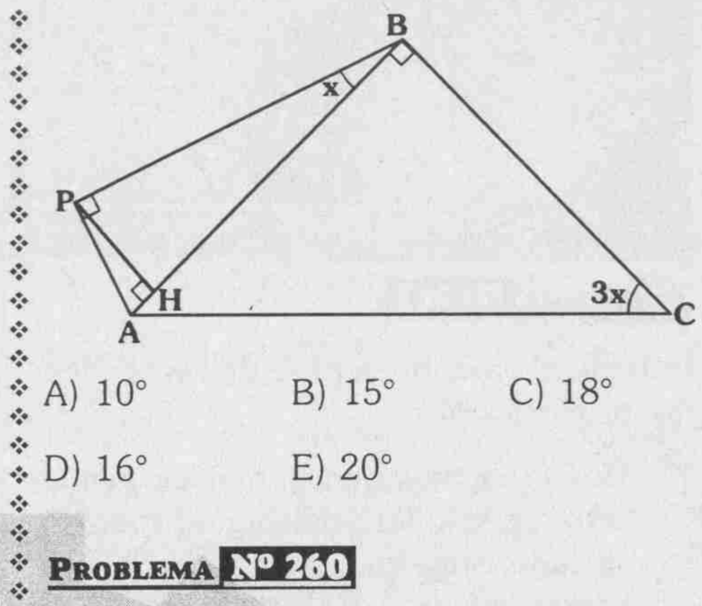


A) 1° B) 2° C) 3°
D) 4° E) 2,5°

PROBLEMA Nº 259

En el gráfico, BC = 4(PH).

Calcule x.

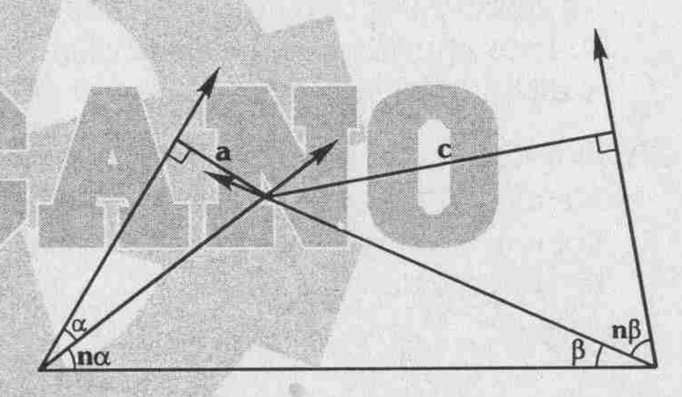


A) 10° B) 15° C) 18°

D) 16° E) 20°

PROBLEMA Nº 260

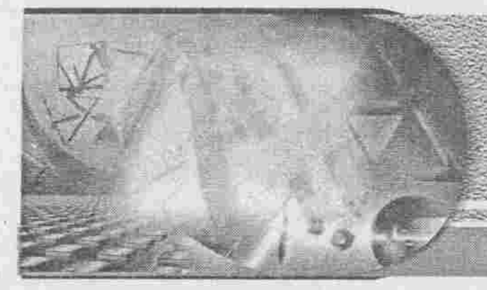
En el gráfico, n y $m \in \mathbb{N}$ indique la relación correcta $(n > 1 \wedge m > 1)$.



A) $c > nma$ B) $c < nma$

C) $a < nm$ D) $a < nmc$

E) $\dfrac{a}{n} = \dfrac{c}{m}$



PROBLEMA Nº 261

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

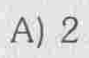
I. Dos triángulos que tienen en común un ángulo interior de igual medida, su lado opuesto y el perímetro, son congruentes.

II. Dos triángulos que tienen en común un ángulo interior de igual medida, su lado opuesto y la mediana relativa a dicho lado, son congruentes.

III. Dos triángulos tienen entre lados y ángulos internos, cinco elementos en común, entonces son necesariamente congruentes.

A) VFV B) FVF C) FFF

D) VFF E) VVV



PROBLEMA Nº 262

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes y $ED = AC$, calcule $\frac{AB}{BD}$.

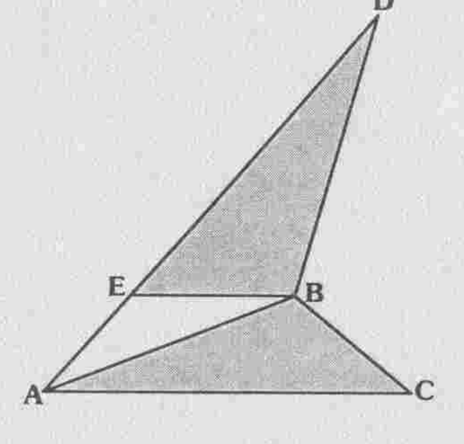
A) 2

B) 1

C) 3

D) 5

E) 7



PROBLEMA Nº 263

En el triángulo ABC, se ubica M en $\overline{AC}$ y N en $\overline{BC}$ tal que $AM = NM$, $AB = NC$ y $m\measuredangle MBC = m\measuredangle MCN = 40°$.

Calcule $m\measuredangle NMB$.

A) 20° B) 10° C) 30°

D) 40° E) 50°

PROBLEMA Nº 264

En el triángulo ABC, se ubica Q en la región interior, tal que $AB = AC$; $AQ = QC$ y $m\measuredangle ABQ + 2(m\measuredangle QBC) = 90°$.

Calcule $m\measuredangle ACB$.

A) 30° B) 60° C) 45°

D) 53° E) 90°

PROBLEMA Nº 265

En el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubica Q, tal que:

$$\frac{m\measuredangle AQB}{4} = \frac{m\measuredangle QBC}{3} = \frac{m\measuredangle ABC}{2} = m\measuredangle BCQ$$

Calcule $m\measuredangle BCQ$.

A) 10° B) 9° C) 18°

D) 20° E) 22°30'

PROBLEMA Nº 266

En el triángulo ABC se ubica el punto medio M de $\overline{AC}$ y se traza la mediatriz de $\overline{AC}$ corta a $\overline{BC}$ en P tal que:

$$m\measuredangle PCA = 15^\circ \quad y \quad \frac{AP}{BP} = \frac{4}{2+\sqrt{3}}$$

Calcule $m\measuredangle MBC$.

A) 30° B) 53°/2 C) 15°
D) 14° E) 18°

PROBLEMA Nº 267

En el triángulo ABC, se traza la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{AM}$, tal que $m\measuredangle ACM = 60^\circ - 2(m\measuredangle MAC)$ y $AH = MC$.

Calcule $m\measuredangle BAM$.

A) 10° B) 15° C) 30°
D) 8° E) 20°

PROBLEMA Nº 268

En los lados AB, BC y AC del triángulo ABC se ubican los puntos D, E y H se ubican los puntos D, E y H, tal que $\overline{EH} \perp \overline{AC}$ y $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BCA) = 2(m\measuredangle BDE)$, si $DB = 2(AH)$. Calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 30° B) 60° C) 37°
D) 45° E) 33°

PROBLEMA Nº 269

Los lados de un triángulo miden 15, $n+7$ y $10+n$. Calcule la medida del ángulo opuesto al menor lado, sabiendo que "n" es el menor valor entero, con $n \neq \{0;1\}$.

A) 53° B) 16° C) 74°
D) 37° E) 30°

PROBLEMA Nº 270

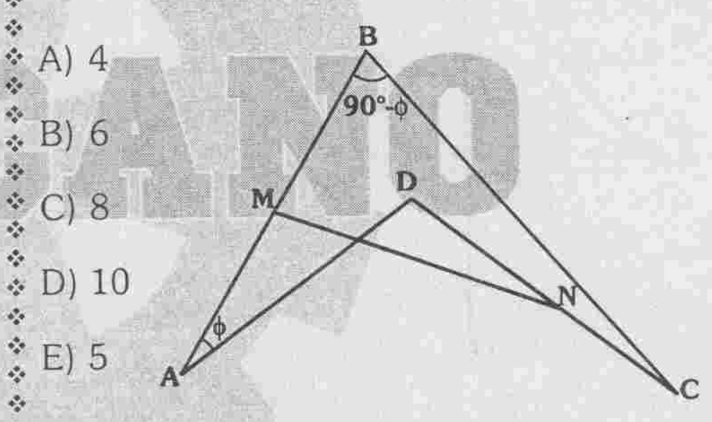
En el triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BD}$ tal que $AD = BC$ y $m\measuredangle ABD = 45^\circ$.

Calcule, $m\measuredangle BCD$.

A) 30° B) 37° C) 53°
D) 37°/2 E) 53°/2

PROBLEMA Nº 271

En el gráfico, $AM = MB$, $CN = ND$, $BC = 16$ y $AD = 12$. Calcule MN.



A) 4
B) 6
C) 8
D) 10
E) 5

PROBLEMA Nº 272

Se tiene el triángulo isósceles ABC ($m\measuredangle ABC > 90^\circ$), se traza la ceviana interior BM, tal que $m\measuredangle MBC = 90^\circ$, en la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica P y se traza $\overline{PS}$ y $\overline{PR}$ perpendiculares a las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.
Si BM=2; PS=4 y PR=1.

Calcule $m\measuredangle ACB$.

A) 15° B) 22,5° C) 30°
D) 26,5° E) 18,5°

PROBLEMA Nº 273

Sea el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior AD, tal que $DC = 2(BD)$, se prolonga $\overline{AD}$ hasta E tal que $AC = 2(BE)$ y $AD = 2\sqrt{3}$. Calcule ED.

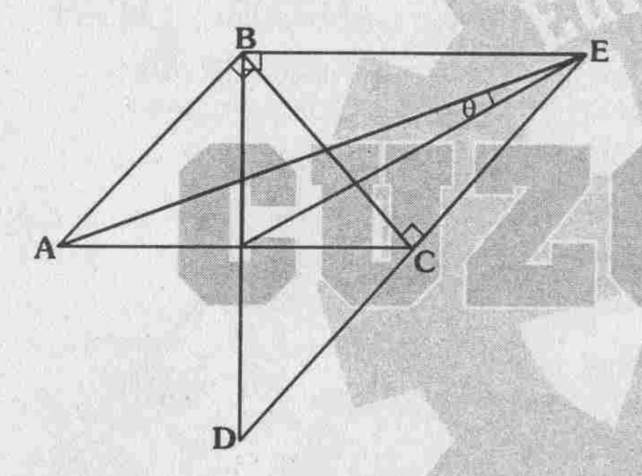
A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 274

En el gráfico, $AB = BC$ y $DC = CE$.

Calcule θ.

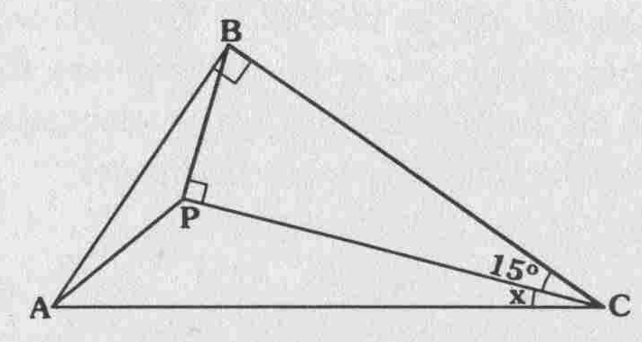


A) 8° B) 14° C) 16°

D) 37° E) 37°/2

PROBLEMA Nº 275

En el gráfico, $AP = PB$, calcule x.

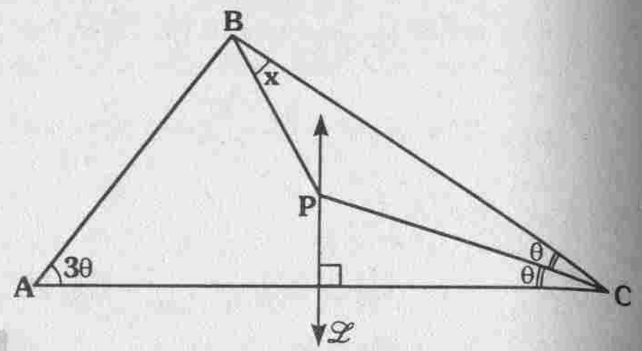


A) 3°30' B) 12°30' C) 7°30'

D) 11°30' E) 15°

PROBLEMA Nº 276

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AC}$ y $AB = PC$, calcule x.



A) 30° B) 26,5° C) 36°

D) 18,5° E) 22,5°

PROBLEMA Nº 277

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BP, tal que $m\measuredangle BAC = 32°$, $m\measuredangle ACB = 23°$ y $m\measuredangle ABP = 72°$.

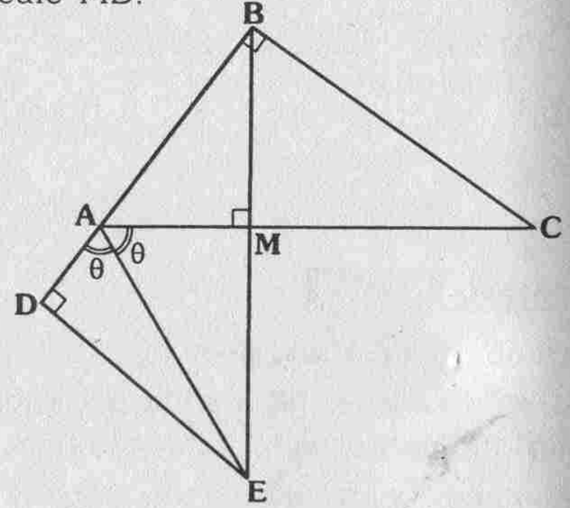
Calcule $\dfrac{PB}{BC}$.

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{6}/2$ C) $\sqrt{2}$

D) $\sqrt{3/2}$ E) 2/5

PROBLEMA Nº 278

En el gráfico, $AB + AM = 12$ y $EM = 5$, calcule MB.

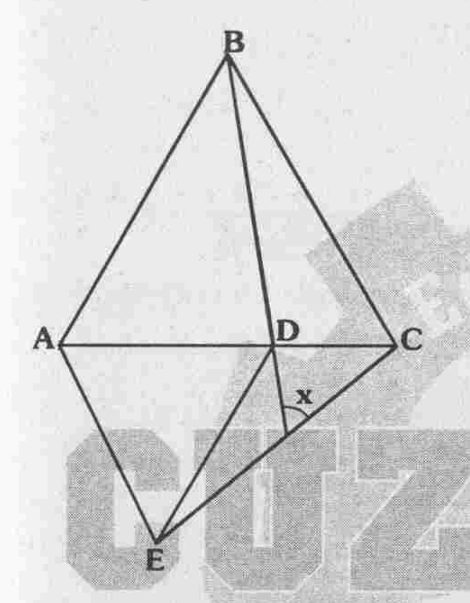


A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

PROBLEMA Nº 279

Del gráfico los triángulos ABC y ADE son equiláteros.

Calcule x.



A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

PROBLEMA Nº 280

En un triángulo ABC se ubican los puntos M y N en $\overline{AC}$ y en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ respectivamente, si AB = MC, AC = MN ; $\overline{AB} // \overline{MN}$, m∢BNM = 35°.

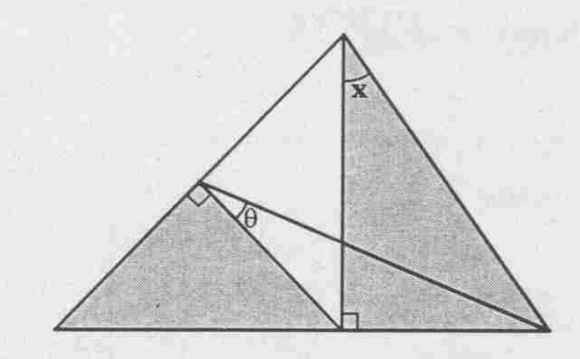
Calcule m∢BAC.

A) 35° B) 55° C) 70°
D) 45° E) 20°

PROBLEMA Nº 281

Del gráfico, las regiones sombreadas son congruentes.

Calcule x en función de θ .



A) θ B) θ + 30°
C) 2θ D) 90° − θ
E) 90° − 2θ

PROBLEMA Nº 282

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$ tal que BD = AC m∢BCA = 50° y m∢CBD = 30° .

Calcule m∢BAC .

A) 80° B) 30° C) 50°
D) 60° E) 70°

PROBLEMA Nº 283

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{AP}$ tal que AP = PC, luego se ubica H en $\overline{AP}$ tal que :

m∢AHB = 90° ; BH = 12

y BP = 13

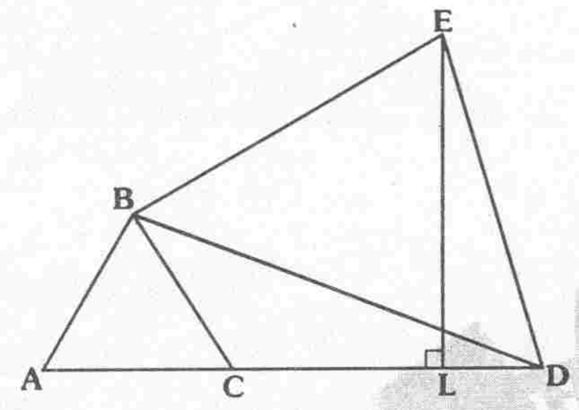
Calcule PC.

A) 25 B) 23
C) 20 D) 18
E) 16

PROBLEMA Nº 284

Del gráfico, los triángulos ABC y BED son equiláteros $AD = 6$.

Calcule EL.



A) 3

B) $6\sqrt{3}$

C) $3\sqrt{3}$

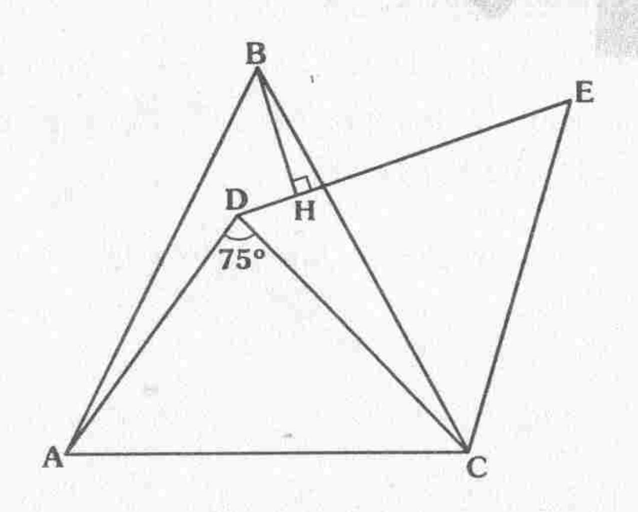
D) $4\sqrt{3}$

E) 4

PROBLEMA Nº 285

Del gráfico, los triángulos ABC y CDE son equiláteros; $AD = 8$.

Calcule la distancia de H a $\overline{BE}$.



A) 8 B) 4 C) 3

D) 2 E) 1

PROBLEMA Nº 286

En la región interior de un triángulo rectángulo isósceles ABC recto en B se ubica el punto P, tal que:

$$6(PC) = 3(PB) = 2(PA)$$

Calcule $m\sphericalangle BPC$.

A) 30° B) 105° C) 120°

D) 135° E) 150°

PROBLEMA Nº 287

En el triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la ceviana interior $\overline{BD}$, tal que $m\sphericalangle BAD = 2(m\sphericalangle ABD)$ y $AB = DC$.

Calcule $m\sphericalangle BCA$.

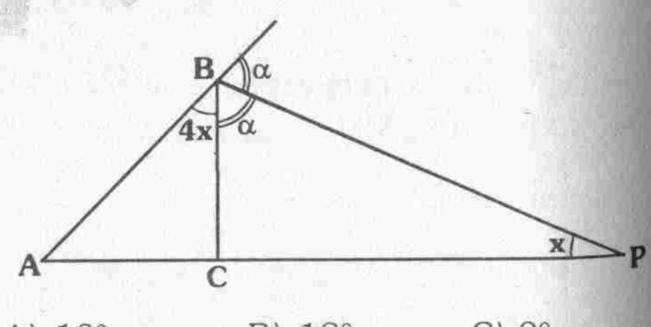
A) 15° B) 45° C) 30°

D) 20° E) 60°

PROBLEMA Nº 288

Del gráfico, $CP = AB + BC$.

Calcule x.



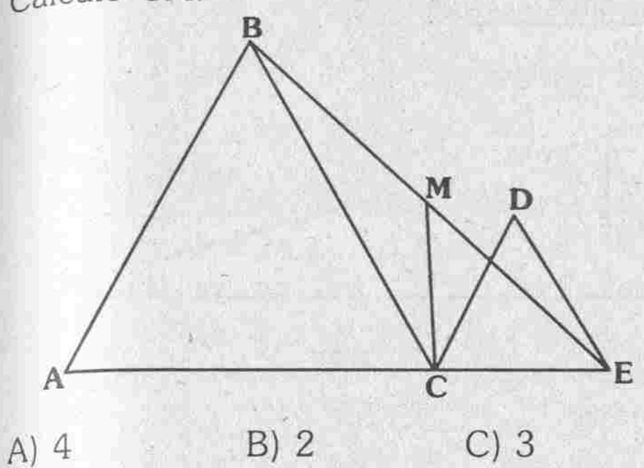
A) 10° B) 18° C) 9°

D) 15° E) 36°

PROBLEMA Nº 289

Del gráfico, los triángulos ABC y CDE son equiláteros, $BM = ME$ y $BD = 6$.

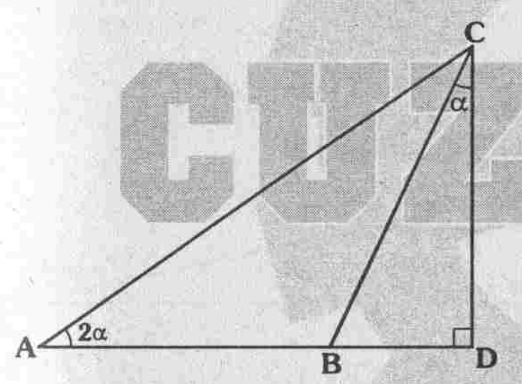
Calcule CM.



A) 4 B) 2 C) 3
D) $3\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 290

Del gráfico, AB = CD . Calcule α



A) 37° B) 30° C) 53°
D) 37°/2 E) 53°/2

PROBLEMA Nº 291

En el triángulo ABC , se ubica un punto interior P, tal que BC = AP ,

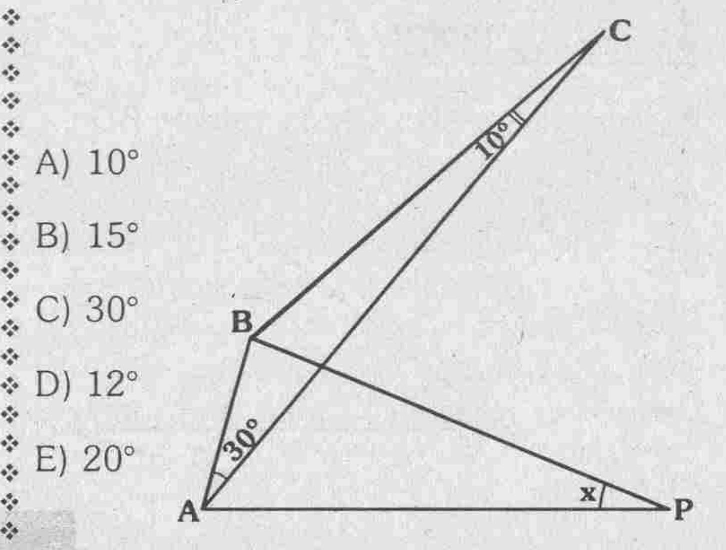
$$m\sphericalangle PBC = m\sphericalangle PCB = m\sphericalangle PAC = \frac{m\sphericalangle ABP}{5}$$

Calcule $m\sphericalangle BAP$.

A) 30° B) 20° C) 40°
D) 15° E) 50°

PROBLEMA Nº 292

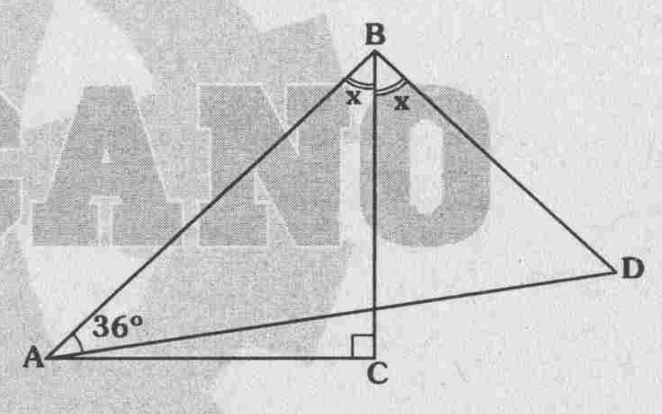
Del gráfico, BC=AP=BP. Calcule x



A) 10°
B) 15°
C) 30°
D) 12°
E) 20°

PROBLEMA Nº 293

Del gráfico, AD = 2(BC) . Calcule x.



A) 40° B) 42° C) 46°
D) 48° E) 36°

PROBLEMA Nº 294

En los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ de un triángulo ABC se ubican los puntos Q y P respectivamente tal que AQ = PC , las mediatrices de $\overline{AC}$ y $\overline{PQ}$ se intersecan en L (punto interior al triángulo ABC), si $m\sphericalangle ABC = 2(m\sphericalangle BCL)$.

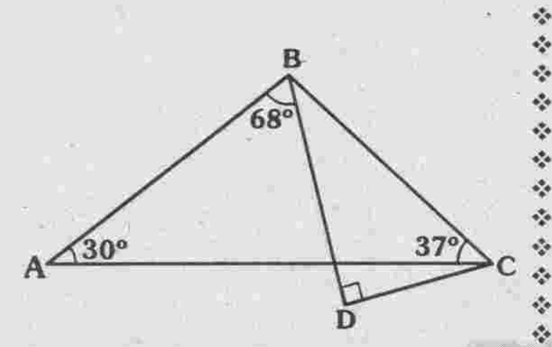
Calcule $m\sphericalangle ACB$.

A) 30° B) 45° C) 53°
D) 60° E) 20°

PROBLEMA Nº 295

En el gráfico, $AB = 12\sqrt{2}$, calcule BD.

A) 8
B) 9
C) 10
D) $5\sqrt{2}$
E) $6\sqrt{2}$

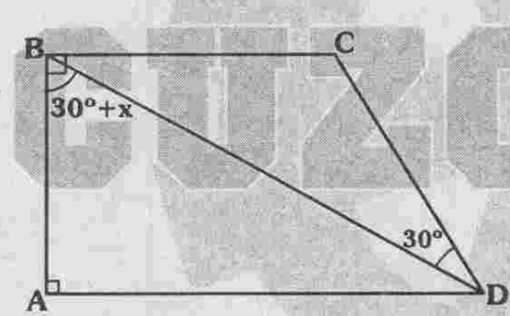


PROBLEMA Nº 296

En el gráfico, $3(BC) = 2(AD)$.

Calcule x.

A) 15°
B) 22°30'
C) 30°
D) 26°30'
E) 18°30'



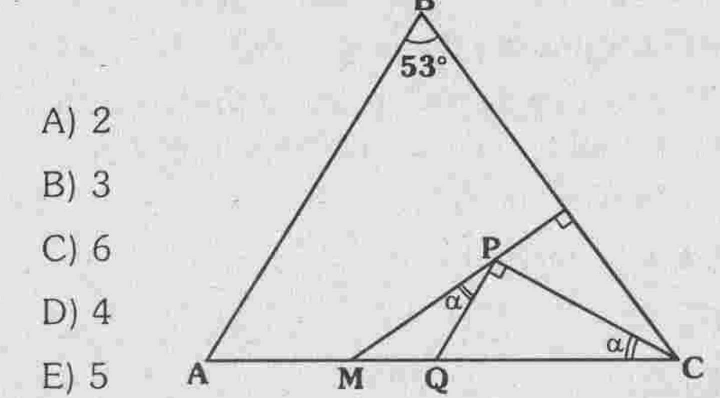
PROBLEMA Nº 297

En el gráfico, se tiene que:

$$AB = 10 \quad y \quad BC = QC = 6$$

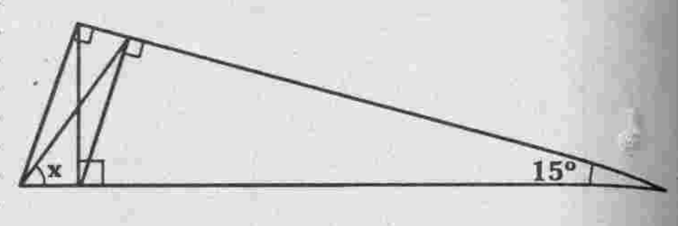
Calcule MP.

A) 2
B) 3
C) 6
D) 4
E) 5



PROBLEMA Nº 298

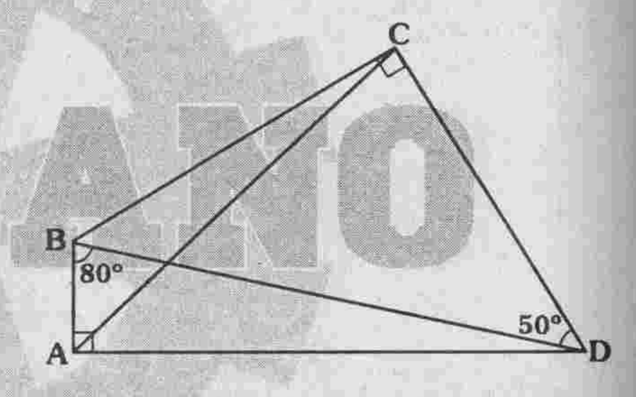
Del gráfico, calcule x.



A) 70° B) 69° C) 61°
D) 58° E) 53°

PROBLEMA Nº 299

Del gráfico, calcule $\dfrac{AC}{BD}$.

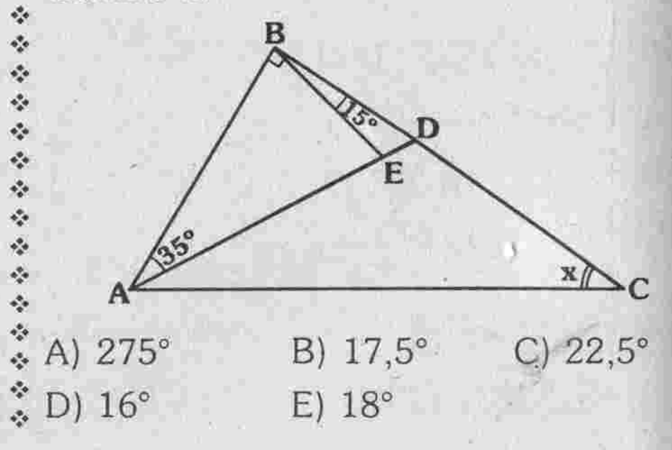


A) 1/2 B) 1/3 C) $\sqrt{3}/3$
D) $\sqrt{2}/2$ E) $\sqrt{3}/2$

PROBLEMA Nº 300

Del gráfico $DC = 2(BE)$.

Calcule x.



A) 275° B) 17,5° C) 22,5°
D) 16° E) 18°

Problemas Resueltos Olímpicos

Esta breve sección está dirigido a estudiantes que deseen afianzar aún más sus conocimientos de geometría, sobre congruencia de triángulos. Contiene diversos problemas de Olimpiadas Matemáticas y de algunos foros geométricos. Tomar en cuenta que además de los conocimientos básicos es importante una adecuada argumentación.

PROBLEMA Nº1

VIII olimpiada del cono sur 2007-exámen selectivo, Argentina

Dado un triángulo equilátero ABC, sea M punto del lado BC, con $M \neq B$ y $M \neq C$. Se considera el punto N tal que el triángulo BMN sea equilátero y A y N estén en distintos semiplanos respecto de $\overline{BC}$. Sean P, Q y R puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CM}$ respectivamente. Demostrar que el triángulo PQR es equilátero.

PROBLEMA Nº2

38° international mathematical Olympiad (Mar de Plata-Argentina)/ 35° imo(1994)

Se tiene el triángulo isósceles $(AB = BC)$, en la prolongación de la altura BH se toma el punto M tal que $\overline{MC} \perp \overline{BC}$, en $\overline{BC}$ se toma E y en la prolongación de $\overline{BA}$ el punto F, tal que $\overline{EF}$ interseca a $\overline{AC}$ en N. Demostrar que $\overline{MN} \perp \overline{EF}$ si y sólo si $EN = NF$.

PROBLEMA Nº3

(6° th Russian 1998 problems)

En el triángulo ABC, M es el punto medio de $\overline{CA}$ y $\overline{BL}$ es la bisectriz angular de B, la línea paralela a $\overline{BC}$ por L encuentra a $\overline{BM}$ en E y la línea a través de M paralela a $\overline{BA}$ encuentra a $\overline{BL}$ en D, demostrar que $\overline{ED}$ es perpendicular a $\overline{BL}$.

PROBLEMA Nº4

Se tiene el triángulo ABC, en el cual se trazan las bisectrices interiores $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$. Demostrar que el ángulo BCA mide 60° si y solo si $AE + BD = AB$.

PROBLEMA Nº5

Se tiene el triángulo equilátero ABC, se ubica P y Q en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, tal que $\overline{PQ} // \overline{AC}$, M es punto medio de $\overline{AQ}$ y O es centro del triángulo PBQ.

Demostrar que $m\measuredangle OMC = 90°$.

PROBLEMA Nº6

Se tiene el triángulo ABC de circuncentro O, se ubica, M y N en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, tal que $m\measuredangle ABC = m\measuredangle MON$.

Demuestre que AC es menor o igual que el perímetro del triángulo MBN.

PROBLEMA Nº7

En el cuadrilátero convexo ABCD, se trazan exteriormente los triángulos equiláteros AMB, BNC y CSD. Si P, Q y R son puntos medios de $\overline{MN}$, $\overline{NS}$ y $\overline{AD}$ respectivamente. Demuestre que el triángulo PQR es equilátero.

PROBLEMA Nº8

P es un punto interior del triángulo ABC, tal que $m\measuredangle PAC = m\measuredangle PBC$; las perpendiculares de P, trazadas a $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ cortan a estos en L y M respectivamente. Demuestre que $DL = DM$, cuando D es punto medio de $\overline{AB}$.

PROBLEMA Nº9

Canadá 1998

En el triángulo ABC se cumple $m\measuredangle BAC = 40°$ y $m\measuredangle ABC = 60°$, X es un punto en el interior del triángulo tal que $m\measuredangle XBA = 20°$ y $m\measuredangle XCA = 10°$. Demuestre que $\overline{AX}$ es perpendicular a $\overline{BC}$.

PROBLEMA Nº10

En un triángulo ABC, la mediana BB' y la altura CF son congruentes y $m\measuredangle CBB' = m\measuredangle FCB$. Demuestre que el triángulo ABC es equilátero.

PROBLEMA Nº11

Olimpiada de mayo 2008

Se tiene el rectángulo ABCD, se ubica P en $\overline{BC}$ tal que $m\measuredangle APD = 90°$. En los triángulos ABP y PDC se trazan las alturas $\overline{BQ}$ y $\overline{CR}$ respectivamente. Probar que el centro del rectángulo está en $\overline{QR}$.

PROBLEMA Nº12

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BP y la mediana CQ, tal que $m\measuredangle BQC = m\measuredangle PBQ$ y $AP = 2(PC)$. Demuestre que $m\measuredangle ABC = 90°$

PROBLEMA Nº13

Sea el triángulo equilátero ABC, ubiquemos P un punto en la región interior, desde el cual se traza $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$, $\overline{PR} \perp \overline{BC}$ y $\overline{PS} \perp \overline{AC}$, con $Q \in \overline{AB}$, $R \in \overline{BC}$ y $S \in \overline{AC}$, indique la región en la cual PQ, PR y PS son las longitudes de los lados de un triángulo.

PROBLEMA Nº14

XLIX Olimpiada Nacional de Matemáticas (tercera ronda-Bulgaria 2000)

Dado el cuadrilátero convexo ABCD, tal que $m\measuredangle BCD = m\measuredangle CDA$, la bisectriz del ángulo ABC interseca al segmento CD en E, probar que $m\measuredangle AEB = 90°$ si y solo sí $AB = AD + BC$.

PROBLEMA Nº15

En el triángulo ABC se ubica D en $\overline{AC}$ tal que $AC = BD$ y

$$\frac{m\measuredangle BAC}{3} = \frac{m\measuredangle DBC}{2} = \frac{m\measuredangle ACB}{4}$$

Halle $m\measuredangle BAC$.



SOLUCIONARIO

Ciclos

- ANUAL
- CEPRE-UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO
- OLIMPIADAS

Congruencia de Triángulos

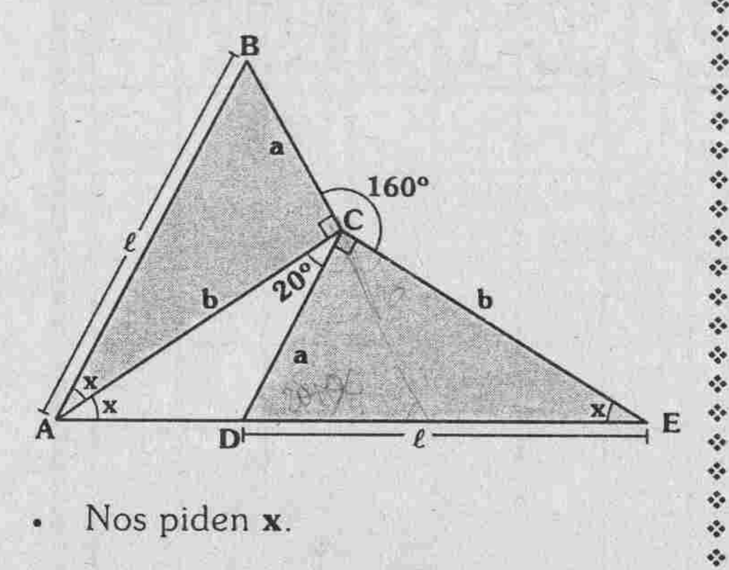
Geometría





Solucionario Ciclo Anual

Resolución Nº 1



- Nos piden **x**.
- Dato: ⊿ ACE ≅ ⊿ECD
- Lo primero que debemos hacer es reconocer que lados tienen igual longitud (no dejarse llevar por el gráfico, sino por razonamientos lógicos).
- Sea: $AC = b$ y $BC = a$
- Para $\overline{CD}$ (cateto), sólo hay dos posibilidades, que mida "a" o "b".
- Si $CD = b$, habría contradicción pues:

$$m\sphericalangle ADC > 90°$$

- Luego:

$$CD = a \quad y \quad CE = b$$

- Como:

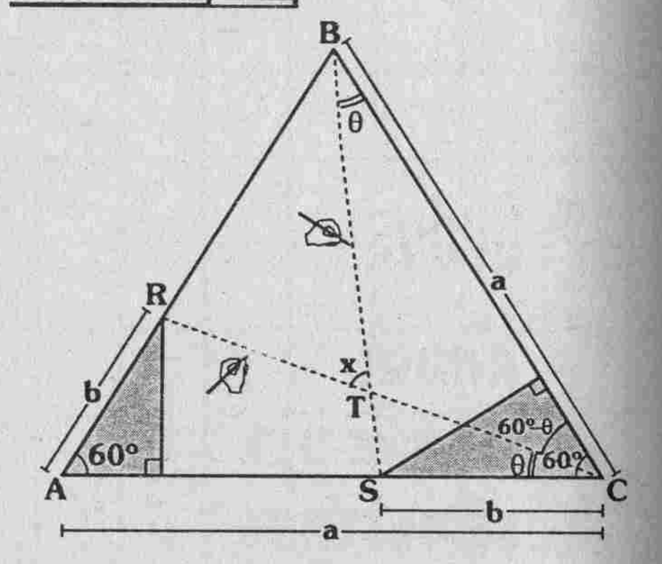
$$⊿ ACB \cong ⊿ ECD \Rightarrow m\sphericalangle CED = x$$

- Δ ACE: isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle CAD = x$
- Δ ACE: $x + x + 110° = 180°$

$$\therefore \mathbf{x = 35°}$$

Clave E

Resolución Nº 2



- Nos piden x.
- Como los triángulos rectángulos son congruentes, aprovechamos que las hipotenusas tienen igual longitud, AR=SC.
- ΔABC : equilátero, luego notamos:
- $\Delta RAC \cong \Delta SCB$ (LAL)

$$\Rightarrow m\sphericalangle ACR = m\sphericalangle CBS = \theta$$

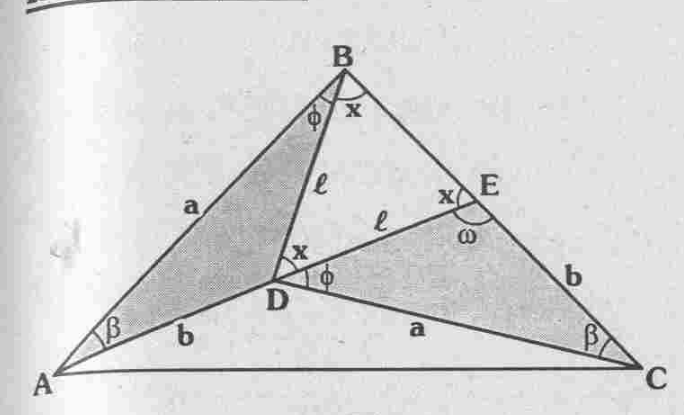
- También: $m\sphericalangle BCT = 60° - \theta$
- En ΔTCB:

$$x = \theta + 60° - \theta$$

$$\therefore \mathbf{x = 60°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 3



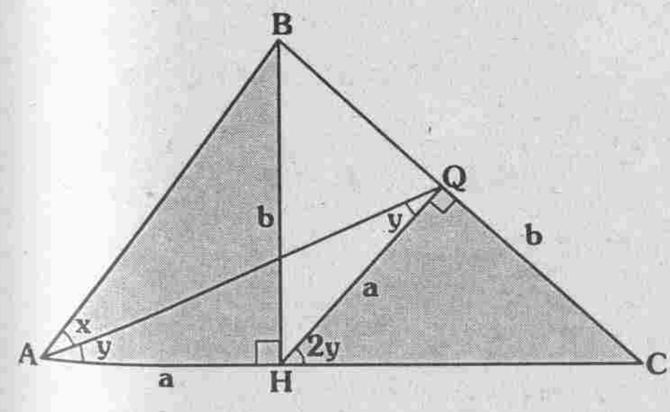
- Se nos pide **x**.
- Por dato: $\Delta ABD \cong \Delta CDE$
- Primero hay que reconocer que lados y ángulos se repiten en ambos triángulos.
- Sea $m\measuredangle BAD = \beta$, se observa $x > \beta$
- En ΔDEC : $\omega > x \Rightarrow \omega \neq \beta$

  $\Rightarrow m\measuredangle DCE = \beta$
- Como: $\beta + \phi = x \Rightarrow m\measuredangle DEB = x$
- Por la congruencia: $DB = DE$
- Luego: ΔDEB es equilátero.

$$\therefore \mathbf{x = 60°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 4



- Piden: **x/y**.
- Tenemos: $\triangle AHB \cong \triangle HQC$
- Sea $AH = a$ y $BH = b$, en

  $\triangle BHQ$: $b > HQ \Rightarrow HQ = a$
- Luego: ΔAHQ : isósceles

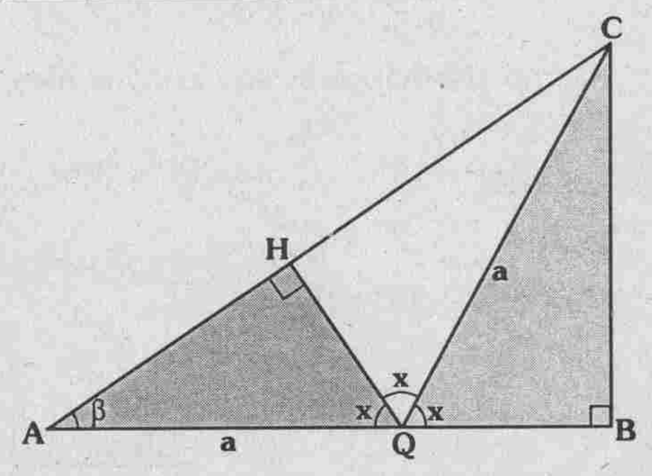
  $\Rightarrow m\measuredangle QHC = 2y$
- Por la congruencia:

  $2y = x + y \Rightarrow x = y$

$$\therefore \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}} = \mathbf{1}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 5



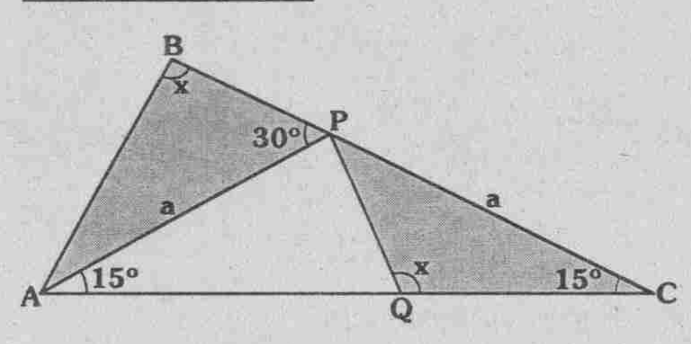
- Piden **x**
- Dato: $\triangle AHQ \cong \triangle CBQ$
- Reconocemos rápidamente $AQ = QC$.
- Es decir ΔAQC es isósceles, entonces:

  $AH = HC$ y $m\measuredangle AQH = m\measuredangle HQC$
- Como: $m\measuredangle CQB > \beta \Rightarrow m\measuredangle CQB = x$
- En Q : $x + x + x = 180°$

$$\therefore \mathbf{x = 60°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 6



- Piden **x**.
- Dato: $\Delta ABP \cong \Delta PQC$

$\Rightarrow AP = PC$, es decir ΔAPC es isósceles.

- En ΔAPC, por ángulo exterior:

$$m\sphericalangle BPA = 30°$$

- Como los triángulos son congruentes, entonces:

$m\sphericalangle BAP = 15°$ y $m\sphericalangle QPC = 30°$

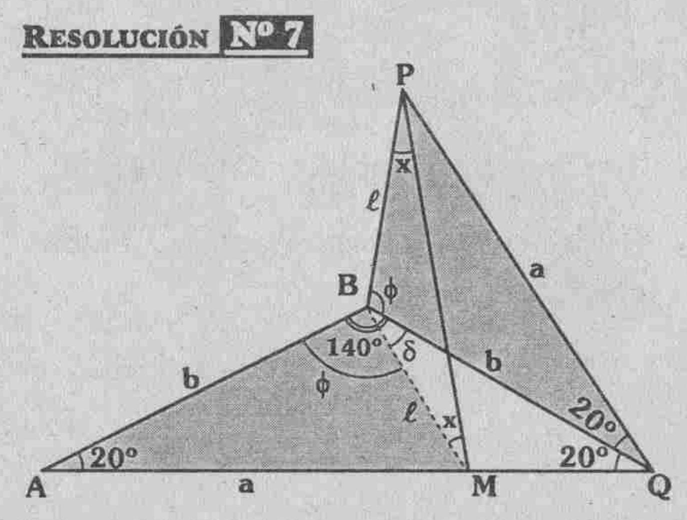
- Luego:

$$x + 30° + 15° = 180°$$

$$\therefore \mathbf{x = 135°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 7



- Piden **x**.
- Al completar "ángulos", nos damos cuenta que el, ΔABQ es isósceles.
- Se traza $\overline{BM}$, pues:

$\Delta BAM \cong \Delta BQP$ (LAL)

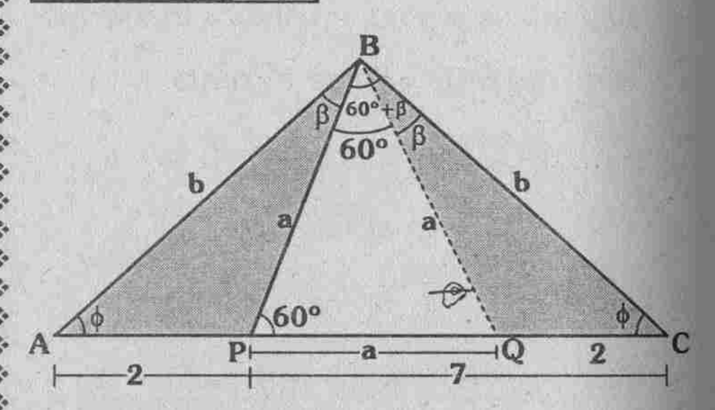
$\Rightarrow$ BM=MP, luego el ΔMBP es isósceles

- También: $m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle PBQ = \phi$
- Como: $\phi + \delta = 140°$
- ΔMBP: $x + x + \underbrace{\phi + \delta}_{140°} = 180°$

$$\therefore \mathbf{x = 20°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 8



- Se nos pide: **a**.
- Del gráfico, tenemos que el ΔABC es isósceles, entonces AB=BC.
- Se traza $\overline{BQ}$ tal que $m\sphericalangle QBC = \beta$
- Luego: $m\sphericalangle PBQ = 60°$
- Como: $\phi + \beta = 60° \Rightarrow \Delta PBQ$ es equilátero

$$\Delta ABQ \cong \Delta QBC \Rightarrow QC = 2$$

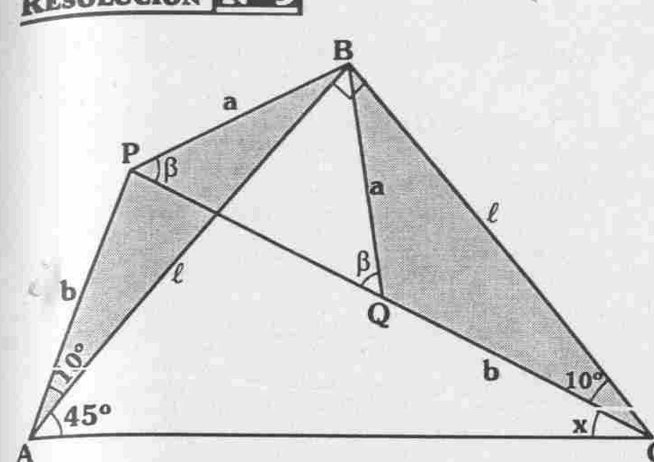
Finalmente:

$$a + 2 = 7$$

$$\therefore \mathbf{a = 5}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 9



- Se nos pide **x**.
- Nos damos cuenta rápidamente:

ΔPBQ y ΔABC son isósceles

$\Rightarrow PB = BQ$ y $AB = BC$

$\Delta APB \cong \Delta CBQ$ (LLL)

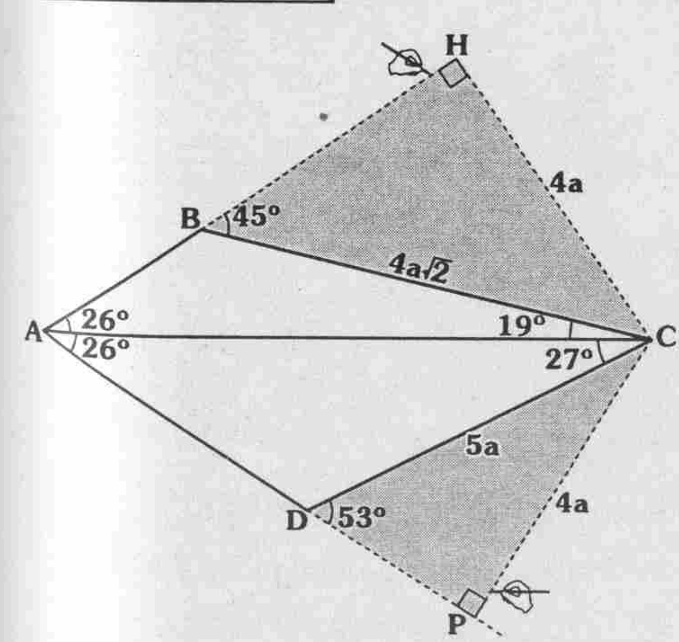
$\Rightarrow m\measuredangle BCQ = 10°$

- Finalmente: $x + 10° = 45°$

$\therefore \mathbf{x = 35°}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 10



- Piden: $\dfrac{BC}{DC}$
- Como: $\overrightarrow{AC}$ es bisectriz del $\measuredangle BAD$, se traza $\overline{CH} \perp \overrightarrow{AB}$ y $\overline{CP} \perp \overrightarrow{AD}$.
- También notamos:

$m\measuredangle CBH = 45°$ y $m\measuredangle CDP = 53°$ ambos son notables.

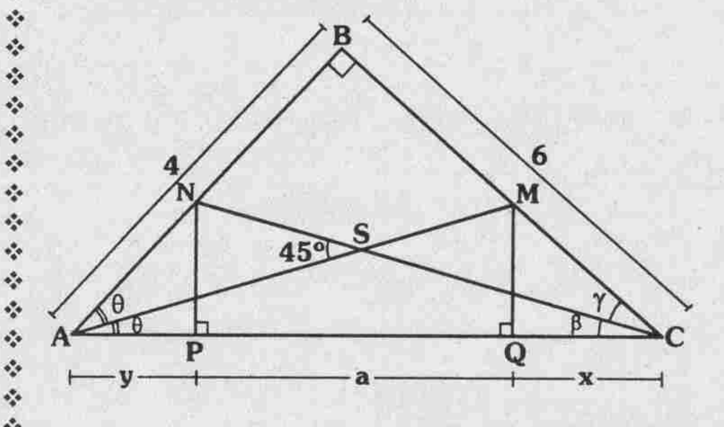
- $⊿DPC$: sea $CP = 4a \Rightarrow BC = 5a$
- Por T. de la bisectriz: $CP = CH = 4a$
- $⊿BHC$, como $CH = 4a \Rightarrow BC = 4a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{4a\sqrt{2}}{5a}$$

$$\therefore \mathbf{\frac{BC}{DC} = \frac{4\sqrt{2}}{5}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 11



- Nos piden: $x - y$
- En ΔASC: $\theta + \beta = 45°$
- En $⊿ABC$: $2\theta + \beta + \gamma = 90°$

$\Rightarrow \beta = \gamma$

- Es decir $\overrightarrow{CN}$ es bisectriz del $\measuredangle ACB$
- Por teorema de la bisectriz:

$CP = CB \Rightarrow x + a = 6 \quad \ldots (I)$

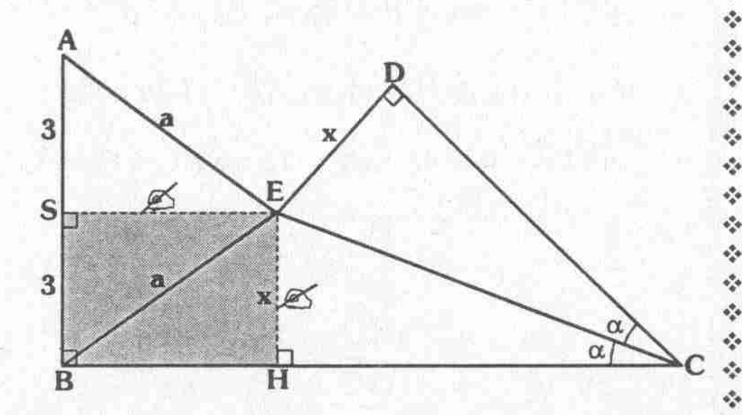
$AQ = AB \Rightarrow y + a = 4 \quad \ldots (II)$

- Restando (I) y (II):

$$\mathbf{x - y = 2}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 12



- Nos piden **x**.
- Se traza $\overline{EH} \perp \overline{BC}$, por teorema de la bisectriz:

$$EH = ED = x$$

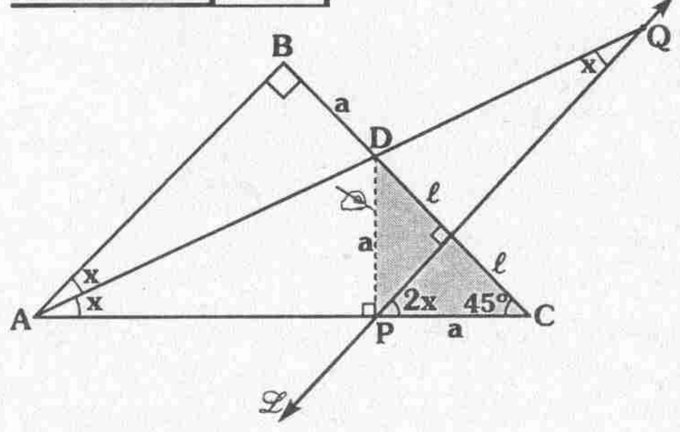
- ΔAEB : isósceles , $\overline{ES}$ es altura y mediana.

$$\Rightarrow AS = SB = 3$$

$$\therefore \mathbf{x = 3}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 13



- Nos piden **x**.
- Como $\overrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de:

$$\overline{CD} \Rightarrow PD = PC$$

- También:

  * $\overrightarrow{\mathscr{L}} // \overline{AB} \Rightarrow m\sphericalangle BAD = x$
  * $\overline{AD}$ es bisectriz del $\sphericalangle BAC$

$$\Rightarrow m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle DAC = x$$

- Por recíproco del teorema de la bisectriz.
- Como $DB = DP$ y $m\sphericalangle DBA = 90°$

$$\Rightarrow m\sphericalangle DPA = 90°$$

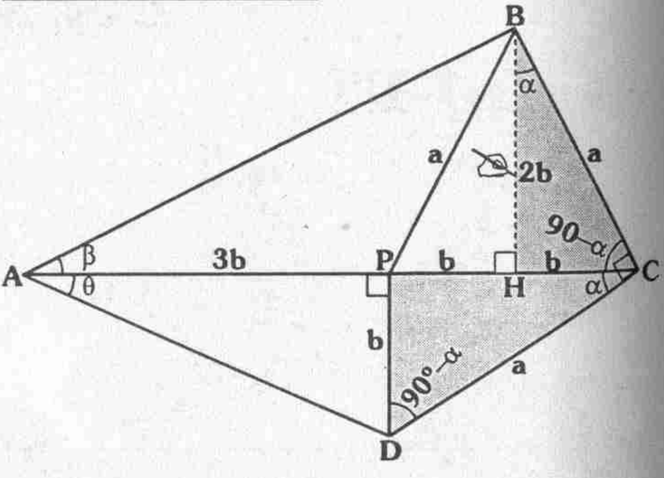
- $\triangle DPC$: isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle PCD = 45°$

$$\Rightarrow 2x = 45°$$

$$\therefore \mathbf{x = \frac{45°}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 14



- Piden: $m\sphericalangle BAD$
- De los datos:

$$PC = 2b \ \text{ y } \ AP = 3b$$

- Hallemos lo que nos piden por partes:

$$m\sphericalangle BAD = \beta + \theta$$

- Para ello en el ΔPBC, que es isósceles tracemos la altura BH, con ello tendremos: $PH = PC = b$
- También:

$$\measuredangle PDC \cong \measuredangle HCB \text{ (ALA)} \Rightarrow PD = b$$
$$BH = 2b$$

- $\measuredangle APD$: $AP = 3b$ y $PD = b$

$$\Rightarrow \theta = \frac{37^\circ}{2}$$

- $\measuredangle AHB$: $AH = 4b$ y $BH = 2b$

Es decir: $AH = 2(BH)$

$$\Rightarrow \beta = \frac{53^\circ}{2}$$

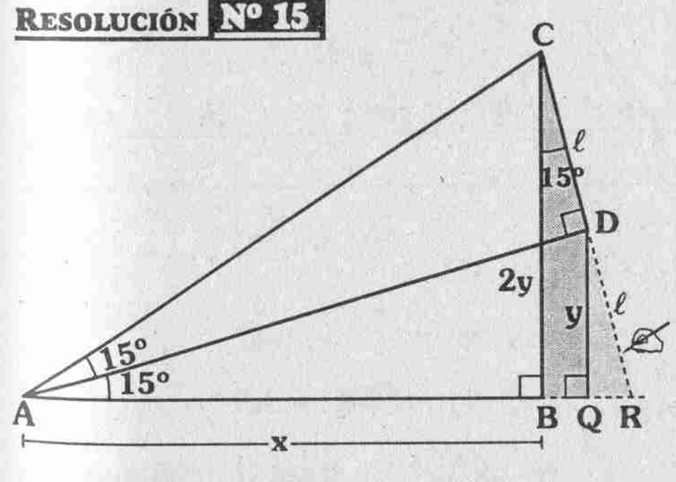
- Finalmente:

$$m\measuredangle BAD = \frac{53^\circ}{2} + \frac{37^\circ}{2}$$

$$\therefore \mathbf{m\measuredangle BAD = 45^\circ}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 15



- Nos piden: $\frac{x}{y}$
- Primero al "completar ángulos", nos damos cuenta:

$$m\measuredangle CAD = m\measuredangle DAB = 15^\circ$$

- Nos conviene prolongar $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$, pues el ΔACR será isósceles, luego:

$$CD = DR$$

- $\measuredangle CBR$, por base media:

$$CB = 2y$$

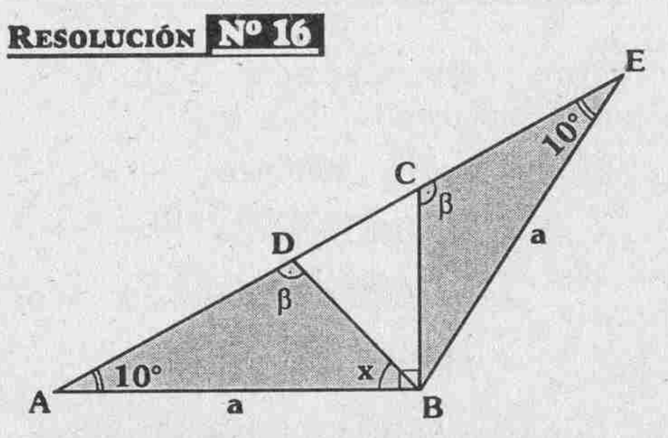
- $\measuredangle ABR$: notable de 30° y 60°:

$$\Rightarrow \quad x = 2y\sqrt{3}$$

$$\therefore \ \mathbf{\frac{x}{y} = 2\sqrt{3}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 16



- Nos piden x.
- Tenemos por dato:

$$\Delta ABD \cong \Delta EBC$$

- Reconozcamos "lados y ángulos" iguales en ambos triángulos.
- Del gráfico: $m\measuredangle BCE > 90^\circ$
- Como los ángulos DAB y ABD son agudos, entonces:

$$m\measuredangle ADB = m\measuredangle BCD = \beta$$
$$\Rightarrow AB = BE$$

- ΔABE: isósceles $\Rightarrow m\measuredangle DAB = 10^\circ$
- $\measuredangle ABC$: Por ángulo exterior:

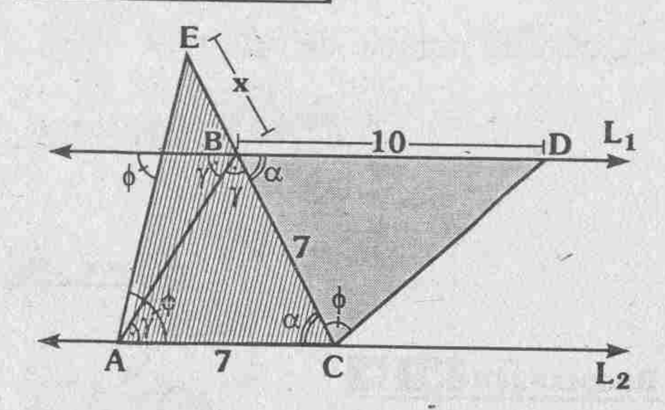
$$\beta = 90^\circ + 10 = 100^\circ$$

- En ΔADB : $x+10°+\beta=180°$

$$\therefore\ \mathbf{x=70°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 17



- Piden: **x**
- Como $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, entonces:
  - $m\measuredangle BAC=\gamma$
  - $m\measuredangle ACB=m\measuredangle CBD=\alpha$
  - $m\measuredangle EAC=\phi$
- Con ello ΔABC es isósceles:

$$AC=BC=7$$

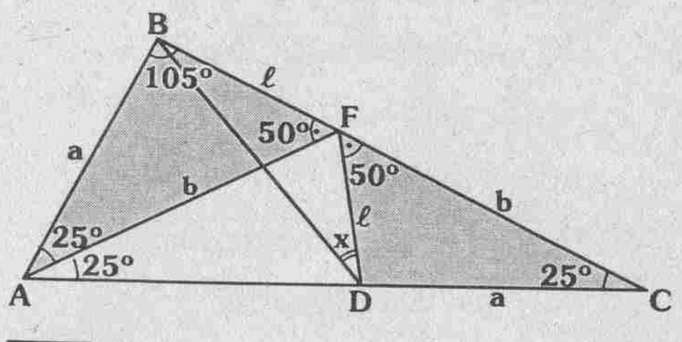
$$\Rightarrow \Delta EAC\cong\Delta DCB\ \text{(LAL)}$$

$$\Rightarrow\ x+7=10$$

$$\therefore\ \mathbf{x=3}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 18



- Piden **x**.
- Completando ángulos, tendremos:

$$m\measuredangle FAD=m\measuredangle ACE=25°$$

$$\Rightarrow \Delta AFC \text{ es isósceles}$$

$$\Rightarrow \Delta BAF\cong\Delta DCF\ \text{(LAL)}$$

$$\Rightarrow BF=FD\ \ \text{y}\ \ m\measuredangle DFC=50°$$

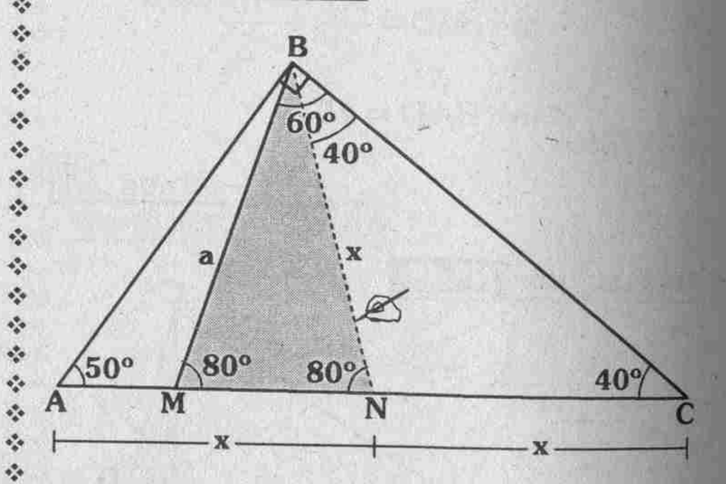
- En ΔBDF , por ángulo exterior:

$$x+x=50°$$

$$\therefore\ \mathbf{x=25°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 19



- Piden: AC
- De los datos, tenemos:

$$m\measuredangle BMC=80°$$

- En el $\triangle ABC$ se traza la mediana BN, por teorema:

$$AN=NC=BN=x$$

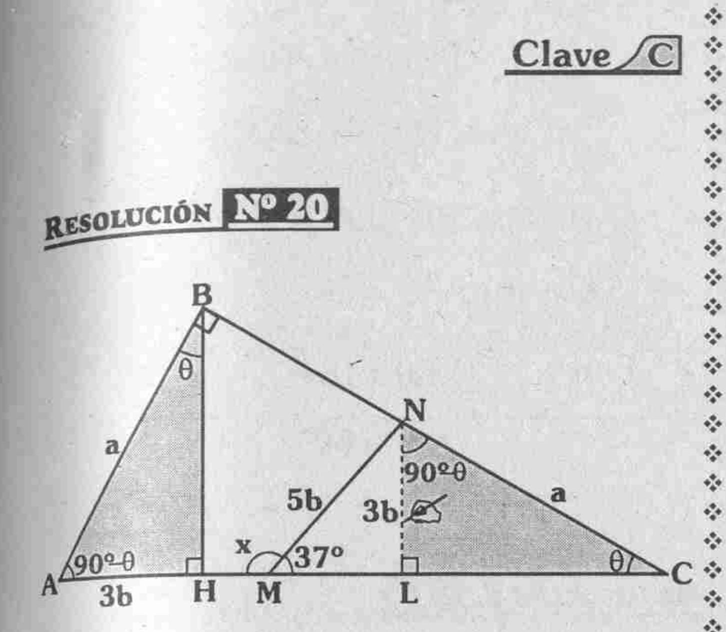
- ΔBNC : isósceles $\Rightarrow$ $m\measuredangle BNM=80°$
- ΔMBN : $x=a$

$\Rightarrow AC = 2x$

$\therefore$ **AC = 2a**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 20



- Nos piden **x**.
- De los datos:

  AH=3b y MN=5b

- Como:

  AB=NC y m∢ABH = m∢NCA

- Trazamos:

  $\overline{NL} \perp \overline{AC}$

- ⊿ AHB ≅ ⊿ NLC (LAL)

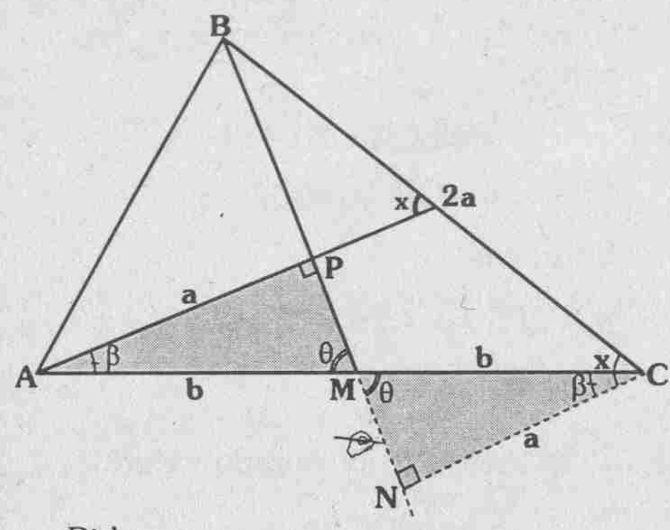
  $\Rightarrow NL = 3b$

- ⊿MLN notable de 37°.

  $\therefore$ **x = 143°**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 21



- Piden **x**.
- Para ubicar un triángulo rectángulo donde "x" sea la medida de un ángulo interior, se prolonga $\overline{BM}$ y se traza $\overline{CN} \perp \overline{BM}$, entonces:

  ⊿ APM ≅ ⊿CNM (LAL)

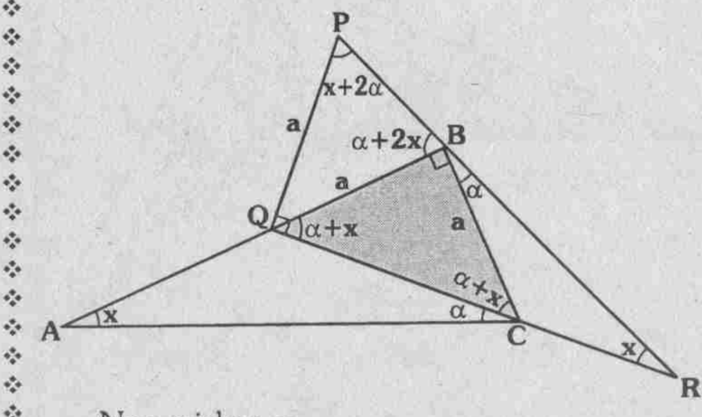
  $\Rightarrow AP = NC = a$

- Como $\overline{AP} // \overline{NC} \Rightarrow$ m∢NCB = x
- En ⊿BNC: BC = 2(NC)

  $\therefore$ **x = 60°**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 22



- Nos piden **x**.

- Tenemos como dato que los triángulos ABC y PQR son congruentes, ahora reconozcamos que elementos se repiten como:

$$m\sphericalangle BCA = 2\alpha + x \quad y$$
$$m\sphericalangle QRC = x$$

- Entonces:

$m\sphericalangle QPR = x + 2\alpha$; $m\sphericalangle BAC = x$; y $PQ = BC$

- En el ΔAQC, por ángulo exterior:

$$m\sphericalangle BQC = \alpha + x$$

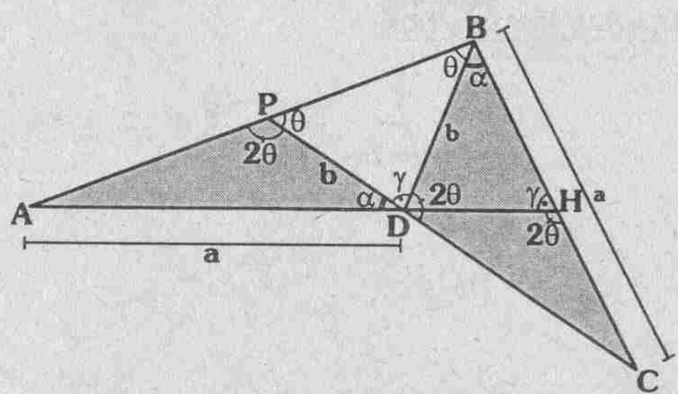
- $\measuredangle BQC$: isósceles $\Rightarrow \alpha + x = 45°$
- También:

ΔPQB: isósceles

$$2\alpha + x = \alpha + 2x \Rightarrow x = \alpha$$
$$\Rightarrow x + x = 45°$$
$$\therefore \mathbf{x = \frac{45°}{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 23



- Piden θ
- ΔPDB: isósceles $\Rightarrow PD = DB$
- Por ángulo exterior en ΔPDB:

$$m\sphericalangle BDC = 2\theta$$

- Luego:

$$m\sphericalangle PDB = m\sphericalangle DHB = \gamma$$
$$\Rightarrow m\sphericalangle PDA = m\sphericalangle DBC = \alpha$$

- $\Delta ADP \cong \Delta CBD$ (LAL)

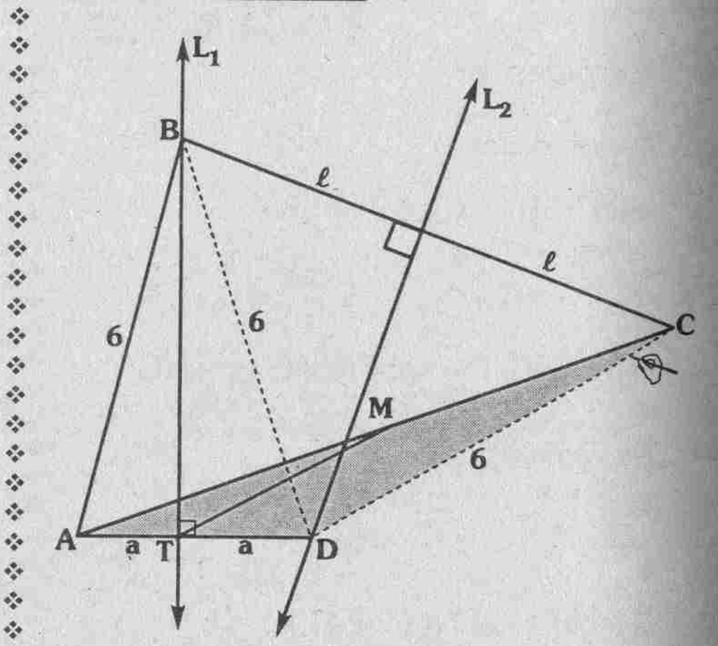
$$\Rightarrow m\sphericalangle APD = 2\theta$$

- En P: $2\theta + \theta = 180°$

$$\therefore \mathbf{\theta = 60°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 24



- Piden: TM
- Por teorema de la mediatriz:

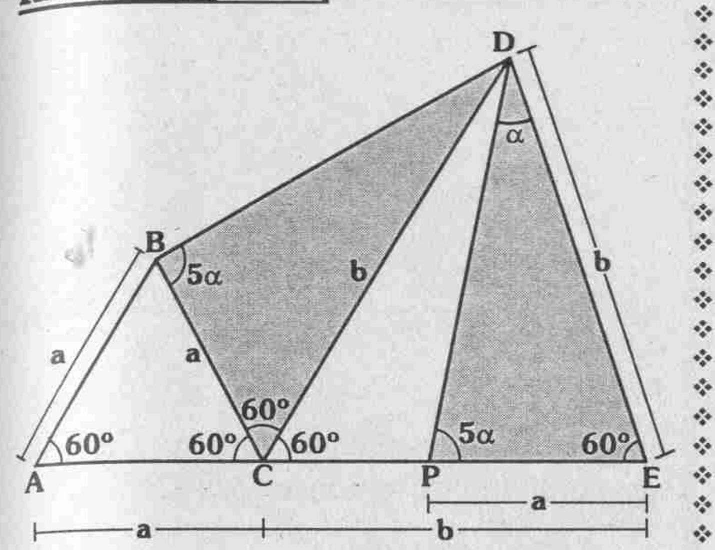
$$AB = BD = DC = 6$$

- Como AM=MC y AT=TD, en el ΔACD, $\overline{TM}$ es base media.

$$\therefore \mathbf{TM = 3}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 25



- Piden α.
- Al completar las medidas angulares y lados de los triángulos equiláteros notamos:

$$\Delta BCD \cong \Delta PED \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle DPE = 5\alpha$$

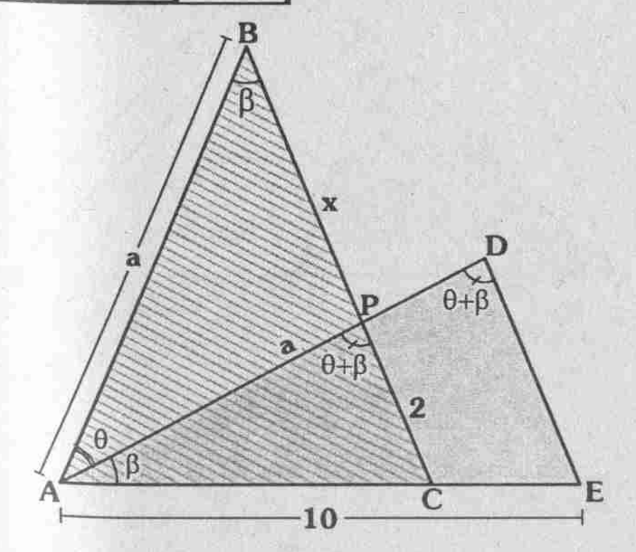
- En ΔPDE:

$$\alpha + 5\alpha + 60° = 180°$$

$$\therefore \ \alpha = 20°$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 26



- Piden **x**.
- Completemos medidas angulares de la siguiente forma:

Sea: $m\measuredangle BAP = \theta$

$$\Rightarrow m\measuredangle APC = \theta + \beta$$

- Como $\overline{PC} // \overline{DE} \Rightarrow m\measuredangle ADE = \theta + \beta$

$$\Delta BAC \cong \Delta ADE \text{ (LAL)}$$

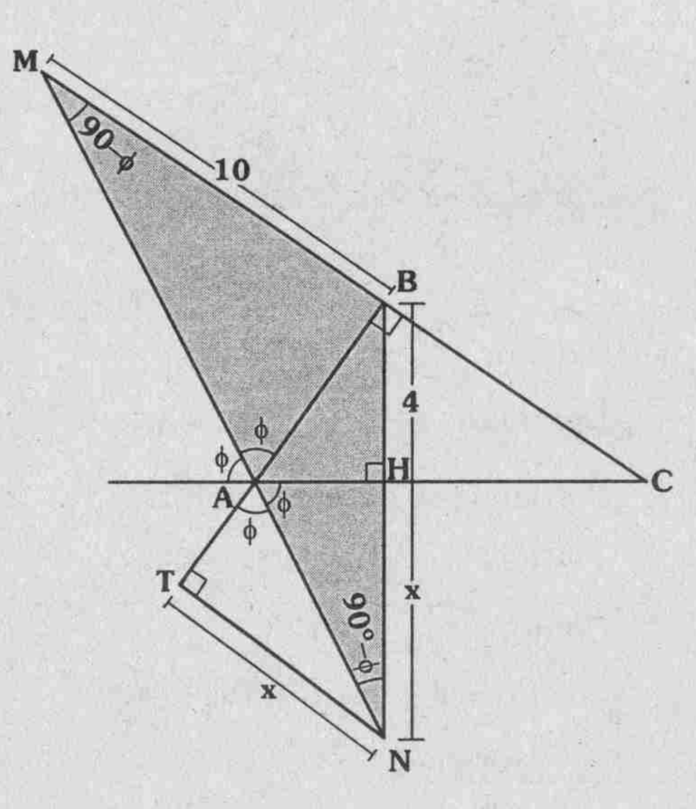
$$\Rightarrow BC = AE$$

$$x + 2 = 10$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 8}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 27



- Piden **x**.
- Por teorema de la bisectriz:

$$NT = NH = x$$

- En ⊿AHN y ⊿ABM:

$$m\measuredangle AMB = m\measuredangle ANH = 90° - \phi$$

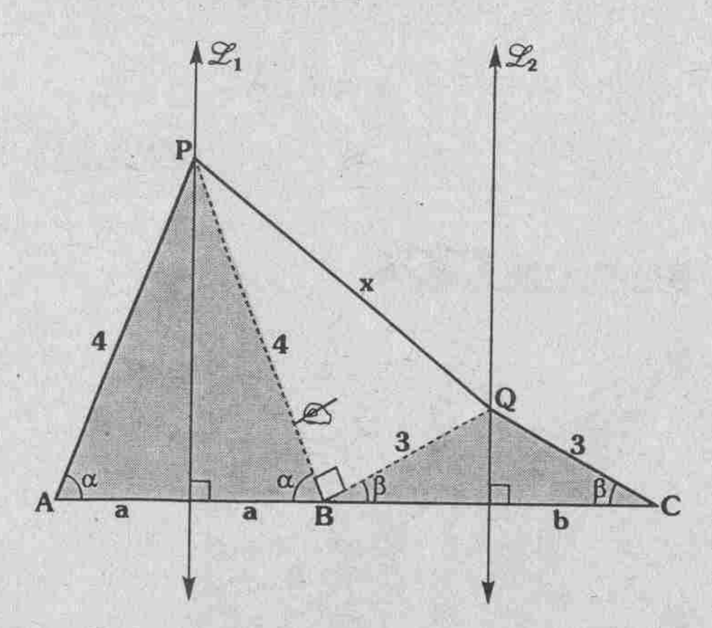
- ΔMNB : isósceles

$$\Rightarrow x + 4 = 10$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 6}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 28



- Piden **x**.
- Del dato: AP=4 , y QC=3.
- Por teorema de la mediatriz:

$$AP = PB = 4 \quad y \quad BQ = QC = 3$$

- Como:

$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow m\measuredangle PBQ = 90°$$

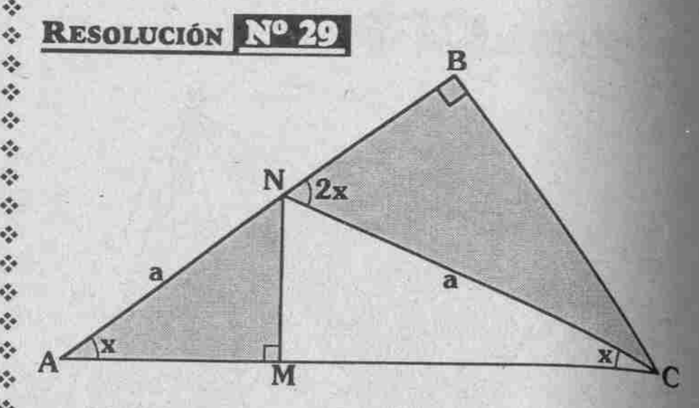
- En ⊿PBQ:

$$x^2 = 3^2 + 4^2$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 5}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 29



- Piden **x**.
- Como los triángulos AMN y CBN son congruentes, entonces AN=NC.
- ΔANC : isósceles
- Por ángulo exterior en el ΔANC :

$$m\measuredangle CNB = 2x$$

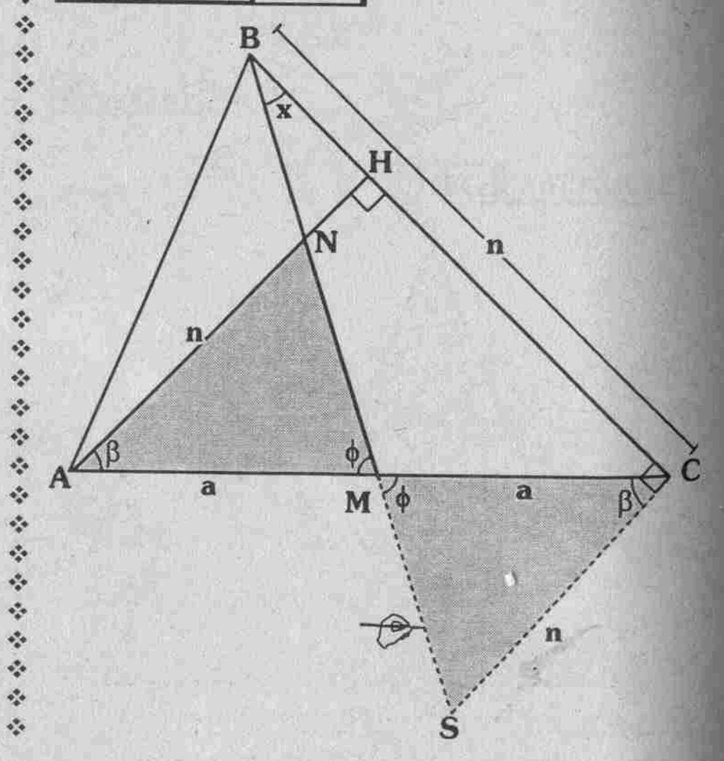
- Por la congruencia como los "ángulos" deben ser respectivamente iguales:

$$m\measuredangle ANM = 2x \Rightarrow x + 2x = 90°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 30°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 30



- Piden: **x**.
- Prolongamos $\overline{BM}$ y trazamos $\overline{CS} // \overline{AN}$ pues tendremos:

$\Delta NAM \cong \Delta SCM$ (ALA)

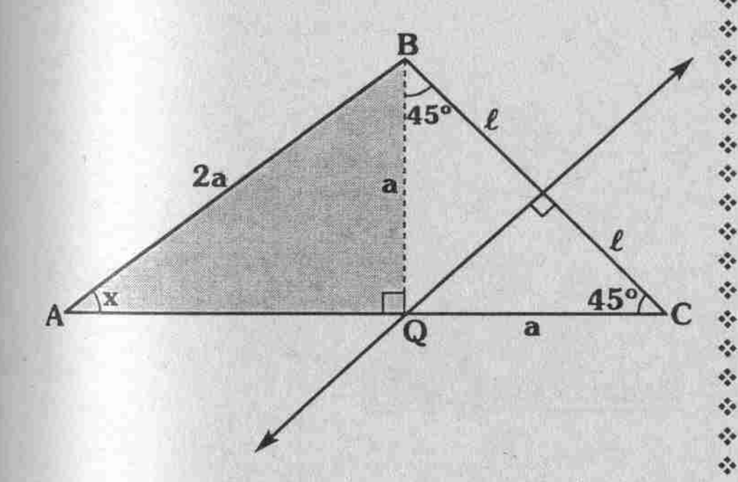
$\Rightarrow CS = n$ y $m\measuredangle BCS = 90°$

- En ⊿BCS: BC=CS

$\therefore$ **x = 45°**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 31



- Piden **x.**
- Por teorema de la mediatriz:

$QC = QB$

$m\measuredangle QBC = 45°$

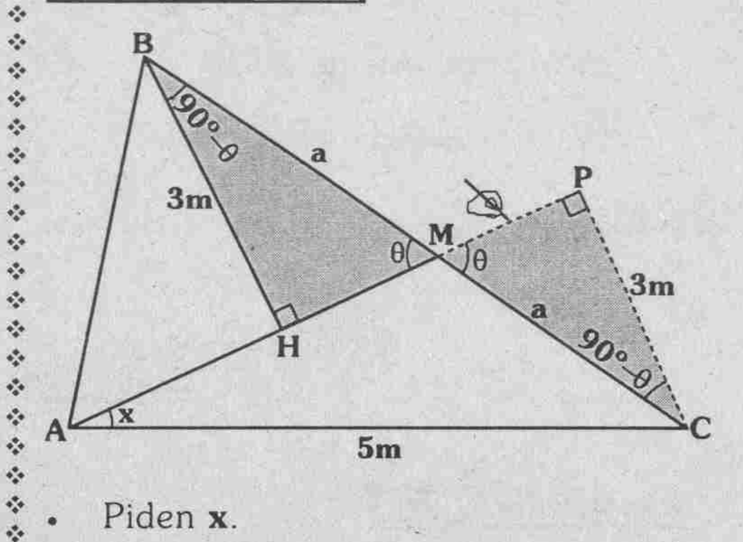
$\Rightarrow m\measuredangle BQC = 90°$

- ⊿AQB: notable, pues AB=2(BQ)

$\therefore$ **x = 30°**

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 32



- Piden **x**.
- Como MB=MC, se prolonga $\overline{AM}$ y se traza $\overline{CP} \perp \overline{AM}$

$\Rightarrow$ ⊿BHM ≅ ⊿CPM (LAL)

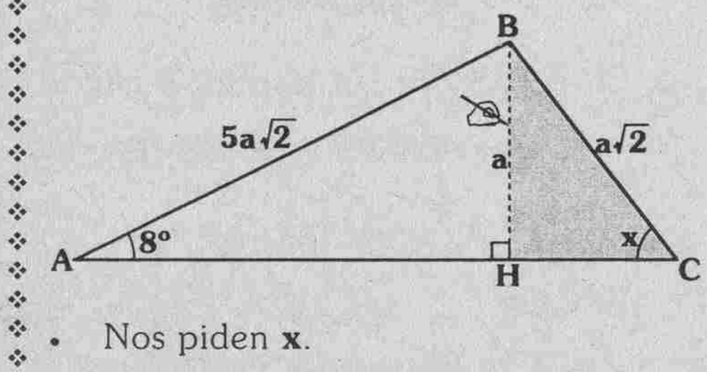
$\Rightarrow PC = BH = 3m$

- En ⊿APC, como AC=5m y PC=3m.

$\therefore$ **x = 37°**

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 33



- Nos piden **x**.
- Dato: $m\measuredangle ABC > 90°$; $m\measuredangle BAC = 8°$

$AB = 5(BC)$

- Convenientemente:

$AB = 5a\sqrt{2} \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$

- Se traza $\overline{BH} \perp \overline{AC}$
- $\measuredangle$AHB: notable de 8°

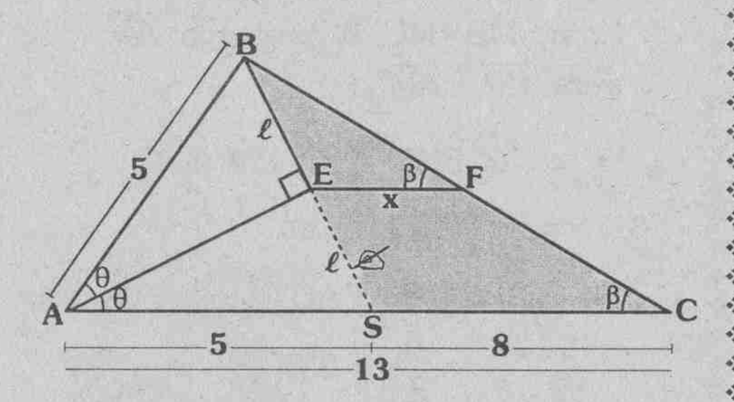
$$\Rightarrow BH = a$$

- $\measuredangle$BHC: notable:

$$\therefore \mathbf{x = 45°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 34



- Piden **x**.
- Prolongamos $\overline{BE}$ hasta que corte a $\overline{AC}$ en S, pues tendremos:
- En ΔABS, $\overline{AE}$ es bisectriz y altura

$$\Rightarrow AB = AS \quad y \quad BE = ES$$

- Ahora en ΔBSC, $\overline{EF} // \overline{SC}$ y como BE = ES

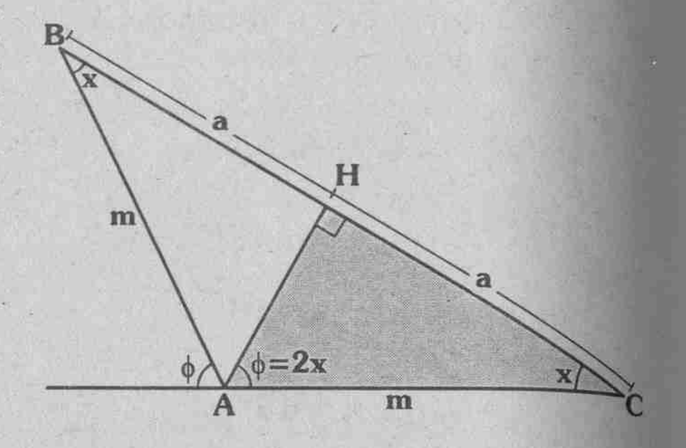
$$\Rightarrow \overline{EF} \text{ es base media}$$

- Como AC = 13 $\Rightarrow$ SC = 8

$$\therefore \mathbf{x = 4}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 35



- Piden **x**.
- Como $\overleftrightarrow{AH}$ es mediatriz de $\overline{BC}$

$\Rightarrow AB = AC$, luego el ΔABC es isósceles.

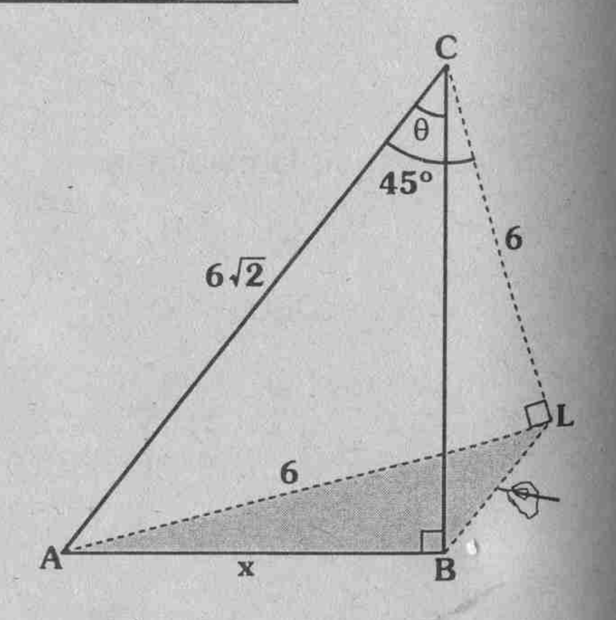
$$\Rightarrow \phi = 2x$$

- En $\measuredangle$AHC: $x + 2x = 90°$

$$\therefore \mathbf{x = 30°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 36



- Nos piden: el mayor valor entero de x.

- Como $\theta < 45°$, ubicamos L en la región exterior relativa a $\overline{BC}$.
- Tal que: $m\sphericalangle ACL = m\sphericalangle CAL = 45°$
- ⊿ALC: notable de 45°

$\Rightarrow AL = LC = 6$

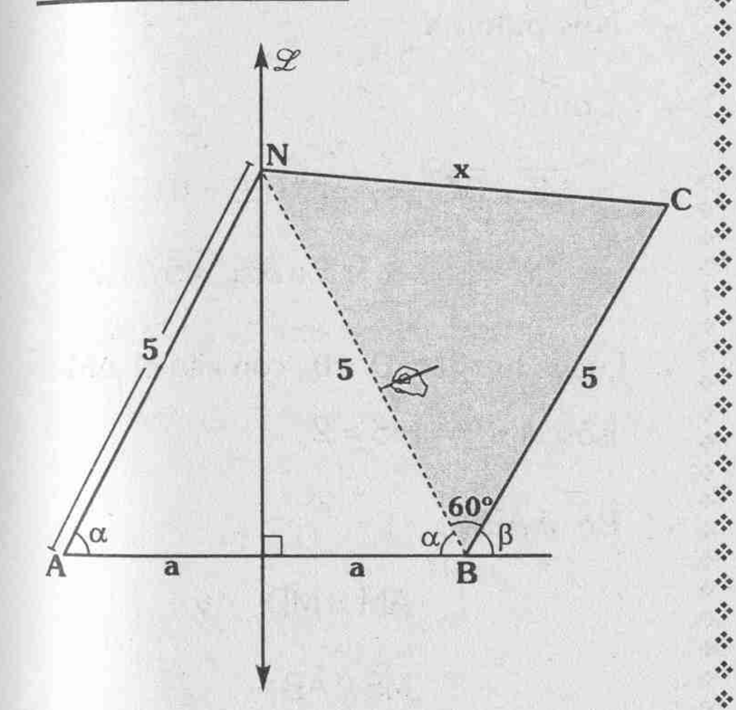
- En ΔALB, como $m\sphericalangle ABL > 90°$

$\Rightarrow x < 6$

$\therefore \mathbf{x_{máx.\ entero} = 5}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 37



- Piden **x**.
- Dato: $\alpha + \beta = 120°$ y $AN = BC = 5$
- Por teorema de la mediatriz :

$AN = NB = 5$

- ΔANB : isósceles

$\Rightarrow m\sphericalangle NAB = m\sphericalangle ABN = \alpha$

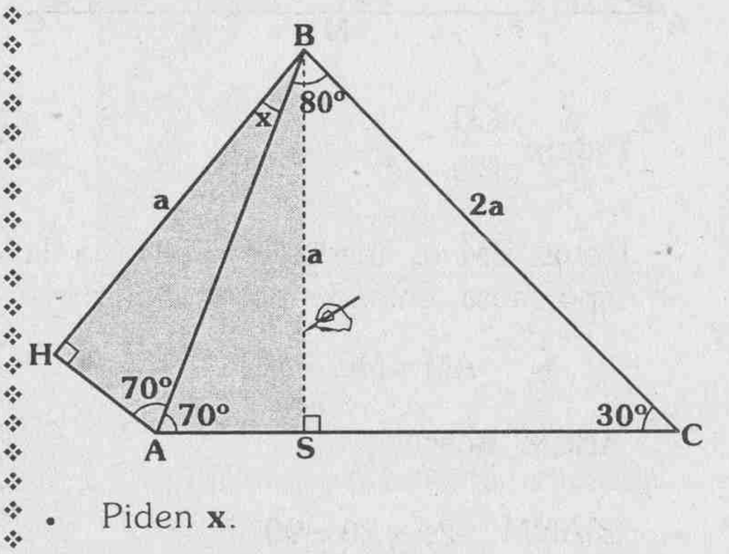
- Luego: $m\sphericalangle NBC = 60°$

$\Rightarrow \Delta NBC$ es equilátero

$\therefore \mathbf{x = 5}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 38



- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{BS} \perp \overline{AC}$ (S en $\overline{AC}$).
- ⊿BSC notable de 30°

$\Rightarrow BS = a$

- Como BH=BS, por el recíproco del teorema de la bisectriz.

$m\sphericalangle SAB = m\sphericalangle HAB = 70°$

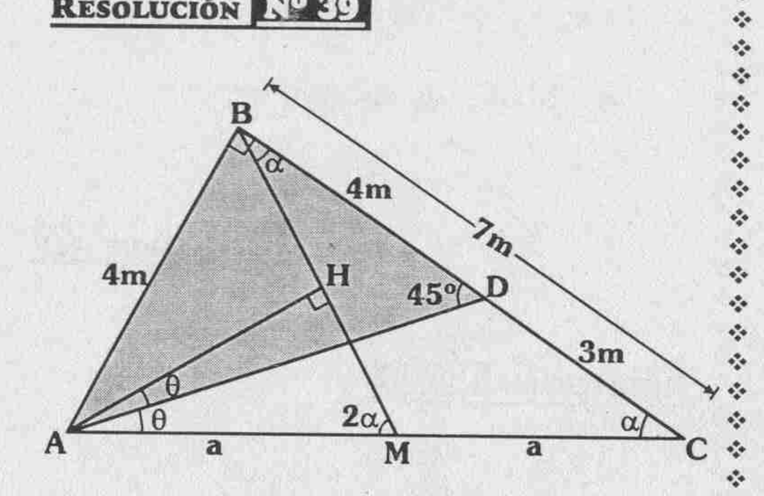
- En ⊿AHB:

$x + 70° = 90°$

$\therefore \mathbf{x = 20°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 39



- Piden: $\dfrac{CD}{BD}$

- Como $\overline{BM}$ es mediana relativa a la hipotenusa, entonces por teorema:

$$AM = MC = MB$$

- ΔBCM isósceles

- $⊿AHM$: $2\alpha + 2\theta = 90°$

$$\Rightarrow \alpha + \theta = 45°$$

- En ΔADC, por ángulo exterior:

$$m\sphericalangle ADB = \alpha + \theta = 45°$$

- $⊿ABD$: notable de 45°:

$$AB = BD = 4m$$

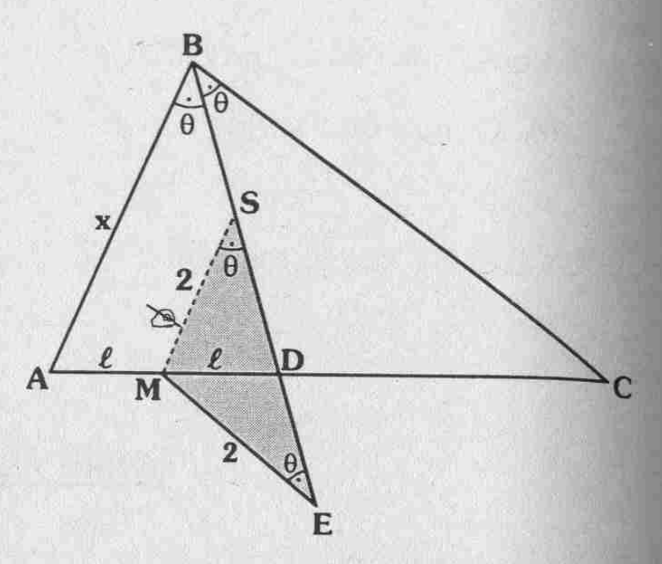
$$\Rightarrow DC = 3m$$

- Finalmente:

$$\frac{\mathbf{CD}}{\mathbf{BD}} = \frac{\mathbf{3m}}{\mathbf{4m}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$



RESOLUCIÓN Nº 40



- Nos piden **x**.

- Como:

  * $\overline{ME} // \overline{BC} \Rightarrow m\sphericalangle MEB = \theta$

  * $AM = MD \Rightarrow$ se traza $\overline{MS} // \overline{AB}$

- Luego: $m\sphericalangle MSD = \theta$, con ello el ΔMSE isósceles $\Rightarrow MS = 2$.

- En ΔABD:

$$AM = MD \quad y$$

$$\overline{MS} // \overline{AB}$$

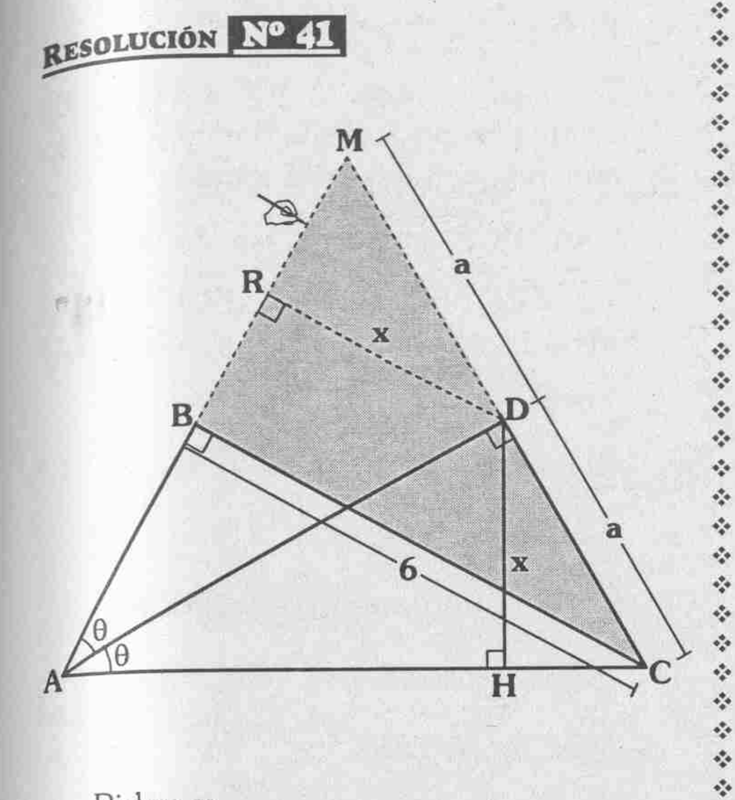
$\Rightarrow \overline{MS}$ es base media, por teorema:

$$MS = \frac{AB}{2}$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 4}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 41



- Piden **x**.
- Como $\overline{AD}$ es bisectriz del $\measuredangle CAB$ y $m\measuredangle ADC = 90°$, nos conviene prolongar $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, pues así tendremos:

  ΔMAC es isósceles, como $\overline{AD}$ es altura, también es mediana

  $$\Rightarrow CD = DM$$

- Por teorema de la bisectriz:

  $$DH = DR = x$$

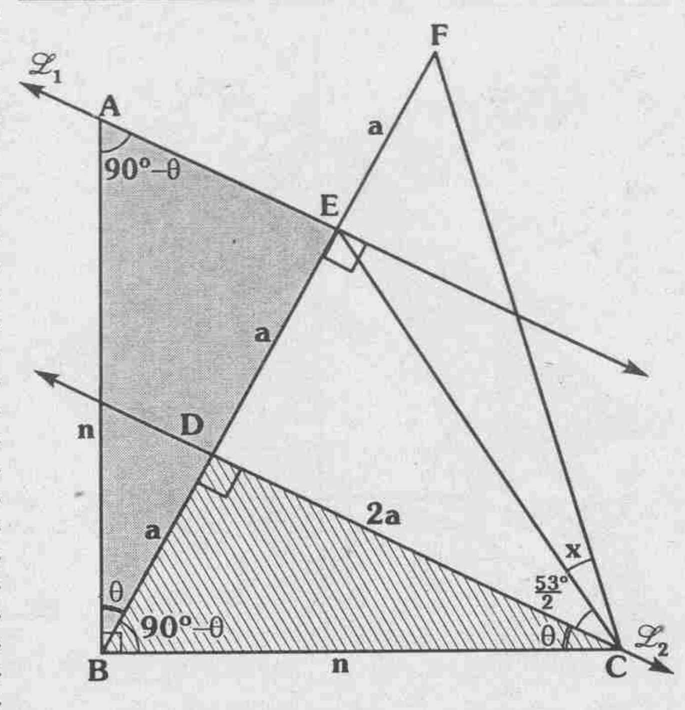
- ⊿MBC: $\overline{DR}$ es base media

  $$\Rightarrow x = \frac{6}{2}$$

  $$\therefore \mathbf{x = 3}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 42



- Piden **x**.
- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son mediatrices de $\overline{DF}$ y $\overline{EB}$ respectivamente, entonces:

  $$BD = DE = EF = a$$

- Como:

  $$AB = BC \quad y \quad m\measuredangle ABC = 90°$$

  $$\Rightarrow ⊿AEB \cong ⊿BDC \text{ (ALA)}$$

  $$\Rightarrow DC = 2a$$

- Con ello:

  ⊿EDC: notable de 53°/2

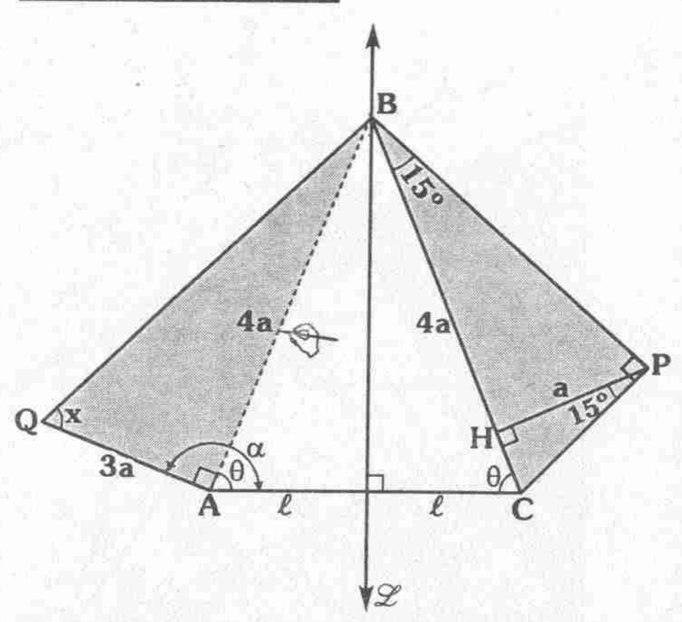
  ⊿FDC: notable de 45°

  $$\Rightarrow x + \frac{53°}{2} = 45°$$

  $$\therefore \mathbf{x = \frac{37°}{2} = 18°30'}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 43



- Piden **x**.
- En ⊿BPC, por el teorema del triángulo de 15° y 75°:

$$BC = 4(PH) = 4a$$

- Por teorema de la mediatriz:

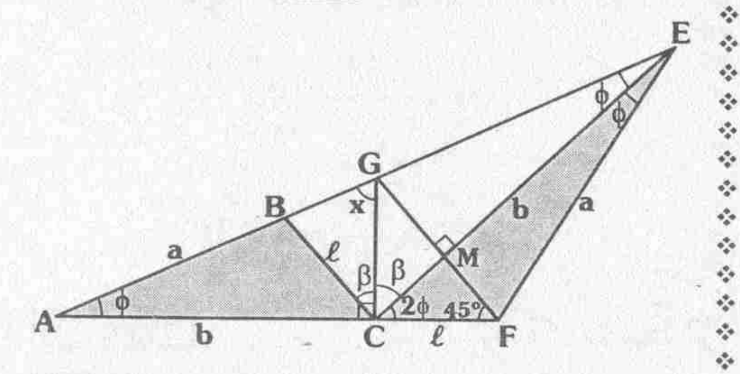
$$BC = AB = 4a$$

- Como $\alpha - \theta = 90° \Rightarrow m\measuredangle QAB = 90°$
- En ⊿QAB: $QA = 3a$ y $AB = 4a$ entonces

$$\mathbf{x = 53°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 44



- Piden **x**.
- Tenemos por dato $\Delta ABC \cong \Delta EFC$, debemos reconocer que lados y ángulos son respectivamente iguales.

$$m\measuredangle BCA = m\measuredangle FCE \Rightarrow AB = EF$$

$CE \neq BC$, pues en el ΔBCE, $\overline{CG}$ es bisectriz (si $CE = BC$, $x = 90°$ pero $x \neq 90°$)

- Ahora tenemos: $AC = CE$ y $BC = CF$

$\Rightarrow$ ΔACE : isósceles

De la congruencia: $m\measuredangle CEF = \phi$

ΔGEF : isósceles $\Rightarrow$ $GM = MF$

$\Rightarrow$ ⊿GCF: isósceles

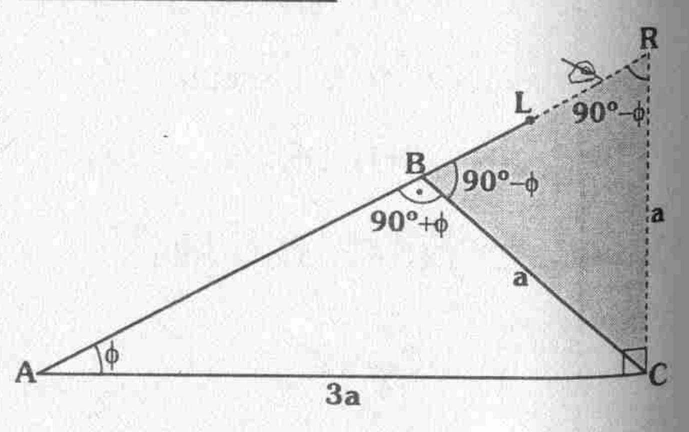
$$2\phi = 45° \Rightarrow \phi = \frac{45°}{2}$$

- En ⊿ACG: $x + \dfrac{45°}{2} = 90°$

$$\therefore \mathbf{x = 67°30'}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 45



- Piden: ϕ
- Al prolongar $\overline{AB}$ nos damos cuenta:

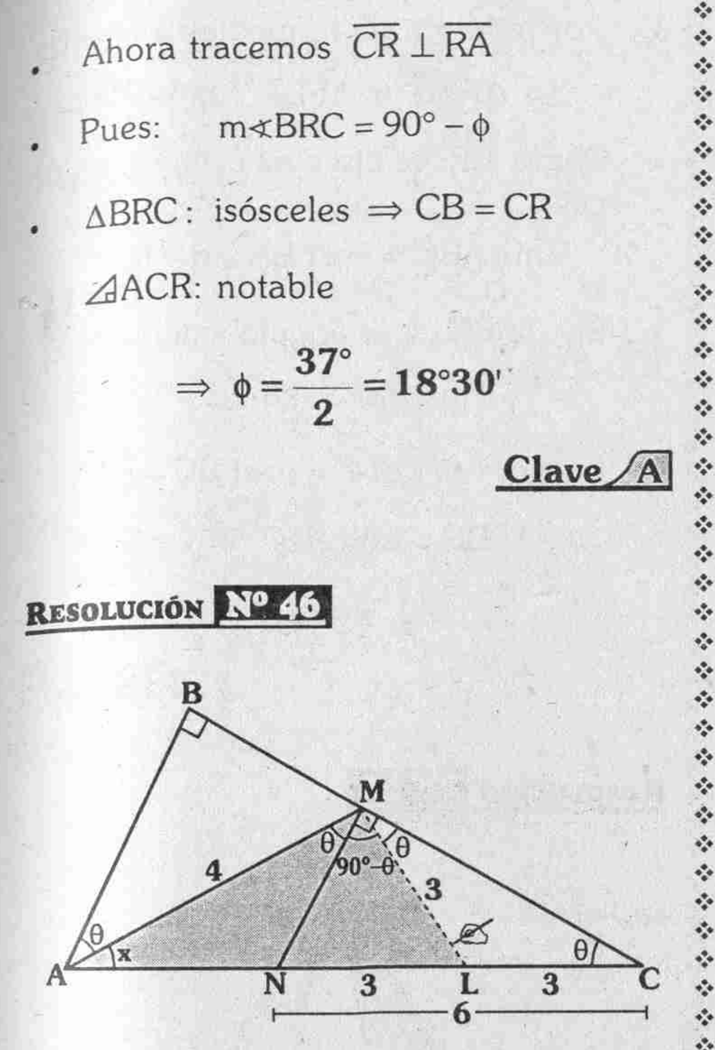
$$m\measuredangle LBC = 90° - \phi$$

- Ahora tracemos $\overline{CR} \perp \overline{RA}$
- Pues: $m\sphericalangle BRC = 90° - \phi$
- $\triangle BRC$: isósceles $\Rightarrow CB = CR$
- ⊿ACR: notable

$$\Rightarrow \phi = \frac{37°}{2} = 18°30'$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 46



- Piden **x**.
- En ⊿NMC, se traza la mediana $\overline{ML}$, entonces por teorema:

$$NL = LC = LM = 3$$

- $\triangle$ LCM es isósceles

$$\Rightarrow m\sphericalangle LMC = \theta$$

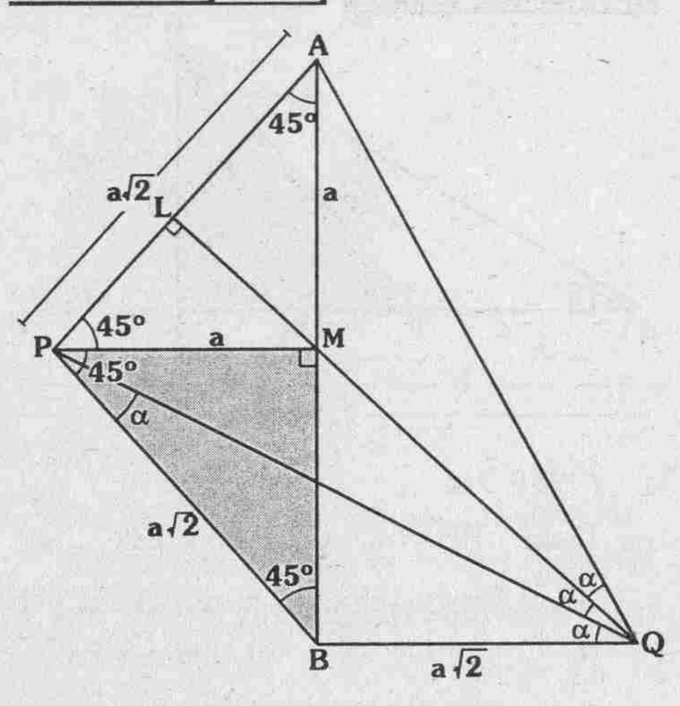
$$\Rightarrow m\sphericalangle LMA = 90°$$

- ⊿AML: notable

$$\therefore \mathbf{x = 37°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 47



- Piden: $\dfrac{BQ}{AP}$
- Por dato: $AM = MB$ y $PB = (AM)\sqrt{2}$
- $\triangle PQA$ es isósceles, pues $\overline{QL}$ es bisectriz y altura, entonces $MA = MP$.
- En ⊿PMB, como $PM = MB = a$ y $PB = a\sqrt{2} \Rightarrow m\sphericalangle PMB = 90°$
- ⊿PMA: $AP = a\sqrt{2}$
- Como: $m\sphericalangle BPA = 90° \Rightarrow \overline{BP} // \overline{QL}$

  $\Rightarrow m\sphericalangle BPQ = \alpha$, luego el $\triangle PBQ$ es isósceles $\Rightarrow BQ = a\sqrt{2}$
- Finalmente: $\dfrac{BQ}{AB} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}$

$$\therefore \quad \mathbf{\frac{BQ}{AP} = 1}$$

Clave C

Resolución Nº 48

- Piden **x**.
- Dato: PB=5k y a+b=12k
- Para aprovechar la suma de a y b, prolongamos $\overline{AC}$, tal que CS=a.

$$\Rightarrow AS = a + b = 12k$$

- ΔMBS isósceles $\Rightarrow m\measuredangle CSB = 75°$
- Luego: $m\measuredangle SBA = 90°$
- Por teorema del triángulo de 15° y 75°:

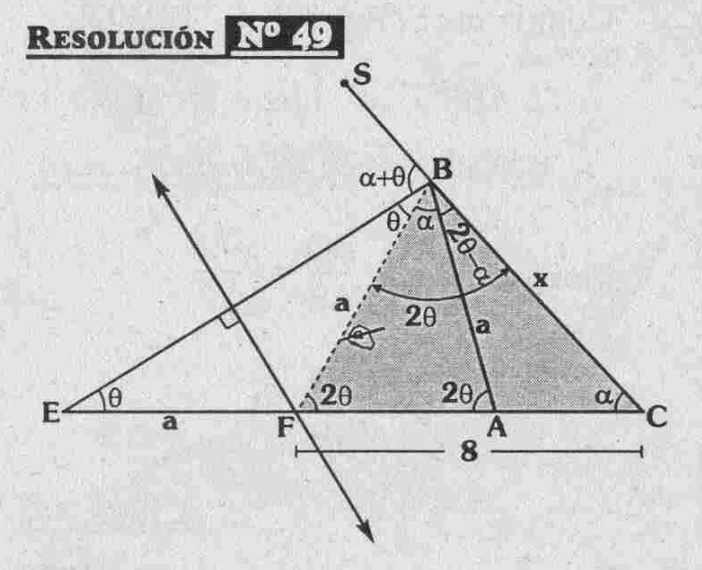
$$BC = \frac{AS}{4} \Rightarrow BC = 4k$$

- ⊿PCB: PB=5k y BC=4k

$$\therefore \mathbf{x = 53°}$$

Clave D

Resolución Nº 49



- Por teorema de la mediatriz F=FB:

$$\Rightarrow \Delta AFB \text{ y } \Delta FBA \text{ son isósceles}$$

- Como $\overline{BE}$ es bisectriz exterior, entonces:

$$m\measuredangle ABC = m\measuredangle EBA = \alpha + \theta$$

- En ΔABC, por ángulo exterior:

$$m\measuredangle ABC = 2\theta - \alpha$$

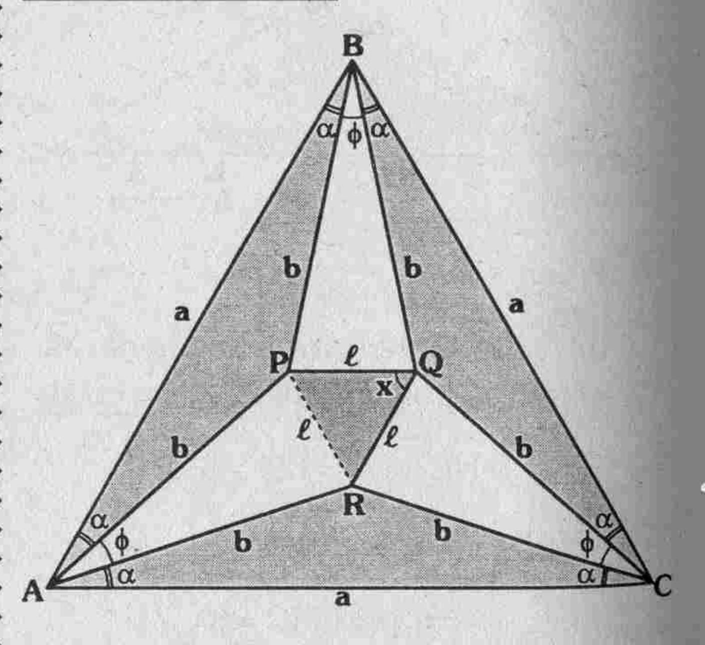
- Luego: $m\measuredangle BFC = m\measuredangle FBC = 2\theta$

$$\Rightarrow \Delta FBC: \text{isósceles}$$

$$\therefore \mathbf{x = 8}$$

Clave C

Resolución Nº 50



- Piden **x**.
- De los datos:

$$\Delta APB \cong \Delta BQC \cong \Delta ARC \text{ (LLL)}$$

- Luego:

$$m\measuredangle\measuredangle RAP = m\measuredangle PBQ = m\measuredangle QRC = \phi$$

- Pues: $2\alpha + \phi = 60°$

- También: $\Delta PAR \cong \Delta PBQ \cong \Delta QCR$

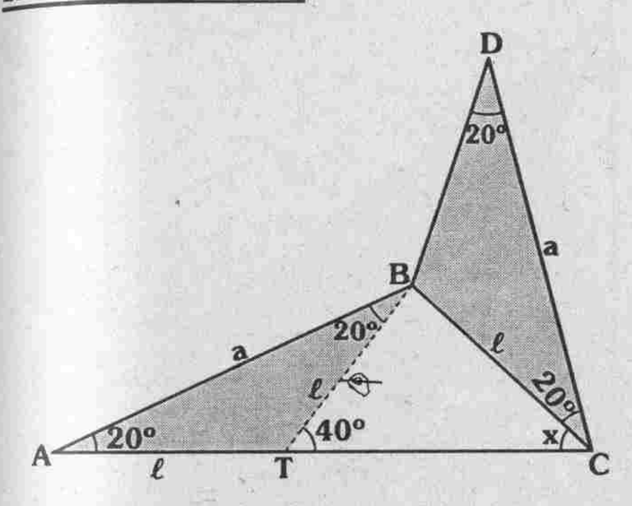
$\Rightarrow PQ = QR = PR$

$\Rightarrow \Delta PQR$: equilátero

$\therefore\ \mathbf{x = 60^\circ}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 51



- Piden **x**.
- Como:

$AB = BC$ y $m\measuredangle BAC = 20^\circ$

busquemos la congruencia, para ello, trazamos $\overline{BT}$, de tal modo que: $m\measuredangle TBA = 20^\circ$

$\Rightarrow \Delta ABT \cong \Delta DCB$ (ALA)

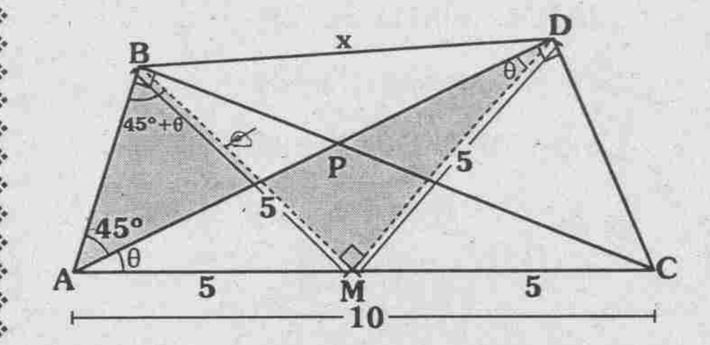
$\Rightarrow AT = TB = BC = BD$

- Luego: ΔCBT es isósceles:

$\therefore\ \mathbf{x = 40^\circ}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 52



- Piden **x**.
- Como $\overline{AC}$ es hipotenusa para los triángulos ABC y ADC, se traza la mediana $\overline{BM}$ entonces $\overline{MD}$ también será mediana.
- Por teorema:

$AM = MC = BM = DM = 5$

- En la parte sombreada:

$45^\circ + 45^\circ + \theta = m\measuredangle BMD + \theta$

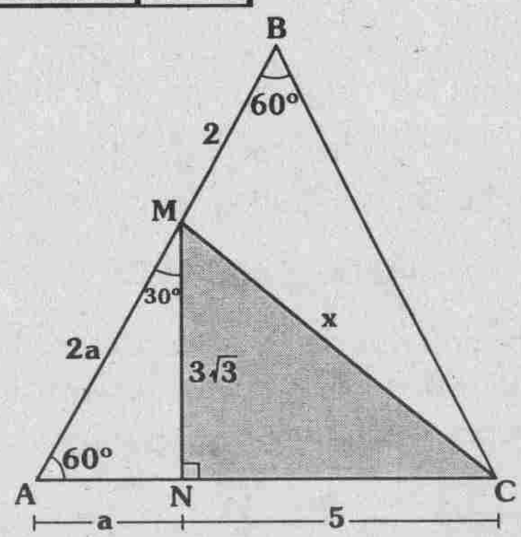
$\Rightarrow m\measuredangle BMD = 90^\circ$

- En ⊿BMD:

$\mathbf{x = 5\sqrt{2}}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 53



- Piden **x.**
- $\measuredangle$ANM notable de 30°
- Sea AN=a $\Rightarrow$ AM=2a
- Como ΔABC es equilátero:

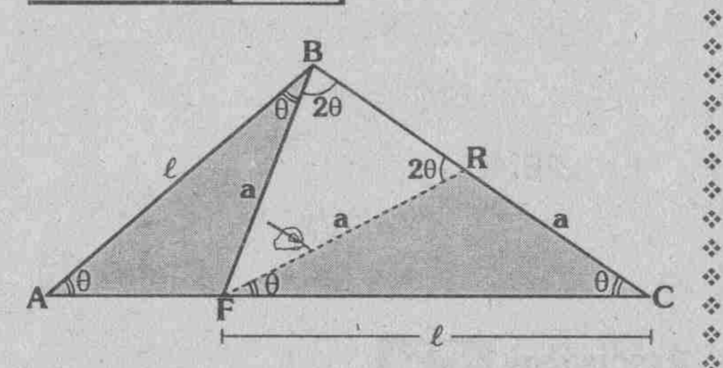
$$2a+2=a+5$$
$$\Rightarrow a=3$$

- En $\measuredangle$ANM: $MN=3\sqrt{3}$
- En $\measuredangle$MNC, por teorema de Pitágoras

$$x^2=5^2+(3\sqrt{3})^2$$
$$\therefore \mathbf{x=2\sqrt{13}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 54



- Piden: θ
- Como AB=PC, ello nos da la idea de buscar de alguna manera la ≅.
- También, del gráfico tenemos:

$$m\measuredangle FBC=2(m\measuredangle FCB)$$

- Por criterios de construcción, se traza $\overline{FR}$ tal que $m\measuredangle CFR=\theta$, entonces ΔFRC y ΔBRF son isósceles.
- Luego:

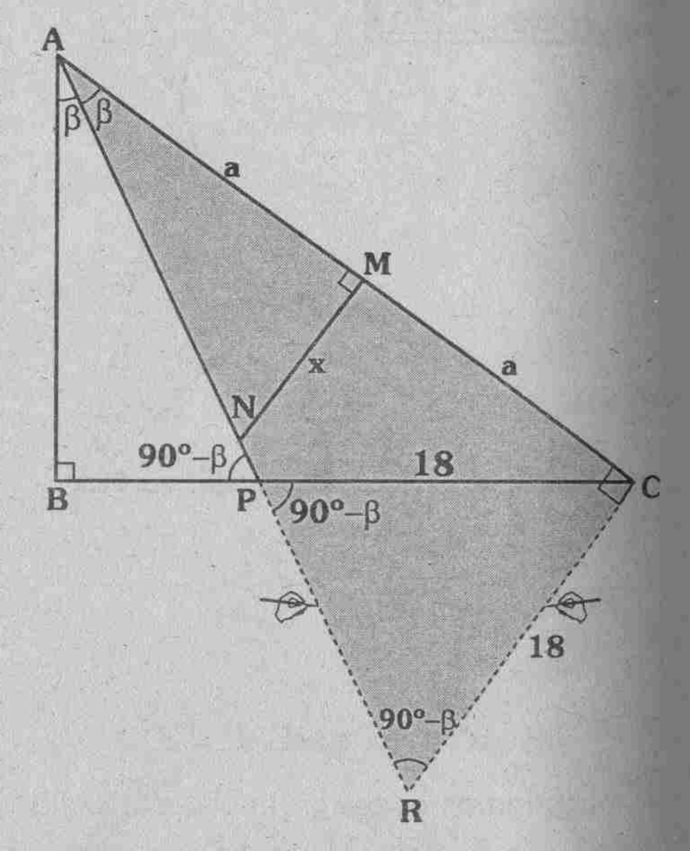
$$\Delta ABF \cong \Delta FCR \text{ (LAL)}$$
$$\Rightarrow m\measuredangle BAF=\theta$$

- ΔABC : $\theta+3\theta+\theta=180°$

$$\therefore \theta=\mathbf{36°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 55



- Piden: x
- Tenemos por dato que AM=MC, lo cual nos sugiere usar de alguna forma la base media.
- Para ello tracemos $\overline{CR}//\overline{MN}$ y prolongamos $\overline{AP}$, luego tendremos:

$$m\measuredangle CPR=m\measuredangle CRP=90°-\beta$$
$$\Rightarrow \Delta PCR: \text{isósceles} \Rightarrow RC=18$$

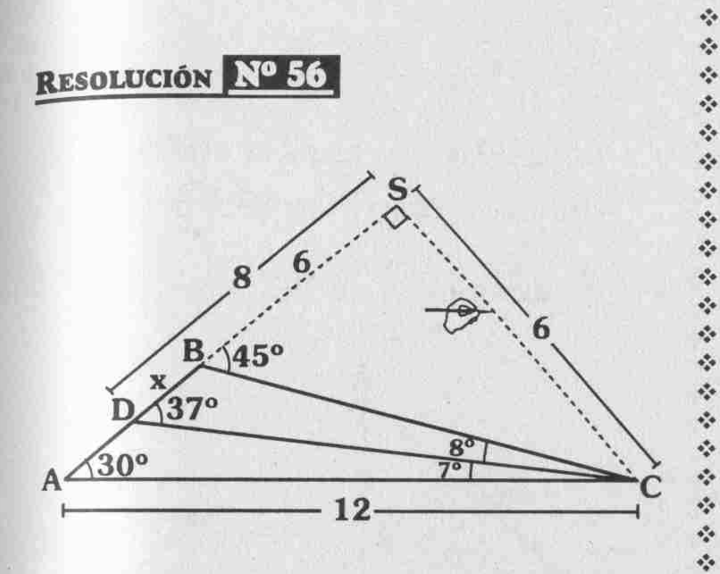
- ⊿ACR: $\overline{NM}$ es base media
- Por teorema:

$$x=\frac{18}{2}$$

$$\therefore \mathbf{x=9}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 56



- Piden **x**.
- Para aprovechar la presencia de los "ángulos", 30°, 37° y 45° prolonguemos $\overline{AB}$ y tracemos $\overline{CS}\perp\overline{AB}$.
- Luego:

⊿ASC notable de 30° $\Rightarrow CS=6$

⊿BSC notable de 45° $\Rightarrow BS=6$

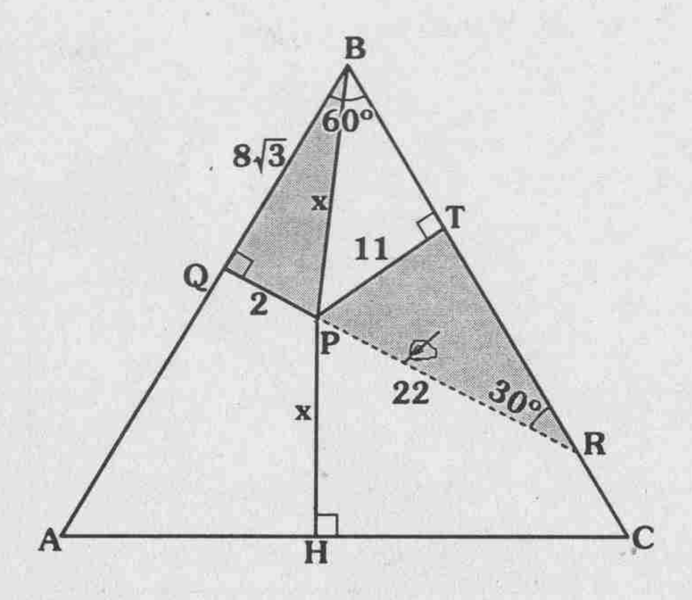
⊿DSC notable de 37° $\Rightarrow DS=8$

$$\Rightarrow x+6=8$$

$$\therefore \mathbf{x=2}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 57



- Piden **x**.
- Para aprovechar la presencia de los ángulos rectos y del "60°", prolonguemos $\overline{QP}$ hasta que corte a $\overline{BC}$ en R.
- ⊿PTR: notable de 30°

Como $PT=11\Rightarrow PR=22$

- ⊿BQP: notable de 30°

Como $QR=24\Rightarrow QB=8\sqrt{3}$

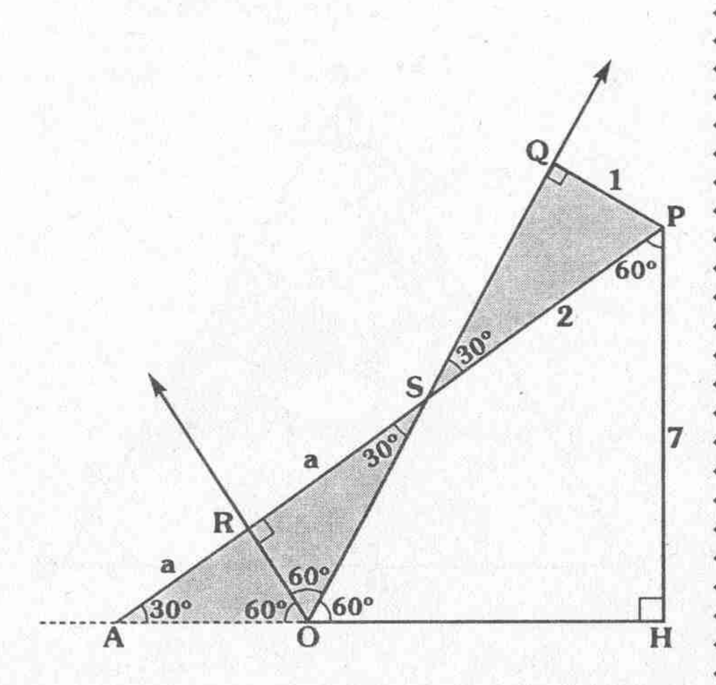
- En ⊿PQB:

$$x^2=(8\sqrt{3})^2+(2)^2$$

$$\therefore \mathbf{x=14}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 58



- Piden RP
- Al prolongar $\overline{HD}$ y $\overline{PR}$ se cortan en A
- ΔAOS : isósceles $\Rightarrow AR = RS = a$
- ⊿SQP: notable de 30° $\Rightarrow PS = 2$
- Luego: $RP = a + 2$
- ⊿AHP: notable de 30°

$$\Rightarrow \quad 2a + 2 = 14$$

$$\Rightarrow \quad a = 6$$

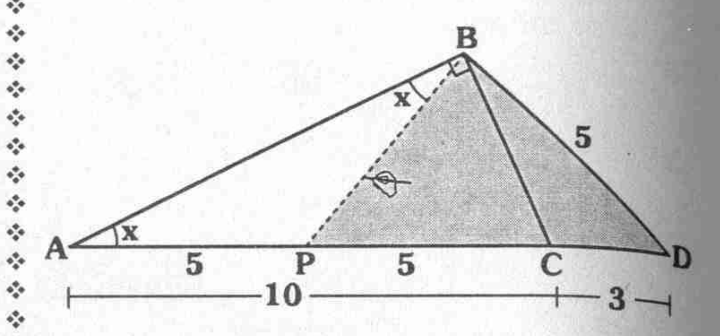
- Finalmente:

$$RP = a + 2$$

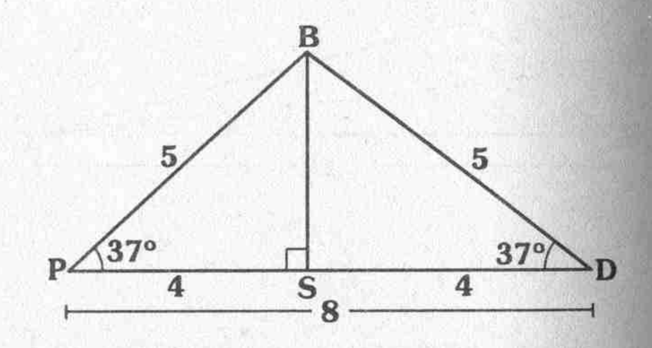
$$\therefore \ \mathbf{RP = 8}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 59



- Piden **x**.
- En ⊿ABC, se traza la mediana $\overline{BP}$, entonces $AP = PC = BP = 5$
- Analicemos el ΔPBD :



- Se traza la altura $\overline{BS}$

$$\Rightarrow PS = SD = 4$$

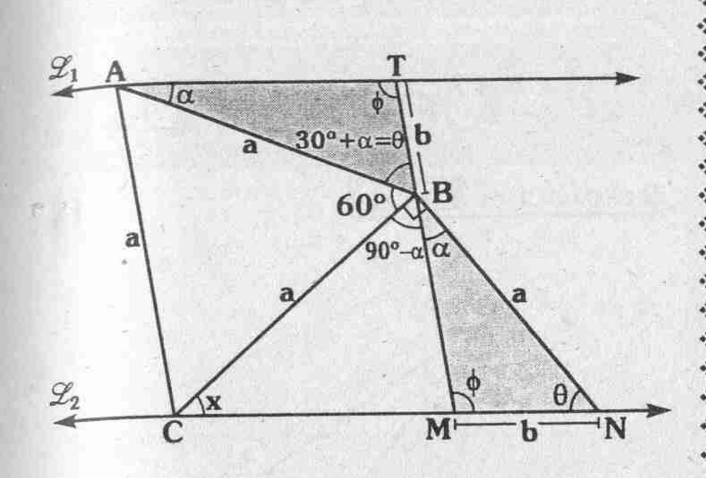
- ⊿PSD notable $\Rightarrow m\measuredangle SPB = 37°$
- En ΔAPB :

$$x + x = 37°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{37°}{2} = 18°30'}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 60



- Piden **x**.
- Dato: $\theta - \alpha = 30° \Rightarrow \theta = 30° + \alpha$

  ΔABC : equilátero

- En "B", notamos:

  $m\measuredangle ABT = 30° + \alpha$ y $m\measuredangle ABC = 60°$

  $\Rightarrow m\measuredangle ABM = \alpha$

- Luego: $m\measuredangle MBN = \alpha$
- Como:

  $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1} // \overleftrightarrow{\mathscr{L}_2} \Rightarrow m\measuredangle ATB = m\measuredangle BMN = \phi$

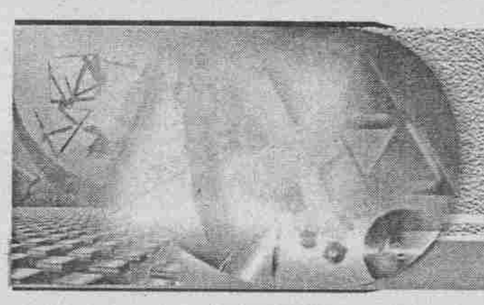
  $\Delta ATB \cong \Delta DMN$ (ALA)

  $\Rightarrow BN = a$

- $\triangle$CBN: notable

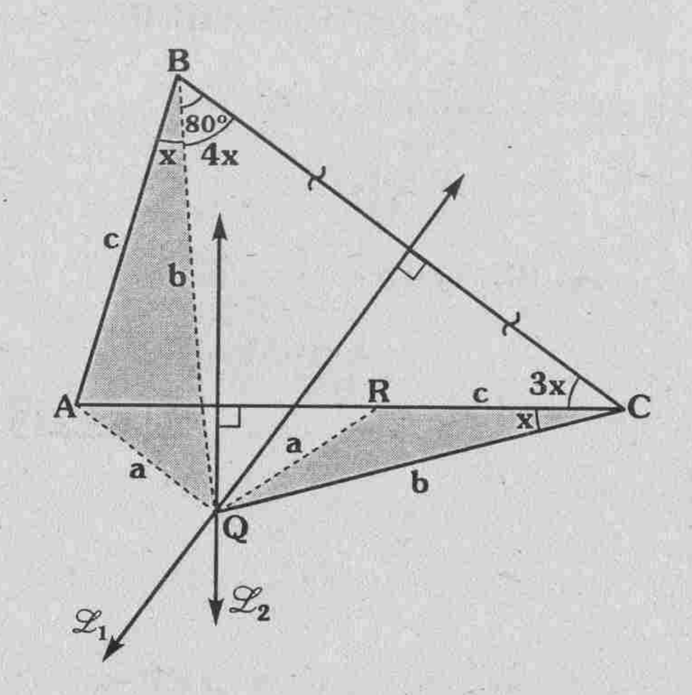
  $\therefore$ **x = 45°**

Clave B



Solucionario Ciclo Cepre-Uni

Resolución Nº 61



- Piden **x**.
- Como:

  $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ es mediatriz de $\overline{BC} \Rightarrow QC = QB$

  $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ es mediatriz de $\overline{AC} \Rightarrow QA = QR$

  $\Delta QAB \cong \Delta QRC$ (LLL)

  $\Rightarrow m\sphericalangle RCQ = m\sphericalangle ABQ = x$

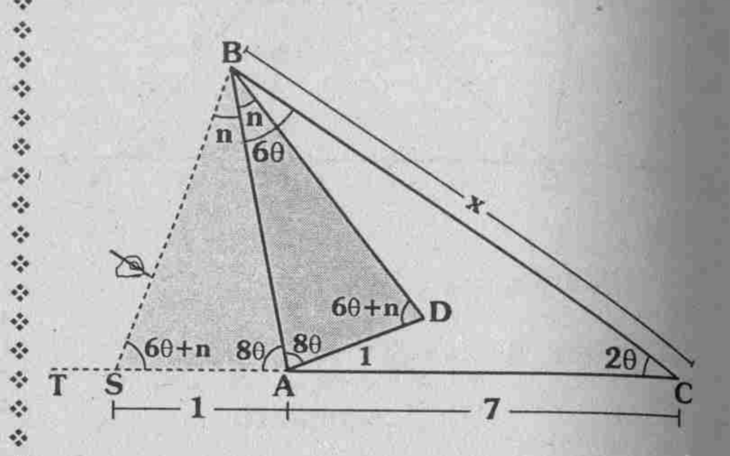
- En "B":

  $4x + x = 80°$

  $\therefore \mathbf{x = 16°}$

Clave D

Resolución Nº 62



- Piden **x**.
- Al prolongar $\overline{CA}$, por ángulo exterior tenemos:

  $m\sphericalangle BAD = 8\theta$

- Como $\overline{AB}$ es bisectriz del $\sphericalangle TAD$, por los criterios de trazos auxiliares (pág. 56)
- Nos conviene trazar $\overline{BS}$, tal que:

  $m\sphericalangle ABS = n$

  $\Rightarrow \Delta SAB \cong \Delta DAB$(ALA)

  $\Rightarrow SA = 1$ y $m\sphericalangle ASB = 6\theta + n$

- Notamos ahora:

  $m\sphericalangle CSB = m\sphericalangle SBC = 6\theta + n$

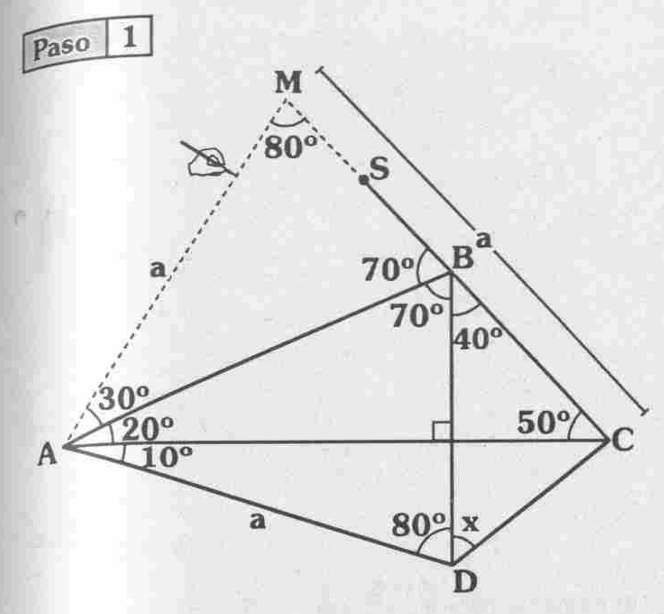
- ΔSBC: isósceles

  $\therefore \mathbf{x = 8}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 63

Paso 1

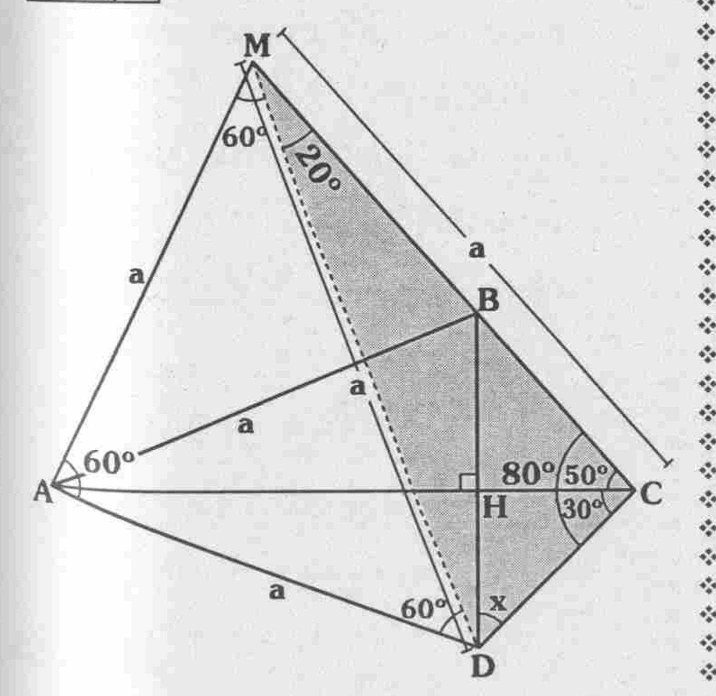


- Al prolongar $\overline{CB}$, nos damos cuenta que: $m\sphericalangle SBA = m\sphericalangle ABD = 70°$
- Lo cual nos sugiere trazar $\overline{AM}$, tal que $m\sphericalangle MAB = 30°$, pues asi:

$$\Delta MAB \cong \Delta DAB \text{ (ALA)}$$

$$\Rightarrow AM = AD$$

Paso 2



- Trazamos $\overline{DM}$, pues el ΔAMD resulta ser equilátero:

$$\Rightarrow DM = a \quad y \quad m\sphericalangle DMC = 20°$$

- ΔDMC : isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle MCD = 80°$

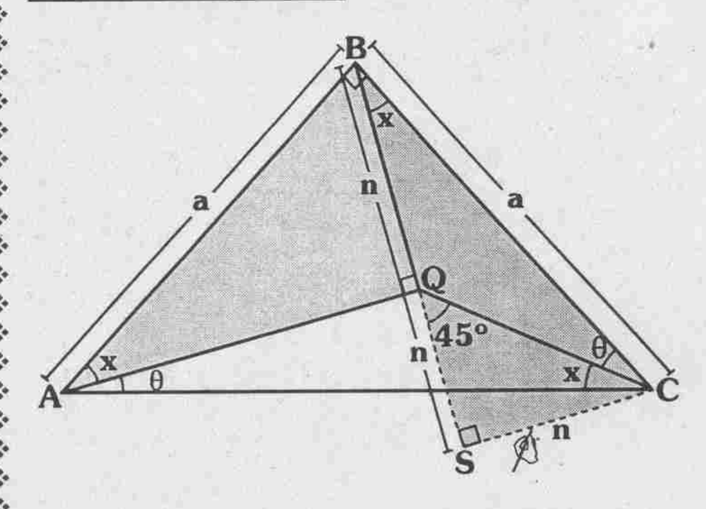
$$\Rightarrow m\sphericalangle ACD = 30°$$

- $⊿DHC$: $x + 30° = 90°$

$$\therefore \mathbf{x = 60°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 64



- Piden θ
- Por dato:

$$m\sphericalangle BAQ = m\sphericalangle QBC = m\sphericalangle QCA = x$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle ABQ = 90° - x \Rightarrow m\sphericalangle AQB = 90°$$

y como AB=BC, el gráfico nos sugiere prolongar $\overline{BQ}$ y trazar $\overline{CS} \perp \overrightarrow{BQ}$, pues:

$$⊿AQB \cong ⊿BSC$$

- Como:

$$x + \theta = 45° \Rightarrow m\sphericalangle CQS = 45°$$

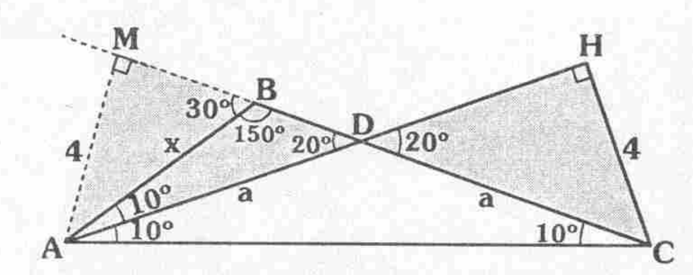
- $⊿QSC$: $QS = SC = n$

- Por la congruencia: BQ = SC = n
- ⊿BSC: notable:

$$x = \frac{53°}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\mathbf{37°}}{\mathbf{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 65



- Piden **x**.
- Notamos ΔADC isósceles ⇒ AD = DC
- Al trazar $\overline{AM} \perp \overrightarrow{BC}$, se tendrá:

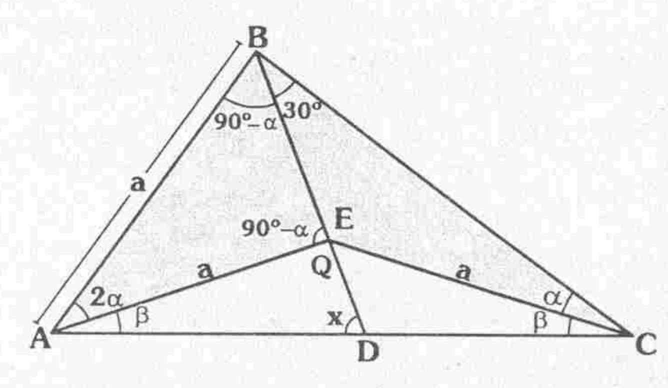
$$⊿AMD \cong ⊿DHC \text{ (LAL)}$$
$$\Rightarrow AM = 4$$

- ⊿AMB: notable de 30°

$$\therefore \mathbf{x = 8}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 66



- Piden **x**.
- Por teorema de cuadrilátero cóncavo (pág. 46 – 47)

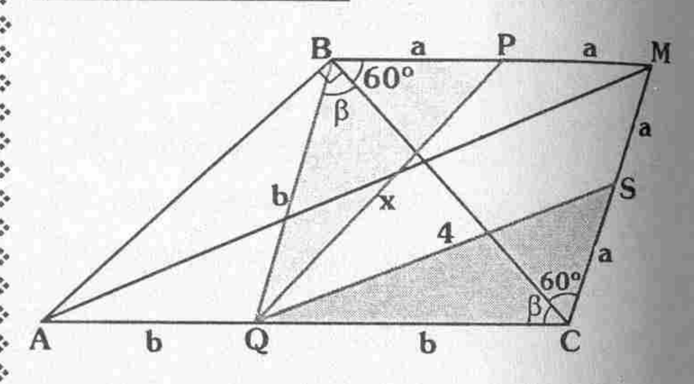
$$m\measuredangle ABC = 120° - \alpha$$
$$\Rightarrow m\measuredangle DBC = 30°$$

- ΔDBC : $x = 30° + \alpha + \beta$
- En ∠ACBE:

$$90° - \alpha = 30° + \alpha + \beta + \beta$$
$$\Rightarrow 30° = \alpha + \beta$$
$$\therefore \mathbf{x = 60°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 67



- Piden **x**.
- En ⊿ABC, $\overline{BQ}$ es mediana relativa a la hipotenusa ⇒ BQ = AQ = QC
- Se ubica S punto medio de $\overline{MC}$
- Como ΔBMC : equilátero ⇒ BP = CS
- Luego: ΔQBP ≅ ΔQCS (LAL)

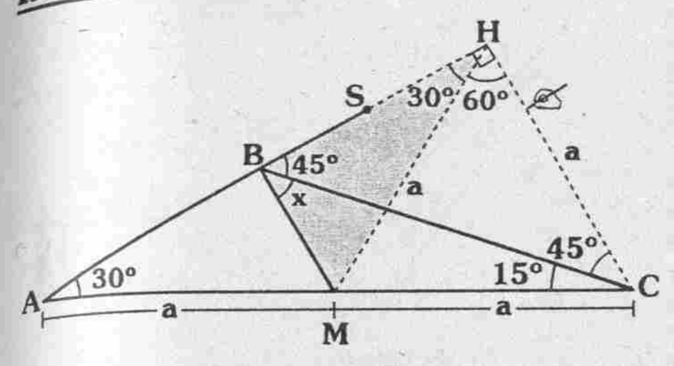
$$\Rightarrow QS = x$$

- ΔAMC : QS es base media

$$\Rightarrow QS = \frac{AM}{2}\text{ ; pero } AM = 8 \Rightarrow QS = 4$$
$$\therefore \mathbf{x = 4}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 68



- Piden **x**.
- Al prolongar $\overline{AB}$ verificamos:

$$m\measuredangle CBS = 45°$$

- Para aprovechar la presencia del 30° y 45°, trazamos $\overline{CH} \perp \overline{AB}$.

$\Rightarrow$ ⊿AHC y ⊿BHC son notables

⊿AHC: $AC = 2(HC) \Rightarrow HC = a$

⊿BHC: $BH = HC = a$

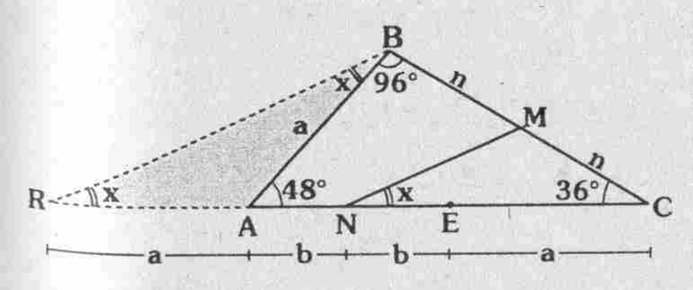
- Por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa: HM = a
- ΔMBH : isósceles
- Como $m\measuredangle BHM = 30° \Rightarrow m\measuredangle HBM = 75°$

$$\Rightarrow \quad x + 45° = 75°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 30°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 69



- Piden **x**.
- Como BM = MC , busquemos otro punto medio, para ello prolonguemos $\overline{CA}$ hasta R tal que:

$$AR = a \Rightarrow RN = NC$$

- En ΔRCB , notamos que $\overline{NM}$ es base media, entonces:

$$\overline{RB} // \overline{NM} \Rightarrow m\measuredangle BRC = x$$

- ΔRAB : isósceles $\Rightarrow m\measuredangle RBA = x$
- ΔBAR : $\quad x + x = 48°$

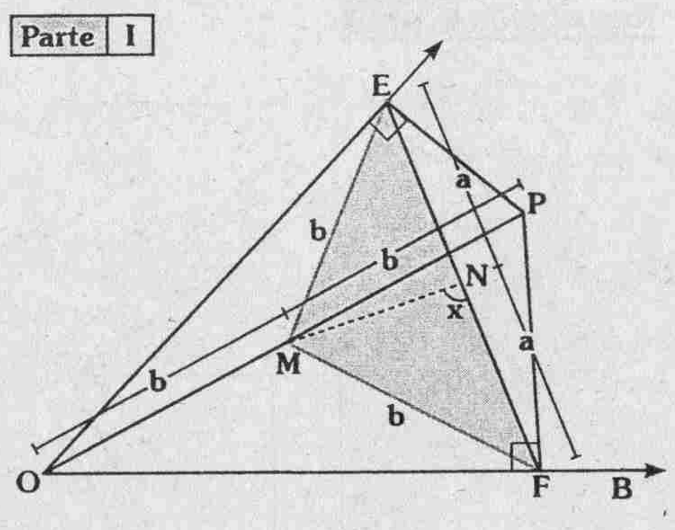
$$\therefore \ \mathbf{x = 24°}$$

Clave A

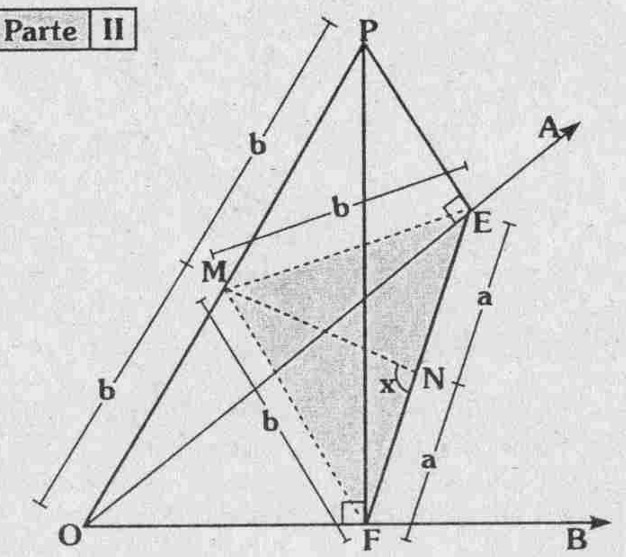
RESOLUCIÓN Nº 70

Se presentan dos posibilidades:

Parte I



Parte II



- Para ambos gráficos, como $\overline{OP}$ es hipotenusa común para los triángulos OEP y OFP, ubicamos M punto medio de $\overline{OP}$, por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa.

$$ME = MF = \frac{OP}{2} = b$$

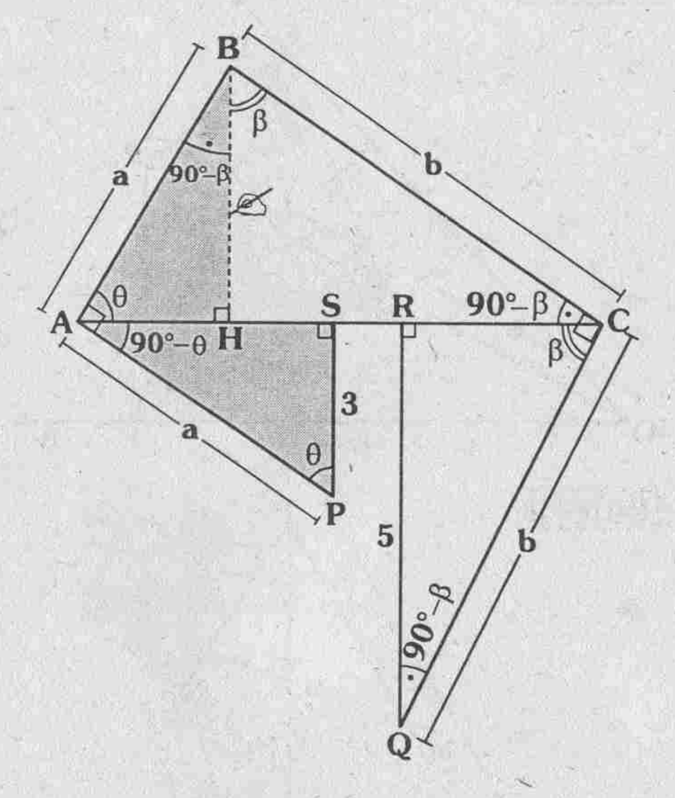
- ΔFME : isósceles

Como $EN = NF \Rightarrow \overline{MN}$ es mediana y altura

$$\Rightarrow \quad x = 90°$$

$$\therefore \quad \mathbf{\overline{MN} \perp BF}$$

RESOLUCIÓN Nº 71



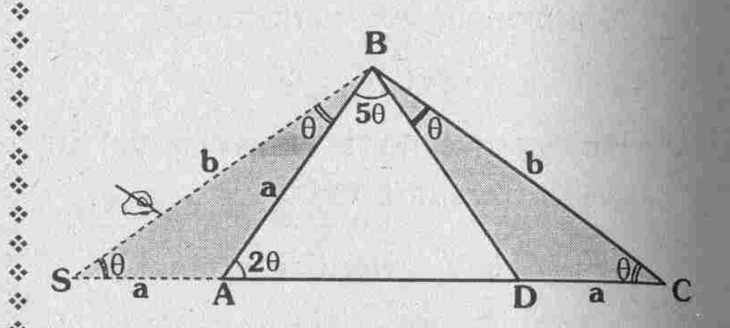
- Nos piden AC.
- Nos conviene trazar BH, pues al completar ángulos , verificamos:
- $⊿ PAS \cong ⊿ ABH$ (ALA) $\Rightarrow AH = 3$
- $⊿ BCH \cong ⊿ CQP$ (ALA) $\Rightarrow HC = 5$

$$\Rightarrow AC = AH + HC$$

$$\therefore \mathbf{AC = 8}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 72



- Nos piden θ
- Como $m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle BCA)$, por los criterios de trazos auxiliares, se prolonga $\overline{CA}$ hasta "S", tal que:

$$m\sphericalangle ASB = \theta$$

$$\Rightarrow \Delta ASB \text{ y } \Delta BDC \text{ son isósceles}$$

$$\Rightarrow AS = AB = a \quad \text{y} \quad SB = BC = c$$

- Luego:

$$\Delta BSA \cong \Delta BCD \text{ (LAL)}$$

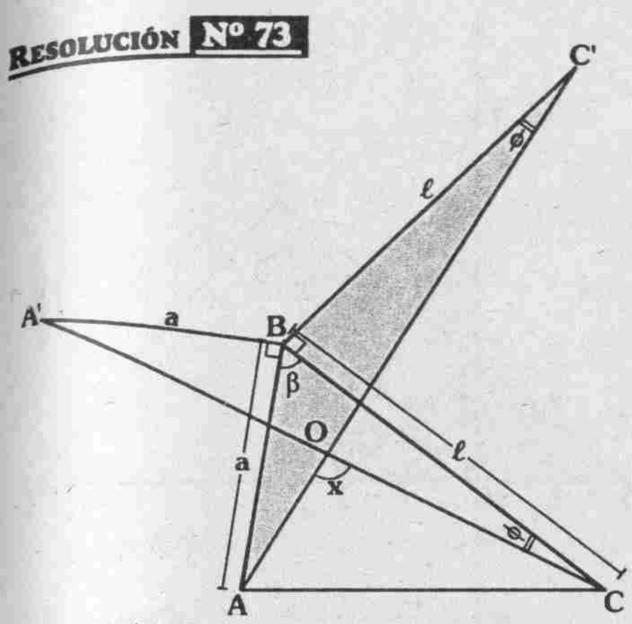
$$\Rightarrow m\sphericalangle DBC = \theta$$

- $\Delta ABC: \; 9\theta = 180°$

$$\therefore \mathbf{\theta = 20°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 73

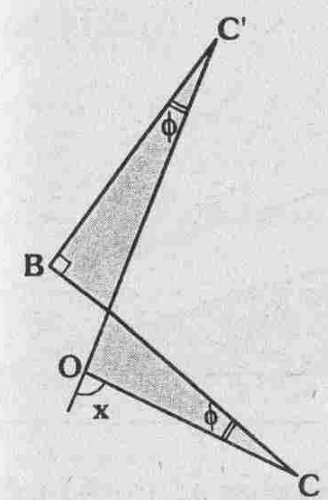


- Piden **x**.
- De acuerdo al gráfico, sea $m\sphericalangle ABC = \beta$

  $\Rightarrow \quad \Delta A'BC \cong \Delta ABC'$ (LAL)

  $\Rightarrow \quad m\sphericalangle BC'A = m\sphericalangle BCA' = \phi$

- Analizando parte del gráfico:



Por teorema:

$m\sphericalangle C'OC + \phi = 90° + \phi$

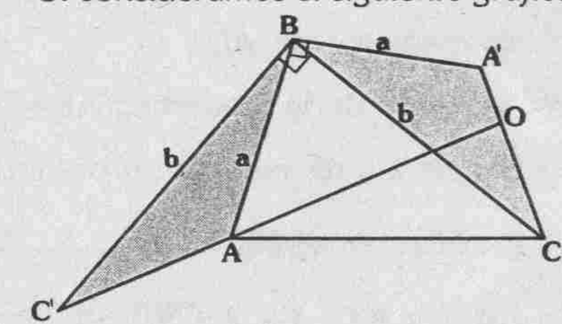
$\Rightarrow m\sphericalangle C'OC = 90°$

$\therefore \mathbf{x = 90°}$

Clave C

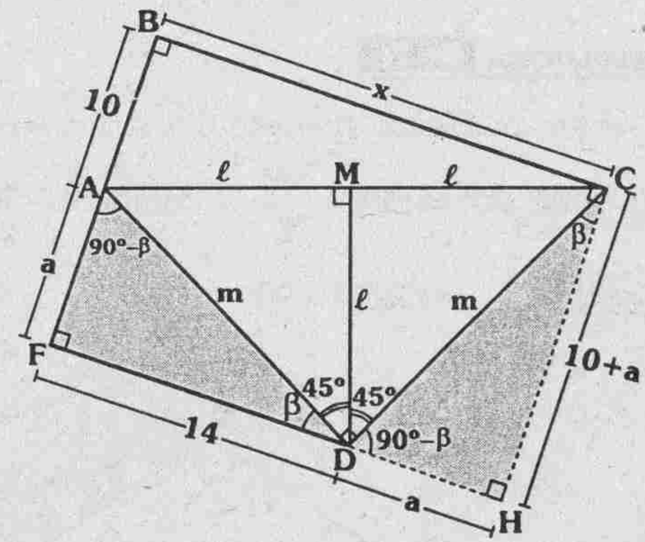
Observación

- *Si consideramos el siguiente gráfico:*



- *También se demuestra* $m\sphericalangle AOC = 90°$ *lo cual queda como ejercicio para el lector.*

RESOLUCIÓN Nº 74



- Nos piden **x**.
- Como: $AM = MD = MC \Rightarrow m\sphericalangle ADC = 90°$

  y $AD = DC$

- Se traza $\overline{CH} \perp \overline{FD}$ $(H \in \overline{FD})$
- Como: $\overline{BC} // \overline{FH}$ y $\overline{FB} // \overline{HC}$

  $\Rightarrow x = 14 + a$ y $HC = 10 + a$

- $⊿AFB \cong ⊿DHC$ (ALA)

  $\Rightarrow 10 + a = 14 \Rightarrow a = 4$

  $\therefore \mathbf{x = 18}$

Clave B

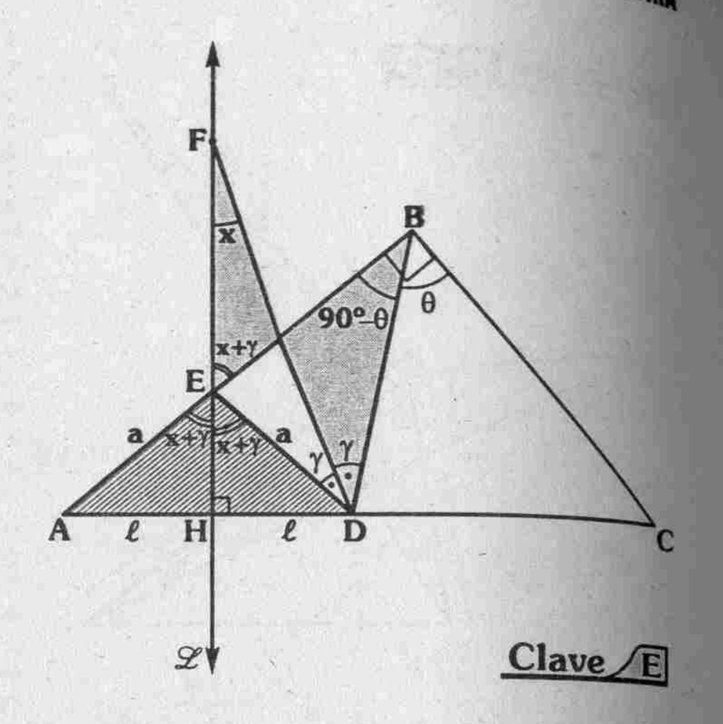
RESOLUCIÓN Nº 75

- Piden x en función de θ.
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AD}$.
- Por teorema de la mediatriz: AE=ED

  $\Rightarrow \overline{EH}$ es altura, mediana y bisectriz.

  $\Rightarrow m\measuredangle AEH = m\measuredangle HED = x + \gamma$
- En ⊳⊲: $x + x + \cancel{\gamma} = \cancel{\gamma} + 90° - \theta$

  $\Rightarrow \quad x = 45° - \dfrac{\theta}{2}$

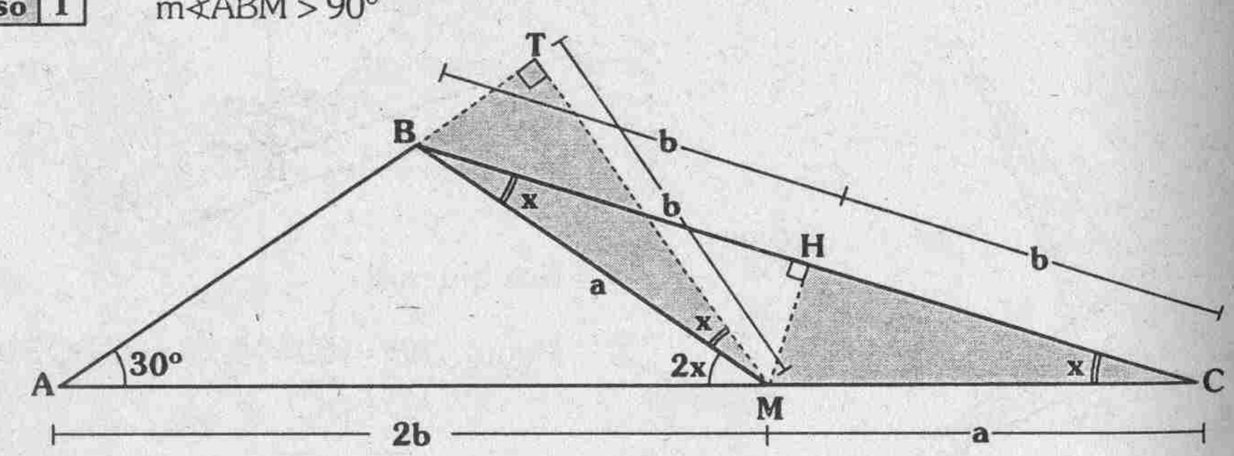


Clave E

RESOLUCIÓN Nº 76

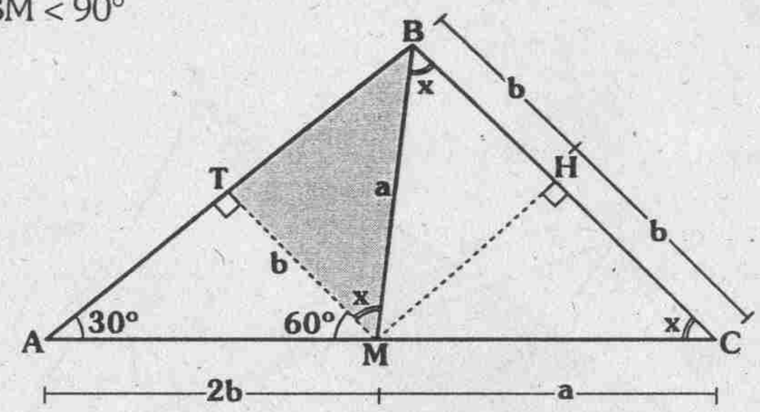
- Este problema presenta dos soluciones. Notemos primero: $m\measuredangle ABM \neq 90°$, pues si fuera $90° \Rightarrow BM = \dfrac{AM}{2}$ y como BC=BM+MC (absurdo).

Caso 1 $\quad m\measuredangle ABM > 90°$



- Como $m\measuredangle ABM > 90°$ Al trazar $\overline{MT} \perp \overleftrightarrow{AB}$ para aprovechar la medida de 30°, T estará en la prolongación de $\overline{AB}$.
- ⊿ATM: notable de 30° $\Rightarrow$ Si $AM = 2b \Rightarrow MT = b$
- Δ BMC: isósceles $\Rightarrow$ al trazar la altura MN
- Se tendrá $BH = HC = b$
- ⊿BMT ≅ ⊿MHC $\Rightarrow$ $m\measuredangle BMT = m\measuredangle MCH = x$
- Luego: $3x = 60°$ $\quad \therefore$ **x = 20°**

Caso 2 $m\measuredangle ABM < 90°$



- En este caso la altura trazada de M está en la parte interna del ΔAMB.
- Análogamente: $\triangle TMB \cong \triangle HCM \Rightarrow m\measuredangle TMB = x$
- En ΔMBC: $x + x = 60° + x$

  $\therefore\ x = 60°$

- De ambos casos, tendríamos: $x = 20°$ ó $x = 60°$
- Sólo aparece en las claves: 20°.

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 77

- Piden x, en función de β y α.
- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son mediatrices de $\overline{AP}$ y $\overline{BC}$ respectivamente por teorema:

  $RB = RC$ y $RA = RP$

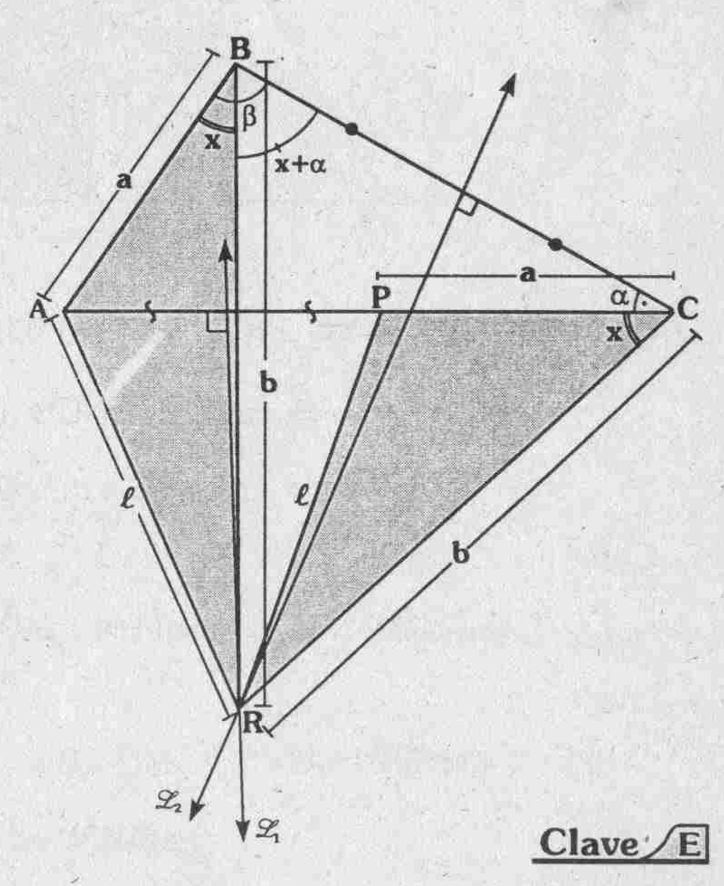
  $\Rightarrow \Delta ABR \cong \Delta PCR$ (LLL)

  $\Rightarrow m\measuredangle ABR = x$

- ΔRBC : isósceles $\Rightarrow m\measuredangle RBC = x + \alpha$

  $\Rightarrow x + x + \alpha = \beta$

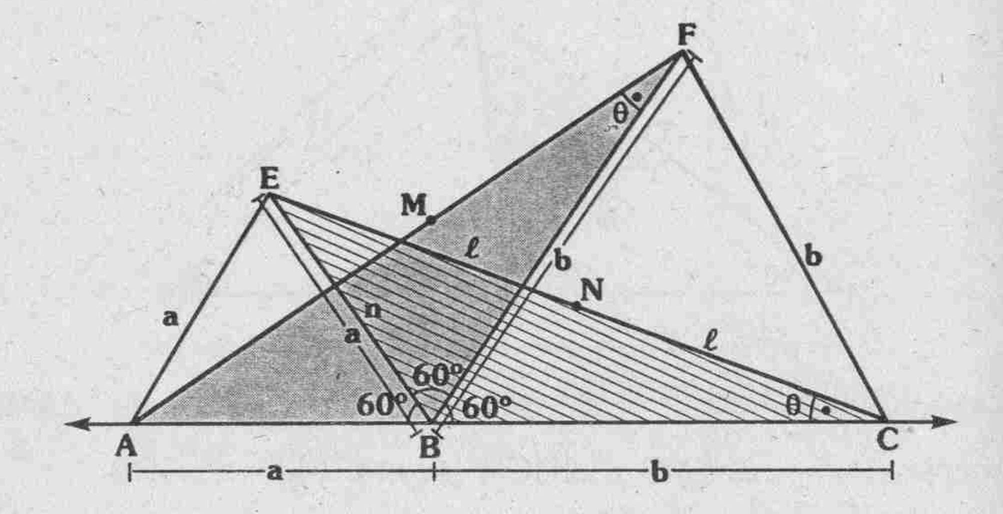
  $$\therefore\ x = \frac{\beta - \alpha}{2}$$



Clave E

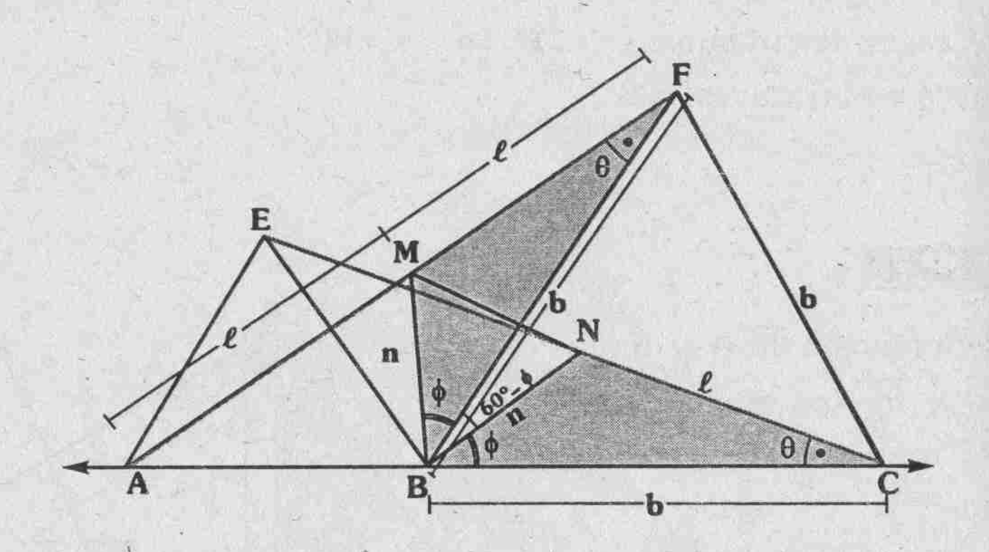
RESOLUCIÓN Nº 78

Paso 1



- $\Delta ABF \cong \Delta EBC$ (LAL) $\Rightarrow AF = EC = 2\ell$ y $m\measuredangle AFB = m\measuredangle ECB = \theta$

Paso 2



- Como $AF = EC \Rightarrow MF = NC$ y $m\measuredangle MFB = m\measuredangle NCB$

$$\Rightarrow \Delta MFB \cong \Delta NCB \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle NBC = m\measuredangle MBF = \phi \quad \text{y} \quad MB = NB$$

- Como :

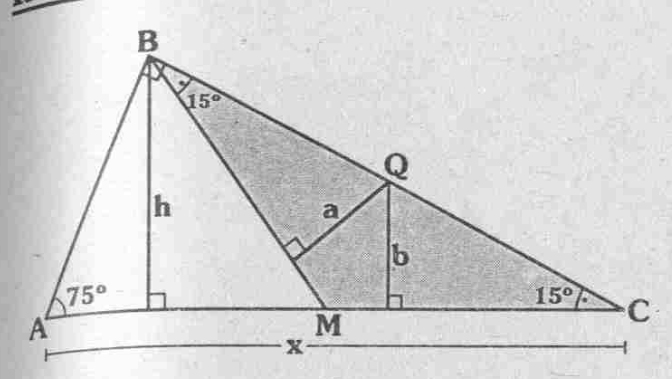
$$m\measuredangle FBC = 60° \Rightarrow m\measuredangle FBN = 60° - \phi$$

- Luego:

$$m\measuredangle MBN = 60° \quad \text{y} \quad MB = BN$$

$\therefore$ **ΔMBN es equilátero.**

RESOLUCIÓN Nº 79



- Piden **x**.
- Como $\overline{BM}$ es mediana del ⊿ABC

$$\Rightarrow BM = AC = MC$$

- ΔBMC isósceles, por teorema (pág. 39 - 40)

$$\Rightarrow h = a + b$$

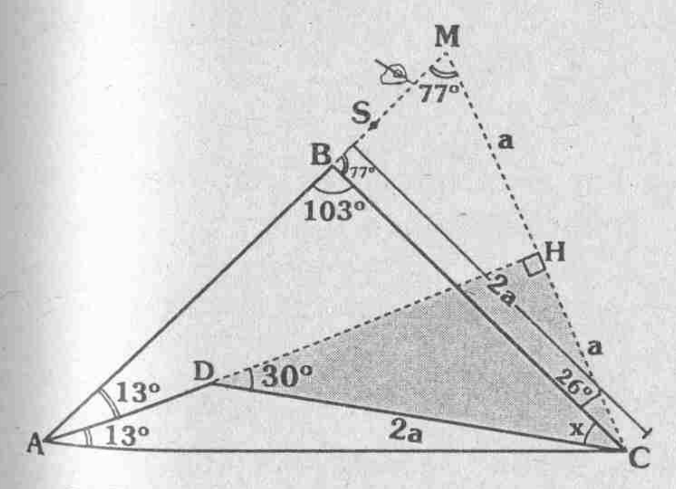
- Por teorema del triángulo de 15°:

$$x = 4h$$

$$\therefore \mathbf{x = 4(a + b)}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 80



- Piden **x**.

$m\sphericalangle SBC = 90° - \alpha$ y $m\sphericalangle BAC = 2\alpha$; para $\alpha = 13°$

- De acuerdo a los criterios de construcción trazamos $\overline{CM}$, tal que $M \in \overleftrightarrow{AB}$ y $m\sphericalangle AMC = 77°$, con ello ΔAMC y ΔBMC son isósceles.
- ΔAMC : $\overline{AH}$ es bisectriz, altura y mediana, entonces MH=MC=a
- ΔBMC : isósceles ⇒ BC = MC = 2a
- Como:

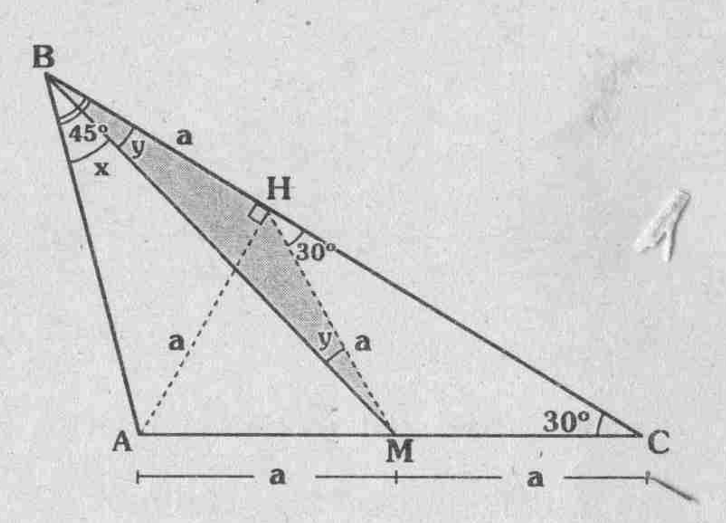
CD=2a ⇒ ⊿DHC: notable de 30°

$$\Rightarrow x + 26° = 60°$$

$$\therefore \mathbf{x = 34°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 81



- Piden **x**
- Dato AM=MC
- Se traza la altura $\overline{AH}$ del triángulo ABC.
- Luego reconocemos que los ⊿s AHB y AHC son notables de 45° y 30° respectivamente.

- Como:

$AM = MC \Rightarrow AH = a \;\; y \;\; BH = a$

- En $\triangle AHC$: $HM = a$
- ΔBHM : isósceles

$\Rightarrow y + y = 30°$

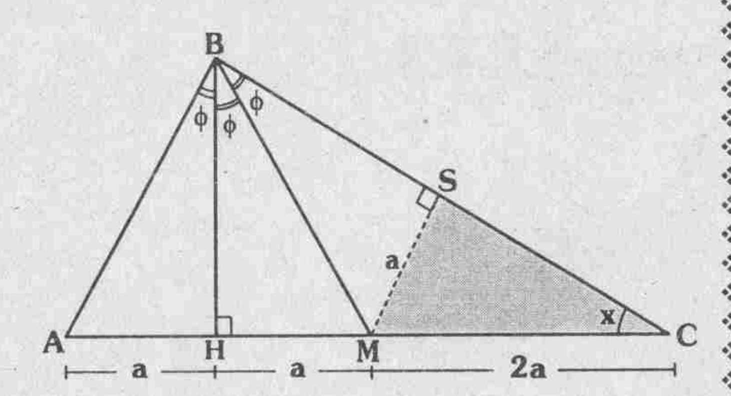
$y = 15$

- Como: $x + y = 45°$

$\therefore \; \mathbf{x = 30°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 82



- Piden: **x**
- En el ΔABM, $\overline{BH}$ es altura y bisectriz

$\Rightarrow \Delta ABM$: isósceles, $\overline{BH}$ también es mediana $\Rightarrow AH = HM$

- Como $\overline{BM}$ es bisectriz del $\measuredangle HBS$ entonces por teorema:

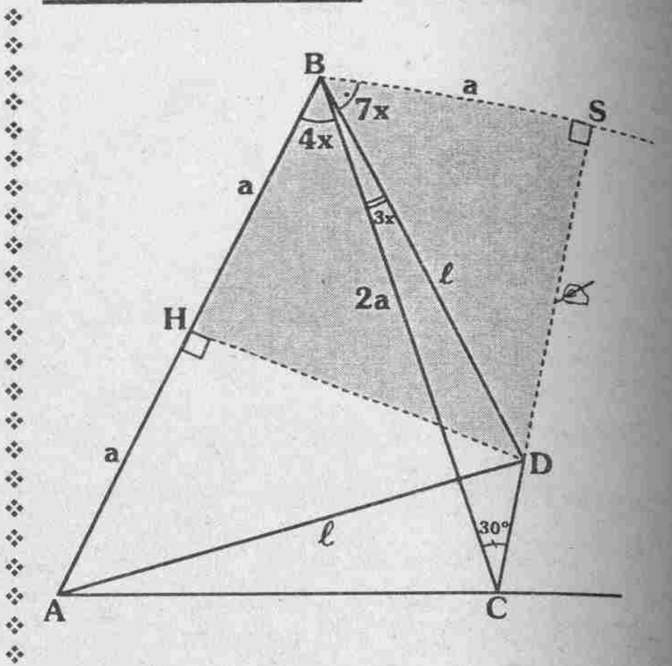
$\Rightarrow MH = MS = a$

- $\triangle MSC$ notable

$\therefore \; \mathbf{x = 30°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 83



- Piden: $m\measuredangle ABC = 4x$
- Como ΔABC es isósceles, trazamos la altura $\overline{DH}$, la cual también es mediana

$\Rightarrow BH = HA = a$

- Se traza $\overline{BS} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (S en $\overleftrightarrow{CD}$)
- $\triangle CBS$ notable de 30°

$\Rightarrow BS = \dfrac{BC}{2} = a$

- Por el recíproco del teorema de la bisectriz, debido a que:

$BH = BS \Rightarrow m\measuredangle DBS = 7x$

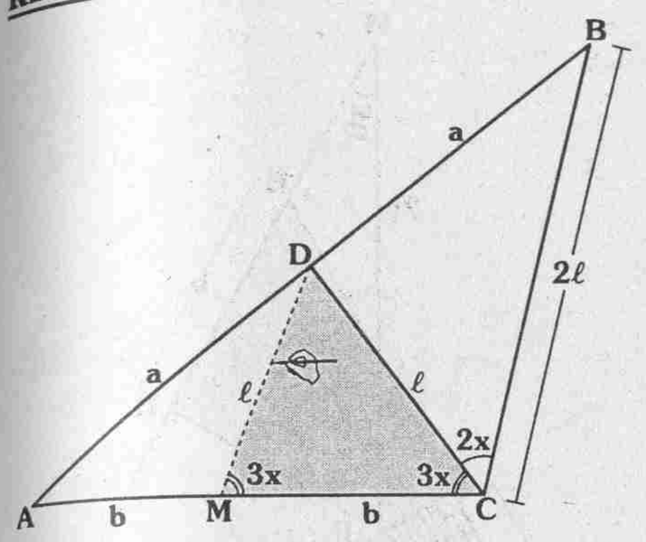
- $\triangle CSB$:

$3x + 7x = 60° \Rightarrow x = 6°$

$\therefore \; \mathbf{m\measuredangle ABC = 24°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 84



- Piden **x**.
- Como AD=BD, es decir D es punto medio de $\overline{AB}$, trazamos la base media $\overline{DM}$ del ΔABC.

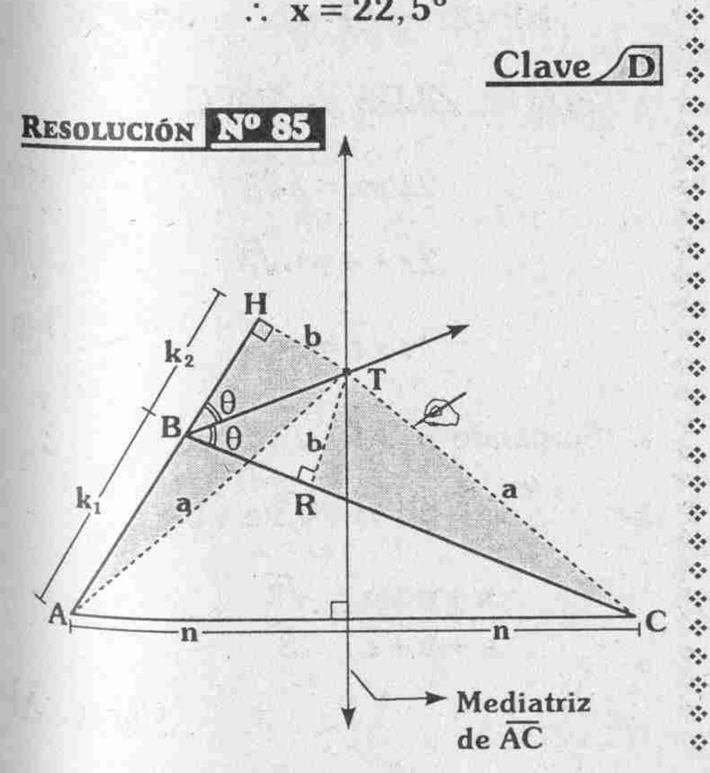
$$\Rightarrow DM = \frac{BC}{2} = \ell \quad y \quad \overline{MD} // \overline{CB}$$

- ΔMDC : isósceles $\Rightarrow m\measuredangle DMC = 3x$
- Como $\overline{MD} // \overline{CB} \Rightarrow 3x + 5x = 180°$

$$\therefore \mathbf{x = 22,5°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 85



- Piden BC, en función de k_1 y k_2.
- Por teorema de la bisectriz:

$$TH = TR = b \quad y \quad BH = BR = k_2$$

- Por teorema de la mediatriz:

$$TA = TC$$

- $⊿AHT \cong ⊿CRT$

$$\Rightarrow RC = AH = k_1 + k_2$$

- Finalmente:

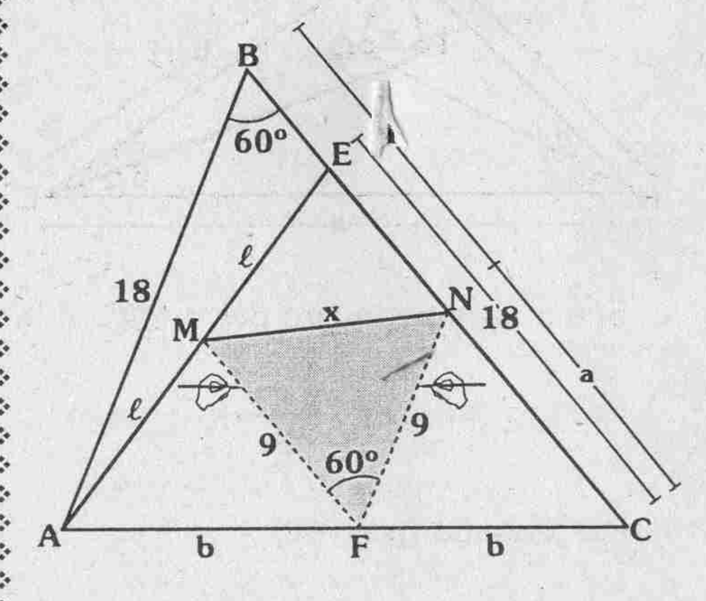
$$BC = BR + RC$$

$$\Rightarrow BC = k_2 + k_1 + k_2$$

$$\therefore \mathbf{BC = k_1 + 2k_2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 86



- Piden **x**.
- Al ubicar "F" punto medio de $\overline{AC}$, tendremos:

- ΔAEC: $\overline{MP}$ es base media:

$$\Rightarrow MF = 9 \quad y \quad \overline{MF} // \overline{EC}$$

- ΔABC: $\overline{NF}$ es base media:

$$\Rightarrow NF = 9 \quad y \quad \overline{NP} // \overline{BA}$$

- Como: $\overline{MF} // \overline{EC}$ y

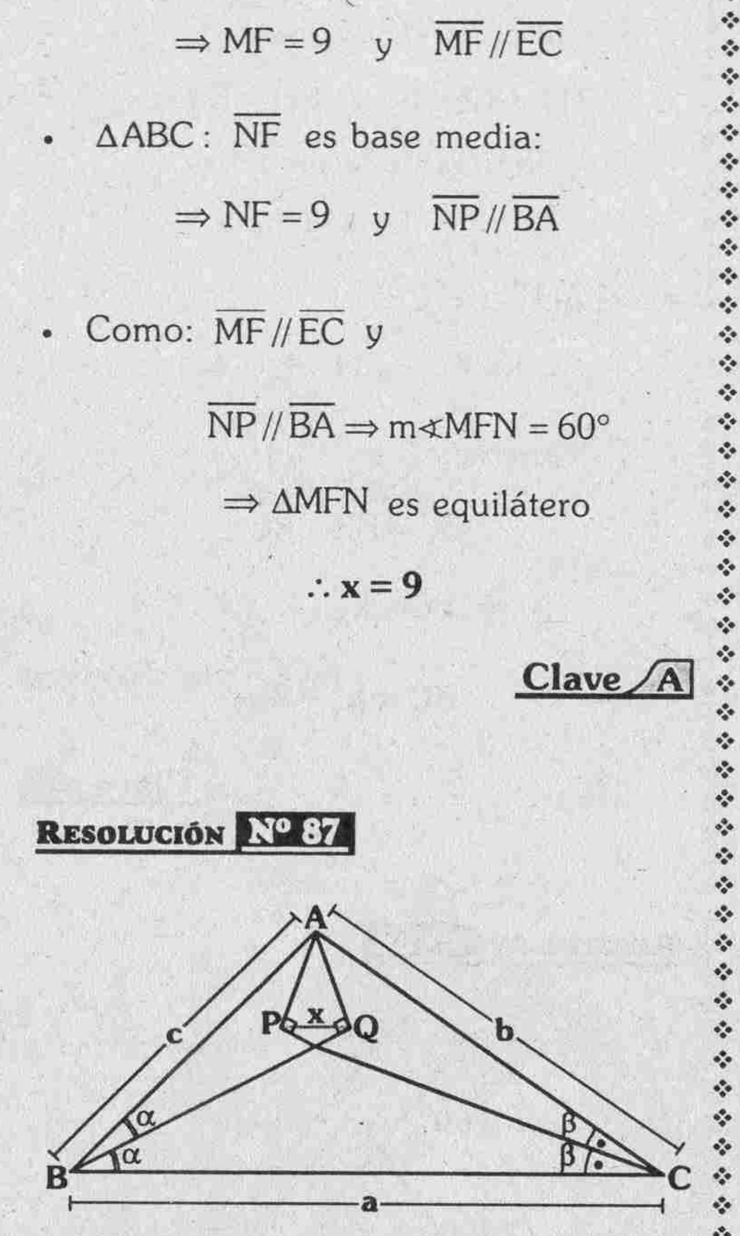
$$\overline{NP} // \overline{BA} \Rightarrow m\measuredangle MFN = 60°$$

$$\Rightarrow \Delta MFN \text{ es equilátero}$$

$$\therefore \mathbf{x = 9}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 87



- Sea p: semiperímetro del ΔABC:

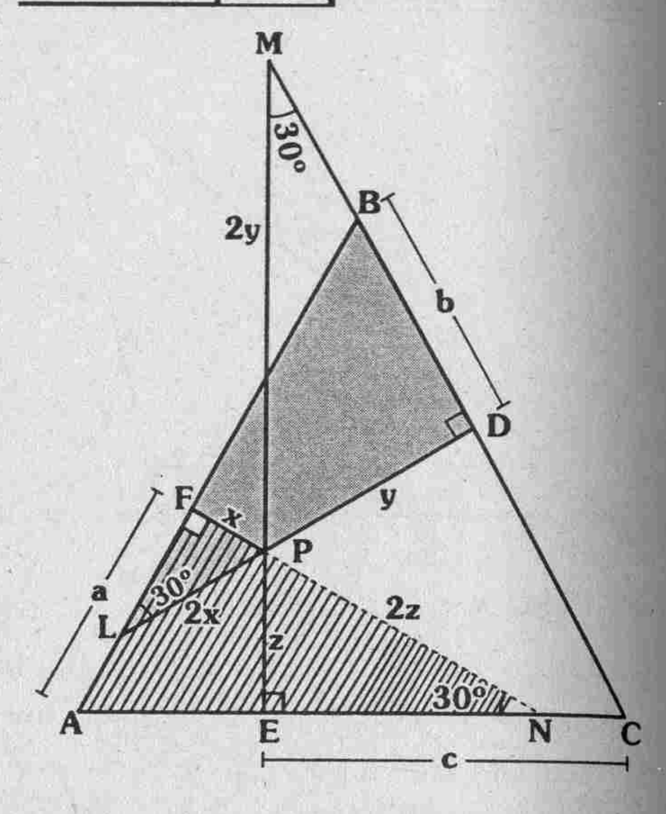
$$\Rightarrow p = \frac{a+b+c}{2}$$

- Por teorema (pág. 40)

$$\mathbf{x = p - a}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 88



- Piden: $\dfrac{x+y+z}{a+b+c}$

- ⊿LFP, ⊿PEN y ⊿PDM notables de 30°, entonces:

$$NP = 2z \; ; \; LP = 2x \; y \; PM = 2y$$

- ⊿AFN, ⊿LDB y ⊿MEC

$$2z + x = a\sqrt{3} \quad \text{... (I)}$$

$$2x + y = b\sqrt{3} \quad \text{... (II)}$$

$$2y + z = c\sqrt{3} \quad \text{... (III)}$$

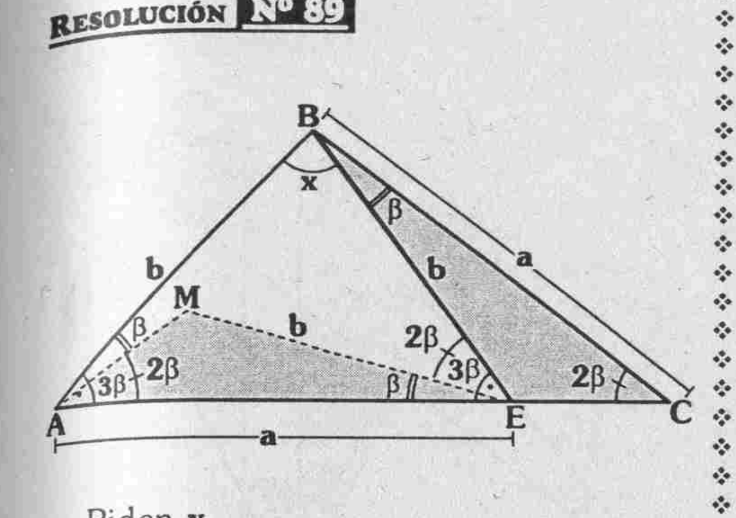
- Sumando (I), (II) y (III):

$$3(x+y+z) = \sqrt{3}(a+b+c)$$

$$\therefore \frac{\mathbf{x+y+z}}{\mathbf{a+b+c}} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 89



- Piden **x**.
- En ΔABC:

$$x + 6\beta = 180° \qquad \dots (I)$$

- Se traza $\overline{EM}$ y $\overline{AM}$ tal que:

$$m\sphericalangle MAE = 2\beta \quad y$$

$$m\sphericalangle AEM = \beta$$

- $\Delta MAE \cong \Delta ECB$ (ALA)

$$\Rightarrow ME = BE$$

- Por teorema del cuadrilátero cóncavo (pág. 46–47)

$$x = 120° - 2\beta \qquad \dots (II)$$

- De (I) y (II):

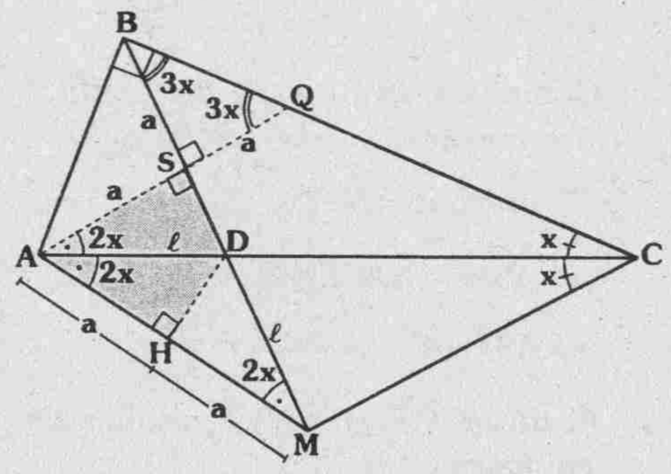
$$120° - 2\beta + 6\beta = 180°$$

$$\Rightarrow \beta = 15°$$

$$\therefore \mathbf{x = 90°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 90



- Piden **x.**
- Al completar ángulos, tenemos:

$$m\sphericalangle AMD = 2x \Rightarrow \Delta ADM : \text{isósceles}$$

- Como $\overrightarrow{CA}$ es bisectriz del $\sphericalangle BCM$, nos conviene trazar $\overline{AQ}$ tal que:

$$m\sphericalangle CAQ = 2x$$

$$\Rightarrow \Delta AQC \cong \Delta AMC \text{ (ALA)}$$

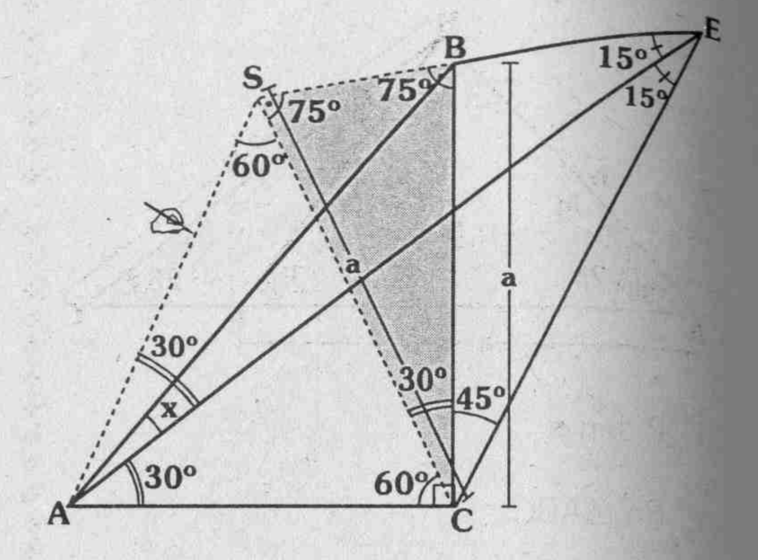
$$\Rightarrow AQ = AM = 2a$$

- En ⊿ABQ, como $m\sphericalangle AQB = 3x$, $\overline{BS}$ es mediana, luego AS=SD.
- Al trazar $\overline{DH} \perp \overline{AM}$, tendremos AH=HM, por ser ΔADM isósceles
- Como: $AS = AH$, $\Delta SAD \cong \Delta HAD$ (LAL) $\Rightarrow m\sphericalangle ASD = 90°$
- ⊿BSQ: $3x + 3x = 90°$

$$\therefore \mathbf{x = 15°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 91



- Piden **x**.
- Como $\overrightarrow{EA}$ es bisectriz del $\measuredangle BEC$, nos conviene trazar $\overline{AS}$ tal que:

$$m\measuredangle SAE = 30°$$

$$\Rightarrow \Delta SAE \cong \Delta ACE \text{ (ALA)}$$

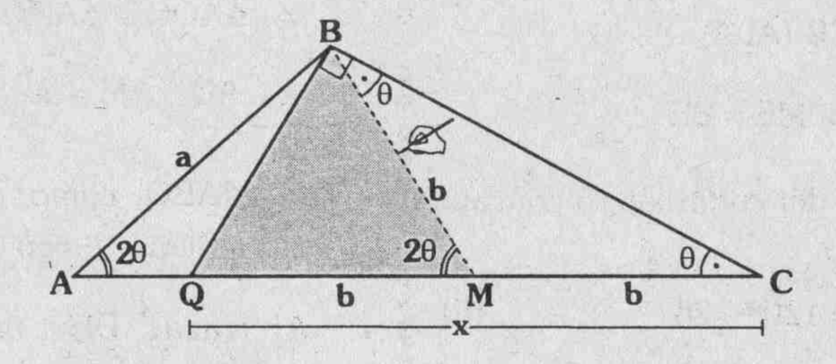
$$\Rightarrow AS = AC$$

- Al trazar $\overline{CS}$ el ΔASC resultar ser equilátero.
- ΔSCB : isósceles $\Rightarrow SC = CB = a$
- $⊿ACB$: $AC = CB \Rightarrow 30° + x = 45°$

$$\therefore \mathbf{x = 15°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 92



- Piden x, en función de "a".
- En el $⊿QBC$, se traza la mediana $\overline{BM}$, entonces: $QM = MC = MB$
- ΔMBC es isósceles

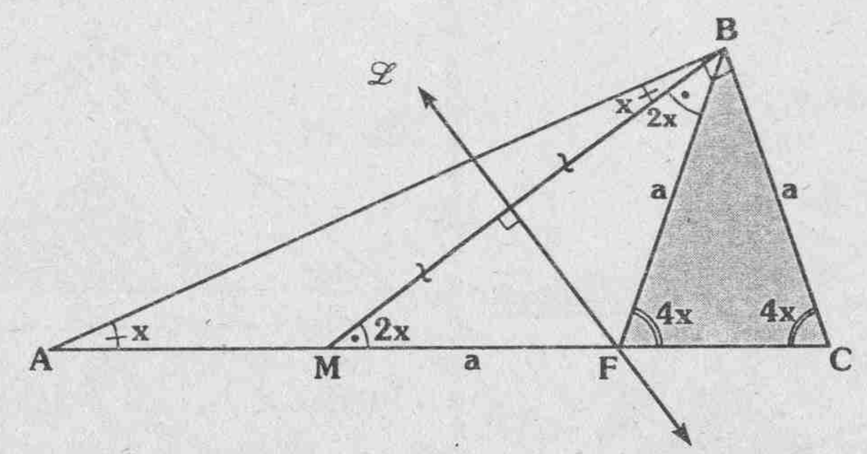
$$\Rightarrow \quad m\measuredangle MBC = \theta \quad \text{y} \quad m\measuredangle BMQ = 2\theta$$

- ΔABM : isósceles $\Rightarrow a = b$

$$\therefore \mathbf{x = 2a}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 93



- Nos piden **x**.
- Como $\overline{BM}$ es mediana del ⊿ABC ⇒ AM = MC = MB ,

  con ello: m∢MAB = m∢ABM = x
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{MB}$, por teorema: FM = FB
- ΔFBC : isósceles ⇒ m∢BFC = m∢FCB = 4x
- ⊿ABC: x + 4x = 90°

$$\therefore\ \mathbf{x = 18°}$$

Clave D

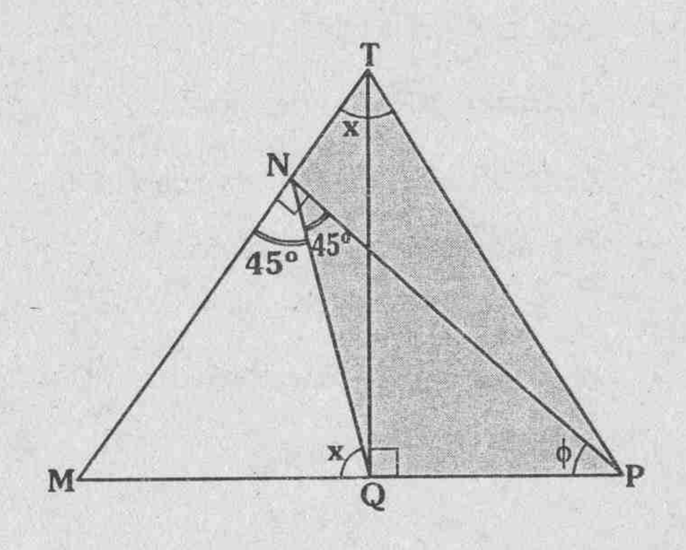
RESOLUCIÓN Nº 94

- Piden x, en función de ϕ .
- Por lo analizado en en la pág. 58
- Se tendrá:

  m∢MQN = x

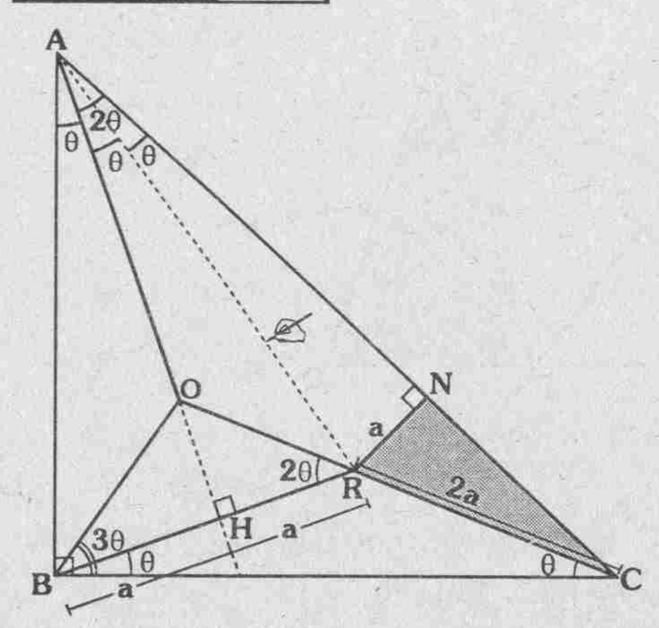
- En ΔNQP :

  $$\mathbf{x = 45° + \phi}$$



Clave C

RESOLUCIÓN Nº 95



- Piden θ.
- En ΔAOC, como:

$$m\sphericalangle OBC = 3(m\sphericalangle BCC)$$

nos conviene trazar $\overline{BR}$ tal que: $m\sphericalangle CBR = \theta$, entonces: ΔBRC y ΔBOR son isósceles.

- Luego: $BR = RC$ y $BO = OR$
- Al prolongar $\overline{AO} \Rightarrow \overline{AO} \perp \overline{BR}$
- ΔBOC: $BH = HR$
- Al trazar $\overline{AR}$, tendremos:

$$AB = BR \Rightarrow m\sphericalangle BAH = m\sphericalangle HAR = \theta$$

- Por teorema de la bisectriz:

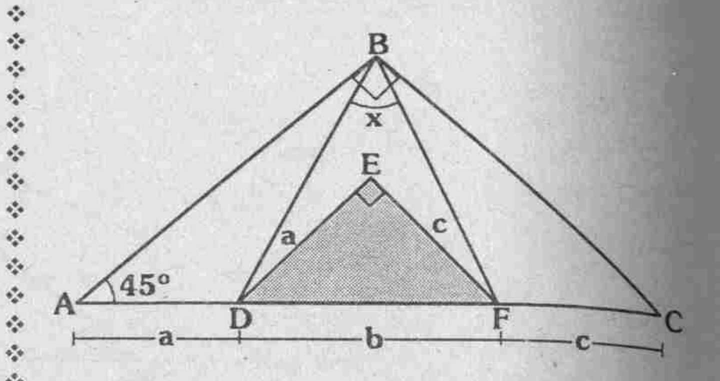
$$HR = RN = a$$

- $\triangle RNC$: notable $\Rightarrow m\sphericalangle RCN = 30°$
- $\triangle ABC$: $4\theta + 30° = 90°$

$$\theta = 15°$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 96

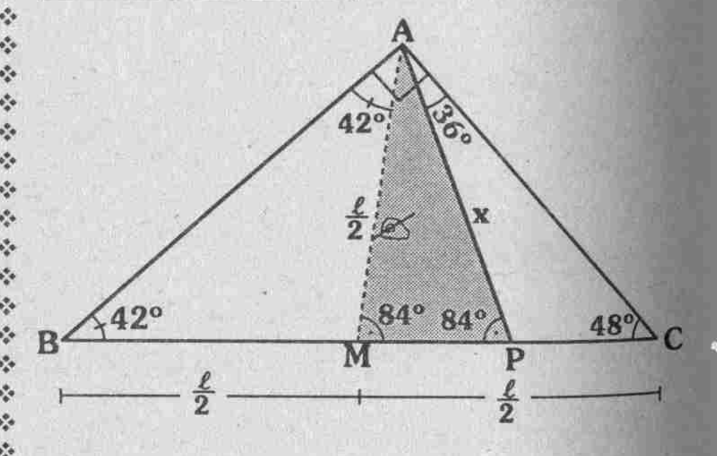


- Piden **x**.
- $\triangle DEF$: $a^2 + c^2 = b^2$
- Por teorema (pág. 35 y 36)

$$\therefore x = 45°$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 97



- Piden **x**, en función de ℓ.
- En $\triangle BAC$, se traza la mediana $\overline{AM}$, por teorema:

$$BM = MC = MA = \frac{\ell}{2}$$

- ΔAMB, por ángulo exterior:

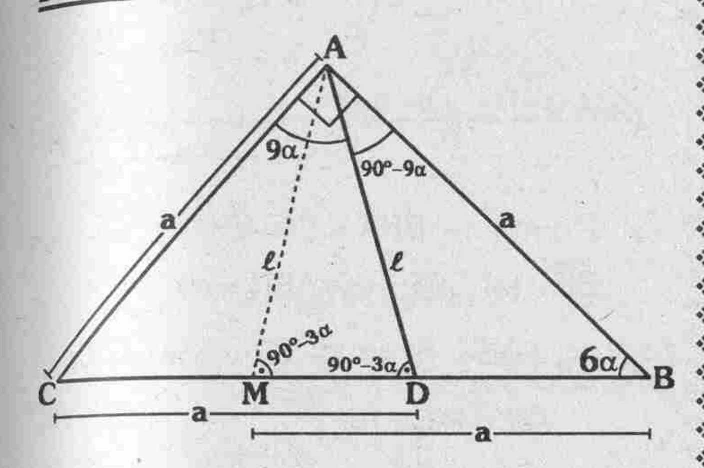
$$m\sphericalangle AMP = 84°$$

- $\triangle MAP$: isósceles

$$\therefore\ \mathbf{x = \frac{\ell}{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 98



- Dato: $m\sphericalangle ABD = 3\theta$ y

$$m\sphericalangle DAC = \frac{9\theta}{2}$$

- Nos piden: θ
- Hagamos: $\theta = 2\alpha$

$$\Rightarrow m\sphericalangle ABD = 6\alpha \quad y$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle DAC = 9\alpha$$

- Como: $m\sphericalangle ABM = 6\alpha$ y

$$m\sphericalangle ADC = 90° - 3\alpha$$

- Se traza $\overline{AM}$ tal que:

$$m\sphericalangle AMD = 90° - 3\alpha$$

$\Rightarrow \triangle MAD$ y $\Rightarrow \triangle MAB$: isósceles

- Luego:

$\triangle CDA \cong \triangle BMC$ (LAL) $\Rightarrow AC = a$

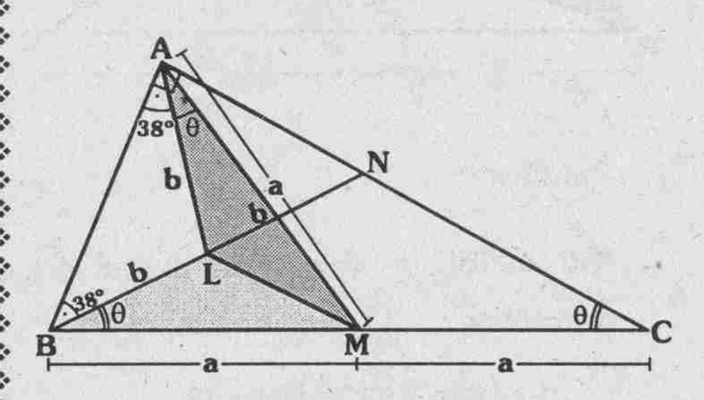
- $⊿CAB$: isósceles $\Rightarrow 6\alpha = 45°$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{15°}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{\theta = 15°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 99



- Piden: $m\sphericalangle LAM$
- En los triángulos ABC y ABN, $\overline{AM}$ y $\overline{AL}$ son medianas, por teorema:

$$BM = MC = AM = a \quad y$$

$$BL = LN = AL = b$$

- $\triangle BLA$: isósceles

$$\Rightarrow m\sphericalangle LAB = 38°$$

- $\triangle AMB$: isósceles

$$\Rightarrow m\sphericalangle LAM = \theta$$

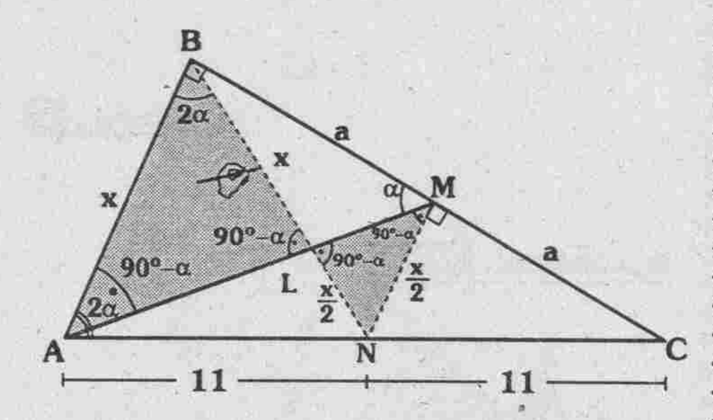
- $⊿ABC$:

$$38° + 2\theta = 90°$$

$$\therefore\ \mathbf{\theta = 26°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 100



- Piden **x**.
- En ⊿ABC, se traza la mediana $\overline{BN}$, entonces:

$$AN = NC = BN = 11$$

- También:

$$m\sphericalangle ABN = m\sphericalangle DAN = 2\alpha$$

$$\Rightarrow \Delta ABL: \text{ isósceles} \Rightarrow BL = x$$

- En ⊿ABC, $\overline{NM}$ es base media, luego:

$$MN = \frac{x}{2} \quad y \quad \overline{MN} // \overline{AB}$$

- ΔLMN: isósceles $\Rightarrow LN = \dfrac{x}{2}$

$$x + \frac{x}{2} = 11$$

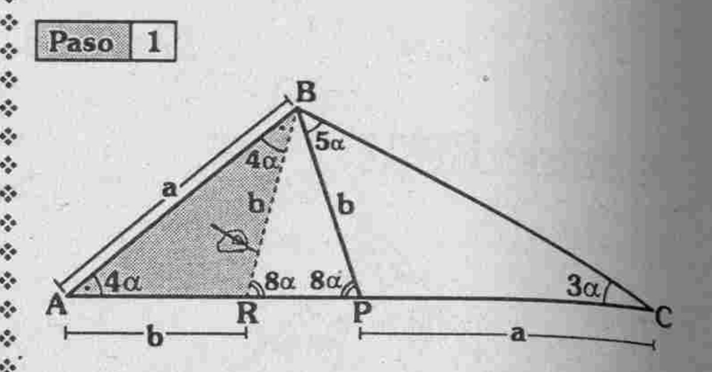
$$\therefore \mathbf{x} = \frac{\mathbf{22}}{\mathbf{3}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 101

Nos piden $m\sphericalangle PBC$.

Paso 1

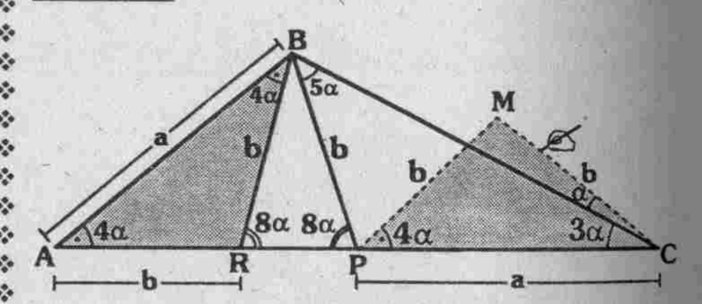


- Como $m\sphericalangle BPA = 2(m\sphericalangle BAP)$, se traza $\overline{BR}$, tal que: $m\sphericalangle ABR = 4\alpha$

$\Rightarrow \Delta ABR$ y $\Rightarrow \Delta RBP$: isósceles

$$AR = RB = BP$$



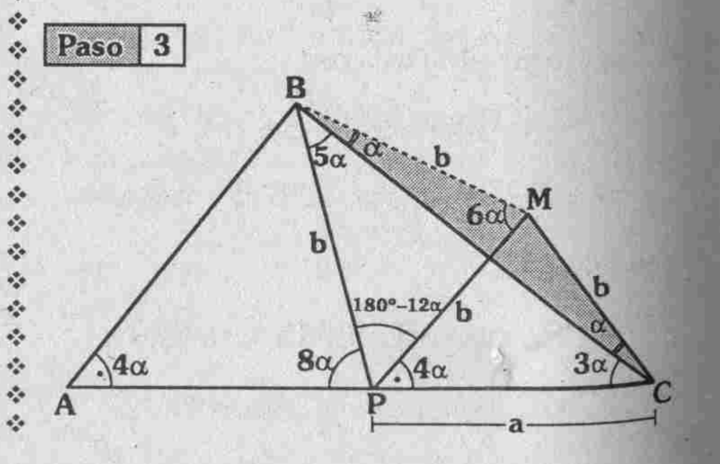


- Como AB = PC entonces construimos:

$\Delta PMC \cong \Delta ARB \Rightarrow PM = MC = b$ y

$m\sphericalangle MPC = m\sphericalangle MCP = 4\alpha$

Paso 3



- Como m∢BPM = 180° – 12α y ΔBPM es isósceles

$\Rightarrow$ m∢PBM = m∢PMB = 6α

- Luego: m∢MBC = α
- ΔBMC : isósceles

$\Rightarrow$ BM = MC = b

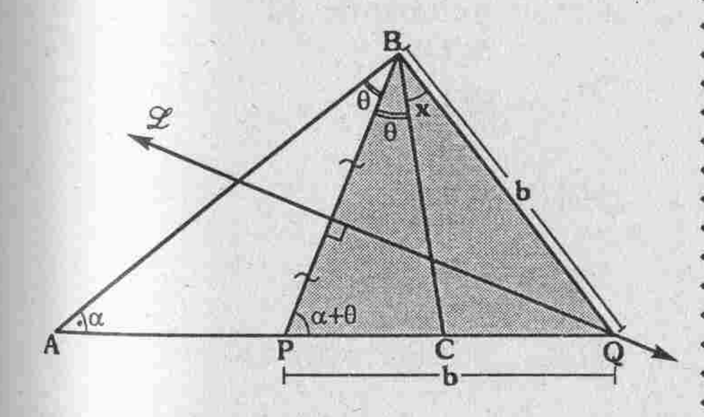
- ΔPBM : equilátero

$\Rightarrow 6\alpha = 60° \Rightarrow \alpha = 10°$

∴ m∢PBC = 50°

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 102



- Piden **x** en función de α.
- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{PB}$, por teorema:

QB = QP $\Rightarrow$ ΔPQB es isósceles

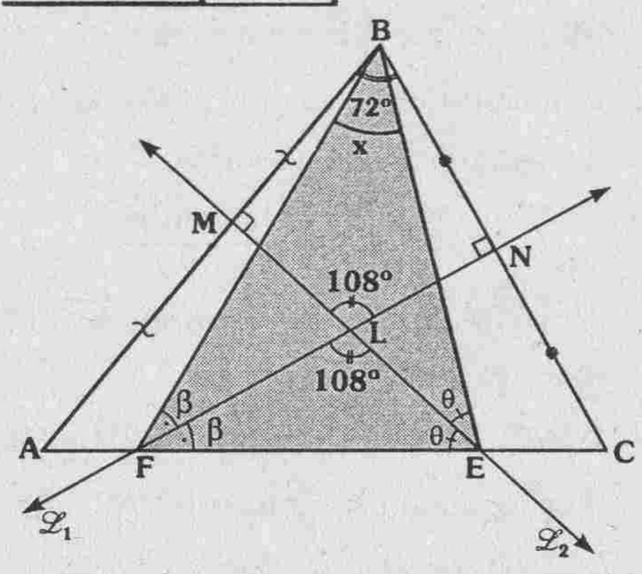
$\Rightarrow$ m∢PBQ = m∢BPQ

$x + \theta = \alpha + \theta$

$\therefore$ **x = α**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 103



- Piden **x**.
- $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son mediatrices de $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente

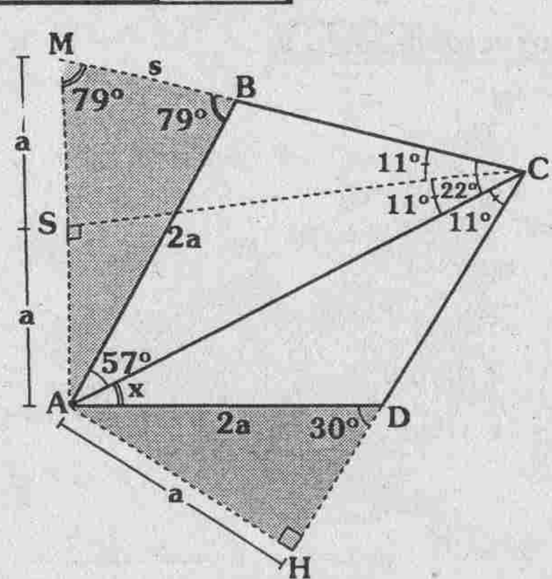
$\Rightarrow$ EA = EB y FB = FC

- ΔFBC y ΔAEB : isósceles $\Rightarrow$ $\overline{EM}$ y $\overline{FN}$
- Son también bisectrices:
- ΔFBC : $90° + \dfrac{x}{2} = 108°$

$\therefore$ **x = 36°**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 104



- Piden **x**.
- Al prolongar $\overline{CB}$ verificamos:

$$m\sphericalangle SBA = 79° \quad y \quad m\sphericalangle ACB = 22°$$

se tiene la siguiente forma:

$$m\sphericalangle SBA = 90° - \frac{m\sphericalangle ACB}{2}$$

- Por ello nos conviene trazar $\overline{AM}$ tal que: $m\sphericalangle AMB = 79°$
- ΔMAB y ΔMBA : isósceles $\Rightarrow AM = AB$
- Por teorema de la bisectriz: $AS = AH$
- $\triangle AHD$: notable de 30°

$$\Rightarrow x + 11° = 30°$$

$$\therefore \mathbf{x = 19°}$$

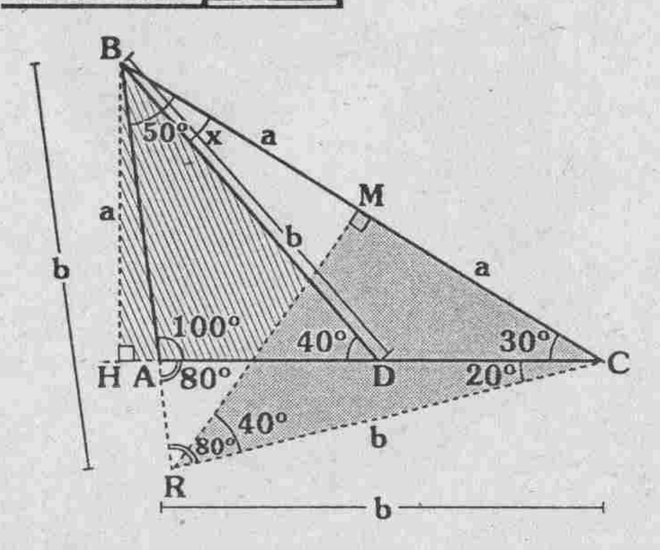
Clave C



Asi como en el problema 76 si consideramos $m\sphericalangle ADC < 90°$ tendremos otra respuesta con el mismo procedimiento.

$$x = 139°$$

RESOLUCIÓN Nº 105



- Piden **x**.
- Cuando prolongamos $\overline{BA}$ nos damos cuenta:

$$m\sphericalangle CAR = 80° \quad y$$

$$m\sphericalangle ABC = 50°$$

aprovechemos la presencia de dichas medidas.

- Para ello, prolongamos $\overline{BA}$ hasta R tal que:

$$m\sphericalangle CRA = 80° \Rightarrow \Delta CRA \text{ y } \Delta BRC$$

son isósceles, luego:

$$CA = CR = RB = b$$

- ΔBRC: se traza $\overline{RM} \perp \overline{BC}$

$$\Rightarrow BM = MC$$

- $\triangle BHC$: notable de 30°

$$\Rightarrow BH = \frac{BC}{2} = a$$

- $\triangle BHD \cong CMR$

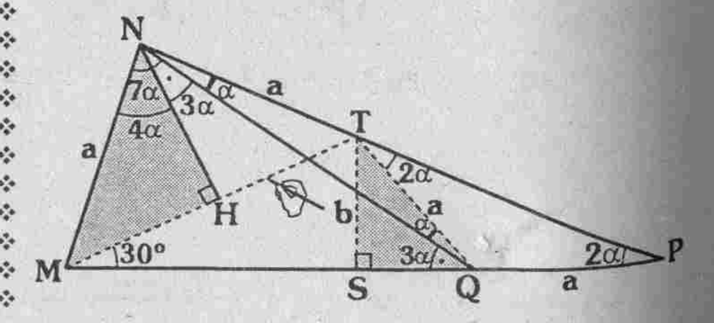
$$\Rightarrow m\sphericalangle HDB = 40°$$

- ΔDBC: $x + 30° = 40°$

$$\therefore \mathbf{x = 10°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 106



- Piden: m∢NPM
- En ΔQPN , como:

m∢QPN = 2(m∢QNP)

nos conviene trazar $\overline{QT}$ tal que:

m∢TQN = α

⇒ ΔNTQ y ΔTQP : isósceles

- Asi tenemos: QP = QT = TN = NM
- En ΔMNT se traza la altura $\overline{NH}$, la cual es bisectriz y mediana

⇒ MH = HT = b

- En ΔMTQ, se traza la altura TS, ahora tendremos:

◺HMN ≅ ◺STQ ⇒ TS = b

- ◺MST: notable de 30°
- ΔMTS, por ángulo exterior:

m∢MTN = 30° + 2α

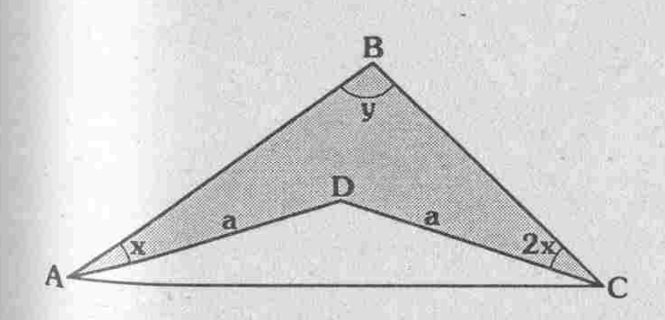
- ◺NHT:

$4\alpha + 30° + 2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 10°$

∴ **m∢NPM = 20°**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 107



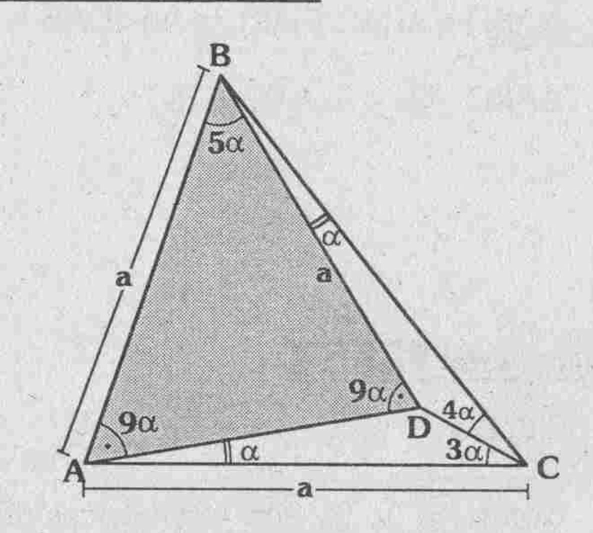
- Piden: x + y
- Por teorema del cuadrilátero cóncavo (pág 46–47):

y = 120° − x

∴ **x + y = 120°**

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 108



- Piden: m∢BAC
- En ∡ACBD:

m∢ADB = 9α

⇒ AB = BD

- ΔABC : isósceles ⇒ m∢DB = 9α

$\Rightarrow 9\alpha + 9\alpha + 5\alpha = 180°$

$\Rightarrow \alpha = \frac{15°}{2}$

∴ **m∢BAC = 75°**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 109

- Piden **x**.
- Como BD = AC y dada la relación de medidas angulares, nos conviene prolongar $\overline{BC}$ y trazar $\overline{AR}$ tal que:

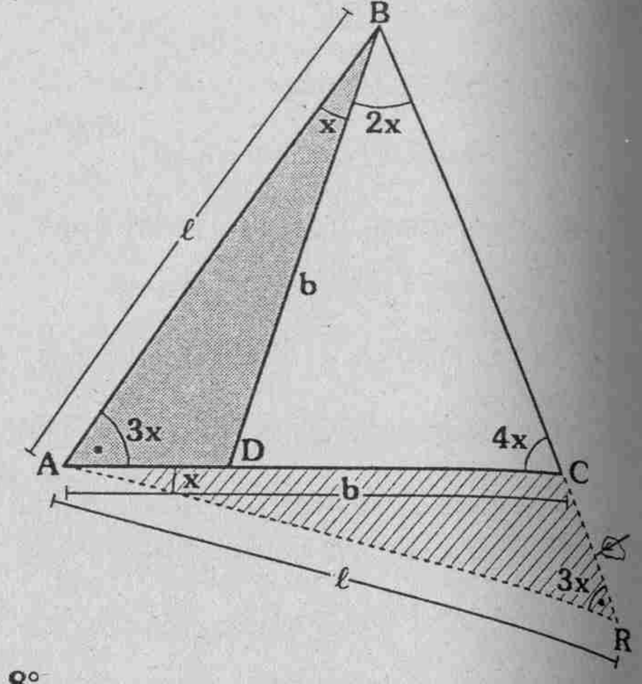
$$m\measuredangle CAR = x \Rightarrow m\measuredangle ARC = 3x$$

- Luego:

$$\triangle ABR: \text{ isósceles } \Rightarrow AB = AR$$

- $\triangle ABD \cong \triangle RAC$ (LAL) $\Rightarrow m\measuredangle DAB = 3x$
- $\triangle ABC: \ 3x + 3x + 4x = 180°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 18°}$$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 110

- Piden **x**.
- Como $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_1}$ y $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_2}$ son mediatrices de $\overline{PQ}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, por teorema:

$$FP = FQ \quad y$$
$$FB = FC$$

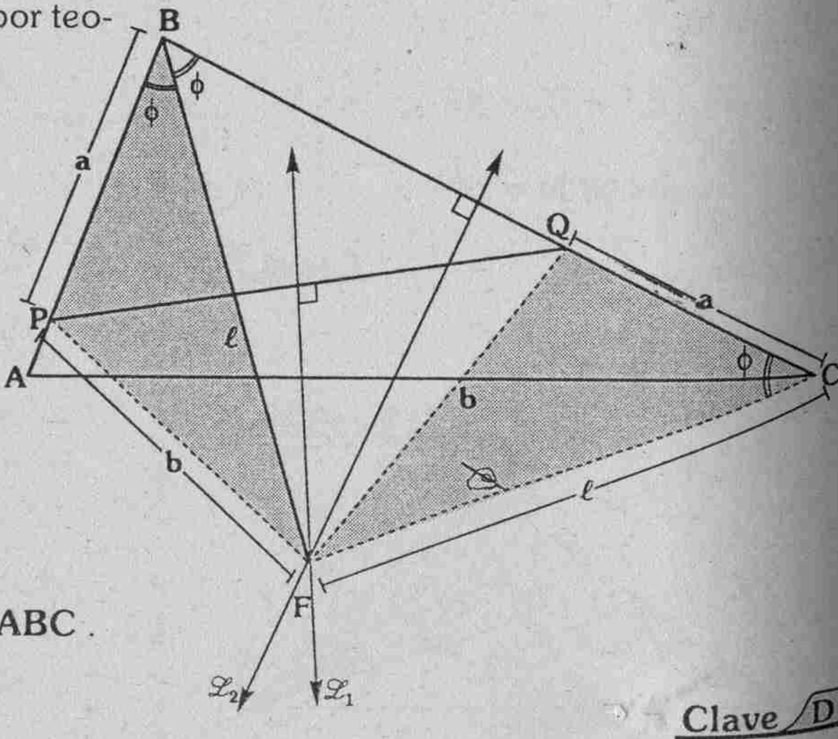
- $\triangle FBC$: isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle FBC = m\measuredangle FCB = \phi$$

- $\triangle PBF \cong \triangle QCF$ (LLL)

$$\Rightarrow m\measuredangle FBP = \phi$$

$\therefore$ **$\overrightarrow{BF}$ es bisectriz del $\measuredangle$ABC** .

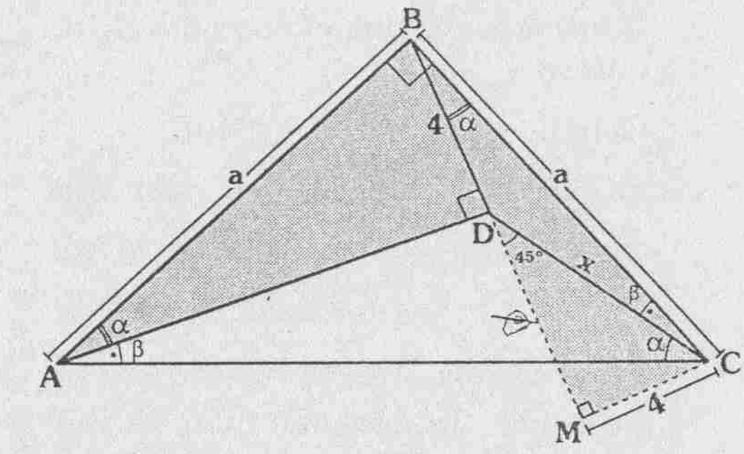


Clave D

RESOLUCIÓN Nº 111

- Nos piden **x**.
- De los datos: $\alpha+\beta=45^\circ$
- $\triangle ABD \cong \triangle BCM$ (ALA)

  $\Rightarrow MC=BD=4$
- $\triangle DCM$: notable de 45°

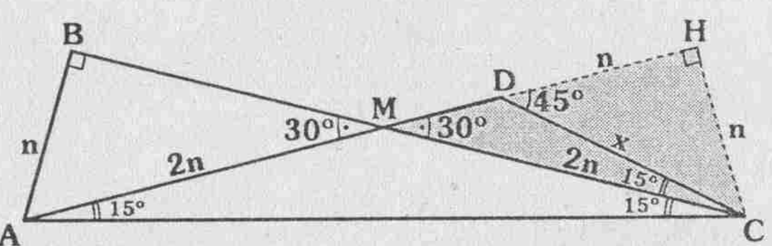


$\therefore\ \mathbf{x=4\sqrt{2}}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 112

- Piden **x**.
- $\triangle ABM$: notable de $30 \Rightarrow AM=2n$
- $\triangle AMC$: isósceles $\Rightarrow AM=MC=2n$
- $\triangle MHC$: notable de $30^\circ \Rightarrow HC=n$
- $\triangle BHC$: notable de 45°



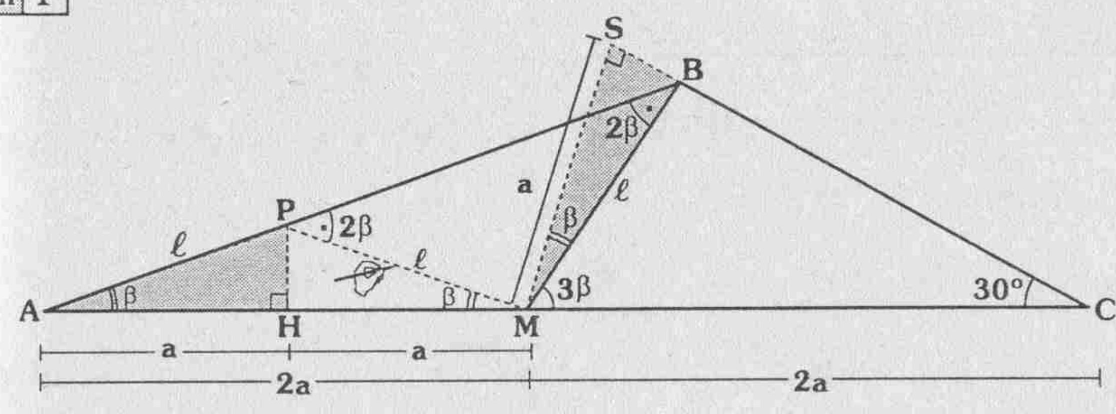
$\therefore\ \mathbf{x=n\sqrt{2}}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 113

Este problema tiene dos soluciones:

Solución 1



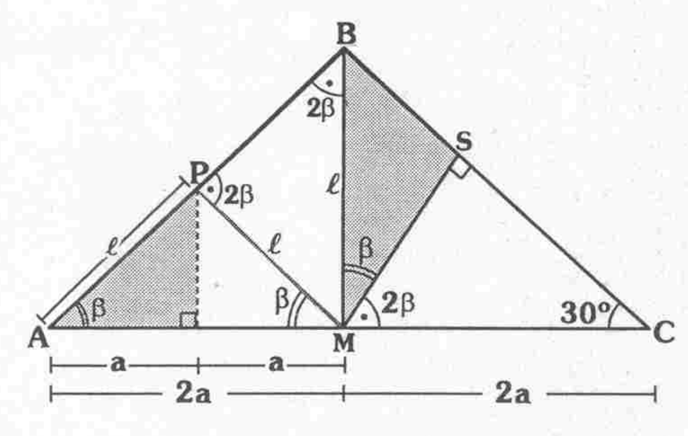
- Consideremos que el ángulo MBC es obtuso.
- Como: $m\sphericalangle MBA = 2(m\sphericalangle MAB)$ entonces se traza $\overline{MP}$ tal que $m\sphericalangle AMP = \beta$, luego ΔAPM y ΔPMB son isósceles.
- En el triángulo APM, se traza la altura $\overline{PH}$, la cual también es mediana (AH=HM=a).
- Se traza $\overline{MS} \perp \overleftrightarrow{BC}$, pues ⊿MSC es notable de 30°, entonces MC = 2(MS)
- ⊿ AHP ≅ ⊿ MSB ⇒ $m\sphericalangle SMB = \beta$
- Luego:

$$4\beta = 60^\circ$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\beta = 15^\circ}$$

Solución 2

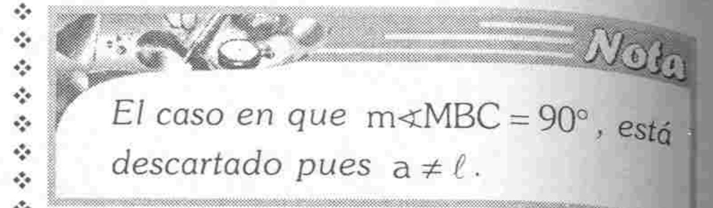
- Ahora consideremos $m\sphericalangle MBC < 90^\circ$, el procedimiento es análogo:



$$m\sphericalangle MBC < 90^\circ \Rightarrow S \in \overline{BC}$$

- Luego: $2\beta = 60^\circ$

$$\therefore\ \boldsymbol{\beta = 30^\circ}$$



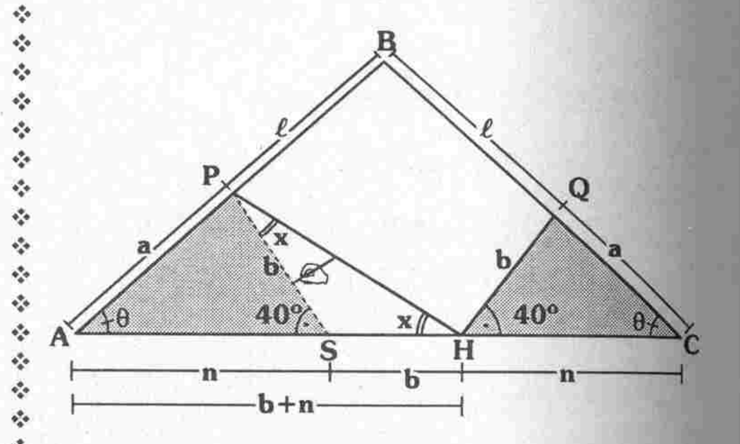
El caso en que $m\sphericalangle MBC = 90^\circ$, está descartado pues $a \neq \ell$.

- De ambas soluciones, tenemos:

$$\boldsymbol{\beta = 15^\circ} \ \text{ó}\ \boldsymbol{\beta = 30^\circ}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 114



- Piden **x**.
- Por dato: AB = BC y PB = BQ, entonces: AP = QC
- Como AH = b + n, se ubica S en $\overline{AH}$ tal que AS = n, así tenemos:

$$\Delta SAP \cong \Delta HCQ \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow PS = HQ$$

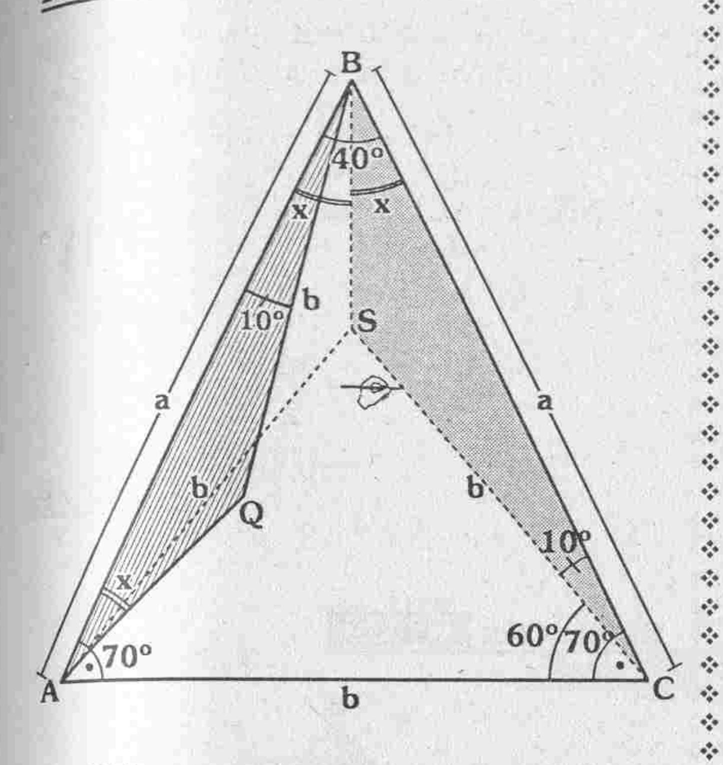
- ΔPSH es isósceles, luego:

$$x + x = 40^\circ$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = 20^\circ}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 115



- Piden **x**.

- Como el ΔABQ tiene dos lados que miden "a" y "b" y el ángulo entre ellos mide 10°, se busca un triángulo congruente a él.

- Se traza $\overline{CS}$ tal que $m\sphericalangle SCB = 10°$ y $SC = b$, con ello

$$\Delta ABQ \cong \Delta BCS \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle SBC = x$$

- Como $SC = CA$ y $m\sphericalangle SCA = 60°$

$$\Rightarrow \Delta ASC \text{ es equilátero}$$

- Debido a que:

$$AB = BC \quad y$$

$$AS = SC$$

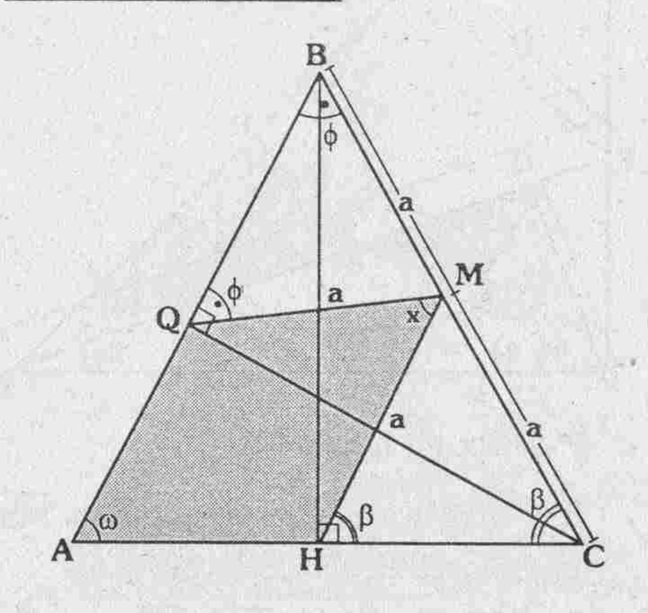
$$\Rightarrow m\sphericalangle ABS = m\sphericalangle SBC = x$$

$$\Rightarrow \quad x + x = 40°$$

$$\therefore \mathbf{x = 20°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 116



- Piden **x** en función de ω.

- Como M es punto medio de $\overline{BC}$, por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa, en

- ⊿BQS y ⊿BHC:

$$MB = MC = MQ = MH$$

- ΔBQM y ΔHMC: isósceles

- ⏢: $x + \omega = \phi + \beta$

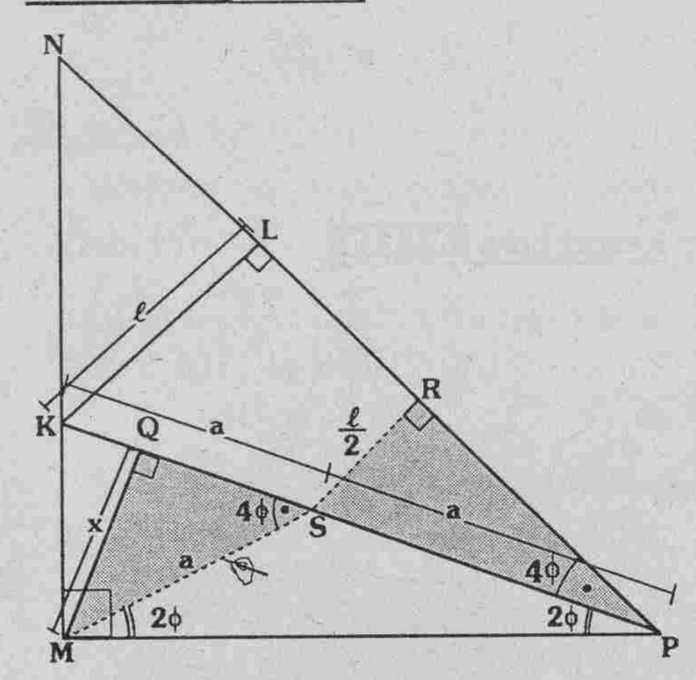
- ΔABC: $\underbrace{\phi + \beta} + \omega = 180°$

$$x + \omega + \omega = 180°$$

$$\therefore \mathbf{x = 180° - 2\omega}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 117



- Piden **x** en función de ℓ.
- En ⊿PMK se traza la mediana $\overline{MS}$, por teorema KS = SP = MS = a.
- En ⊿KLP, se traza $\overline{SR} \perp \overline{NP}$, por teorema de la base media:

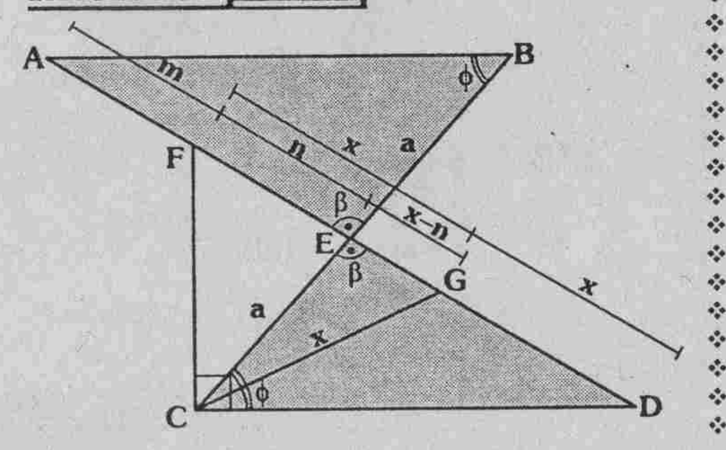
$$SR = \frac{\ell}{2}$$

- En ⊿MSQ ≅ ⊿SPR (ALA)

$$\therefore\ \mathbf{x} = \frac{\ell}{2}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 118



- Piden **x**.
- En ⊿FCD, por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa:

$$FG = GD = CG = x$$

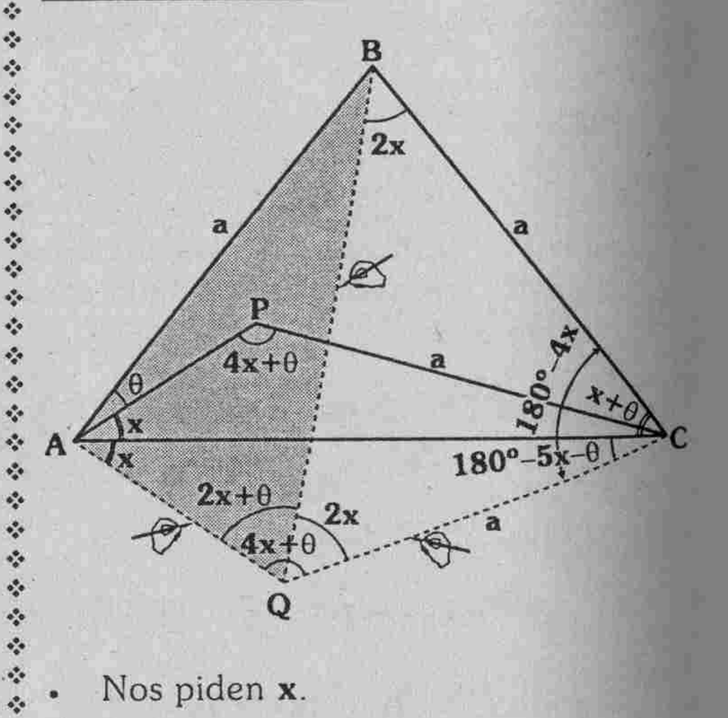
- ΔBEA ≅ ΔCED (ALA)

$$\Rightarrow\ x + x - n = m + n$$

$$\therefore\ \mathbf{x = n + \frac{m}{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 119



- Nos piden **x**.
- Trazamos el triángulo AQC congruente con el triángulo BQC, tal que:

$$m\sphericalangle PAC = m\sphericalangle QAC\ ;$$

$$m\sphericalangle APC = m\sphericalangle AQC = 4x + \theta$$

$$\Rightarrow\ QC = PC = a$$

- Al completar "ángulos", notemos:

$m\measuredangle ACQ = 180° - 5x - \theta$

$\Rightarrow \quad m\measuredangle QCB = 180° - 4x$

- Como QC=CB

$\Rightarrow \quad m\measuredangle CQB = m\measuredangle QBC = 2x$

$\Rightarrow \quad m\measuredangle BQA = 2x + \theta$

- ΔABQ : isósceles

$\Rightarrow \quad AB = BQ = a$

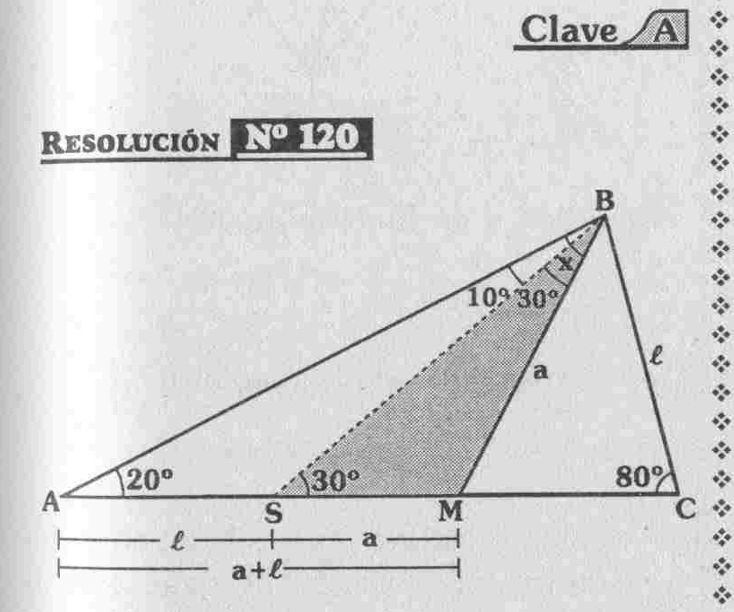
- ΔQBC : equilátero:

$$2x = 60°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 30°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 120



- Piden **x**.
- Como ΔABC isósceles donde:

$m\measuredangle A = 20$ y $m\measuredangle C = 80°$,

se ubica S en $\overline{AM}$ tal que $AS = \ell$, (ver pag. 57 y 58) entonces:

$m\measuredangle ABS = 10° \Rightarrow m\measuredangle BSC = 30°$

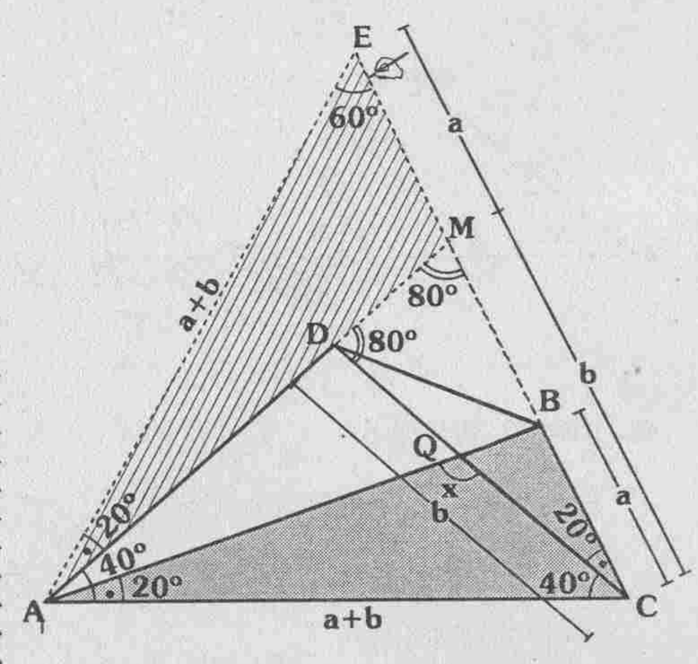
- Como $AM = a + \ell \Rightarrow SM = a$, luego ΔSMB es isósceles

$\Rightarrow \quad m\measuredangle SBM = 30°$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 40°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 121



- Piden **x**.
- Con $m\measuredangle ACD = 60°$ y el ΔDCM resulta ser isósceles, con $DC = CM = b$, nos conviene prolongar $\overline{CM}$ hasta "E" tal que $MB = a$, entonces:

ΔAEC es equilátero

$\Delta AEM \cong \Delta ACB$ (LAL)

$\Rightarrow \quad m\measuredangle BAC = 20°$

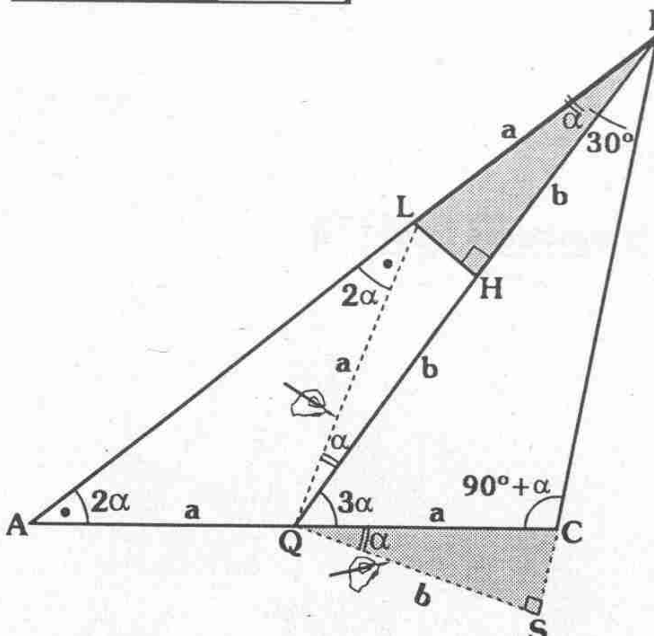
- ΔAQC :

$$x + 20° + 40° = 180°$$

$$\therefore \quad \mathbf{x = 120°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 122



- Piden: m∢BQC
- En ΔAQC : m∢BQC = 3α
- Como m∢BAQ = 2(m∢QBA) , trazamos $\overline{QL}$ tal que :

  m∢LQB = α ⇒ AQ = QL = LB = a
- En ΔQLB , se traza la altura $\overline{LH}$, luego QH = HB = b .
- Se traza:

  $\overline{QS} \perp \overleftrightarrow{BC}$ ⇒ m∢CQS = α
- ⊿ QSC ≅ ⊿ LHB (ALA) ⇒ QS = b
- ⊿BSQ: notable de 30°

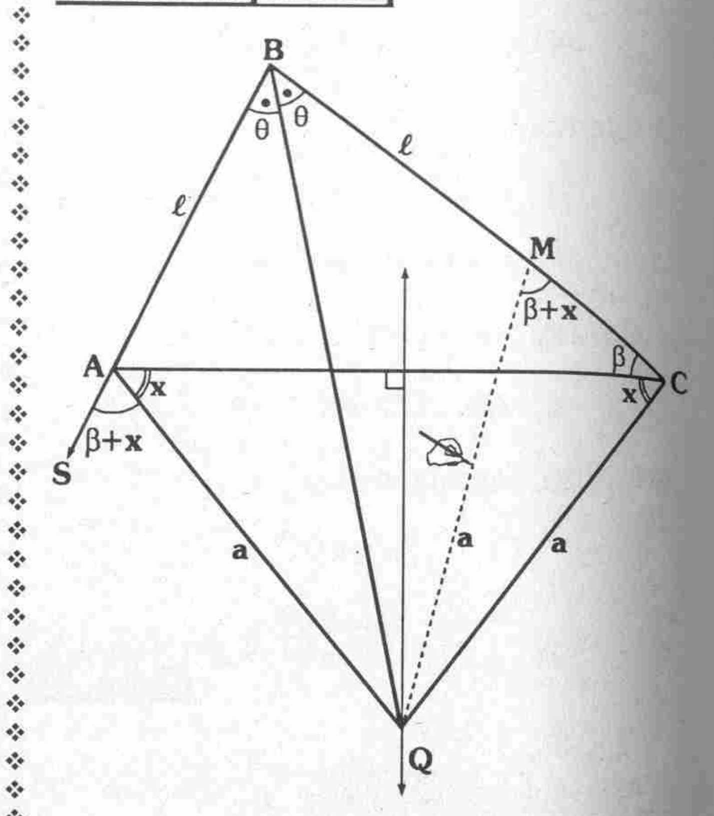
  ⇒ 4α = 60°

  α = 15°

  ∴ **m∢BQC = 45°**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 123



- Piden **x** en función de m∢B .
- Sea m∢B = 2θ
- Por teorema de la mediatriz:

  QA = QC
- Como el ΔABC es escaleno, consideremos (sin pérdida de generalidad) que BC ≥ AB .
- Se ubica M en $\overline{BC}$, tal que BM = BA

  ΔABQ ≅ ΔMBQ (LAL) ⇒ QM = a
- ΔQMC : isósceles
- Por la congruencia:

  m∢QMC = m∢QAS = β + x
- En ΔABC :

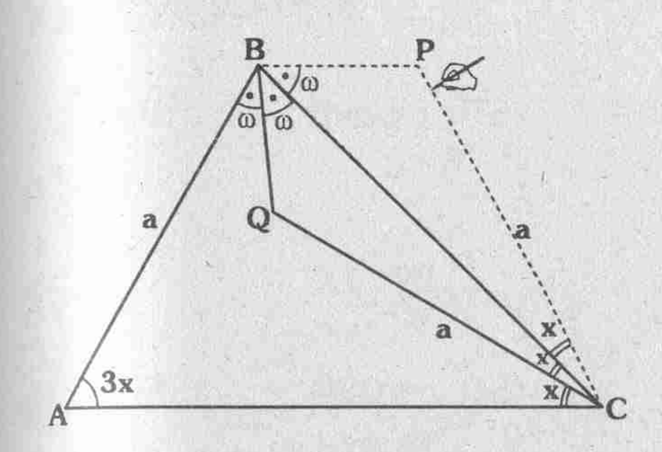
$\beta + 2x = \beta + 2\theta$

$\Rightarrow x = \theta$

$\therefore \ \mathbf{x = \dfrac{m\sphericalangle B}{2}}$

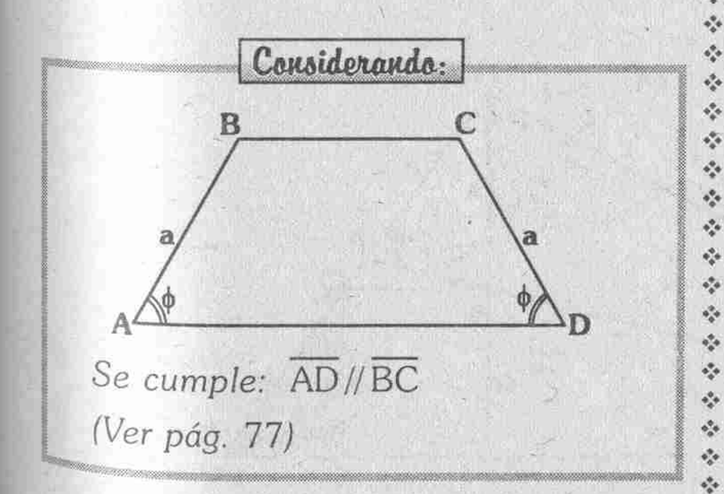
Clave C

RESOLUCIÓN Nº 124



- Piden: $m\sphericalangle ABC$
- Como $m\sphericalangle BAC = 3x$ y $m\sphericalangle ACB = 2x$ y $AB = QC = a$, nos conviene trazar $\overline{CP}$ tal que $m\sphericalangle BCP = x$ y $CP = a$.
- $\Delta QCB \cong \Delta PCB$ (LAL) $\Rightarrow m\sphericalangle CBP = \omega$

Considerando:



Se cumple: $\overline{AD} // \overline{BC}$
(Ver pág. 77)

- En el problema, como $AB = CP$ y $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle ACP \Rightarrow \overline{AC} // \overline{BP}$
- Luego: $\omega = 2x$
- En ΔABC: $3x + 2x + 2\omega = 180°$

$\Rightarrow x = 20°$

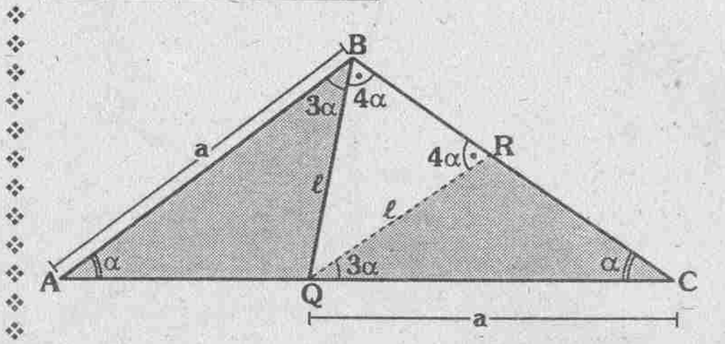
- Como: $m\sphericalangle ABC = 2\omega$

$m\sphericalangle ABC = 4x$

$\therefore \ \mathbf{m\sphericalangle ABC = 80°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 125



- Piden: $m\sphericalangle BAC$.
- Dada la distribución de medidas angulares α; 3α y 4α, nos conviene trazar $\overline{QR}$ tal que:

$m\sphericalangle RQC = 3\alpha$

$\Rightarrow m\sphericalangle QRB = 4\alpha$

- $\Delta ABQ \cong \Delta CQR$ (LAL)

$\Rightarrow m\sphericalangle BAQ = \alpha$

- ΔABC: $\alpha + 7\alpha + \alpha = 180°$

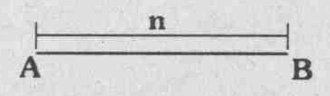
$\Rightarrow \alpha = 20°$

$\therefore \ \mathbf{m\sphericalangle BAC = 20°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 126

- Para indicar el valor de verdad de las proposiciones, hay que tener presente:



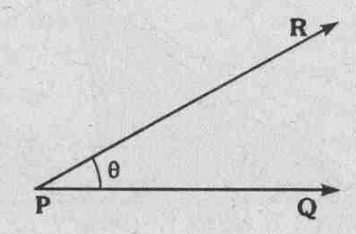
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ... (V)

n
C D

$\overline{AB} = \overline{CD}$ ... (F)

L
θ
T S

$\measuredangle STL \cong \measuredangle QPR$ ... (V)



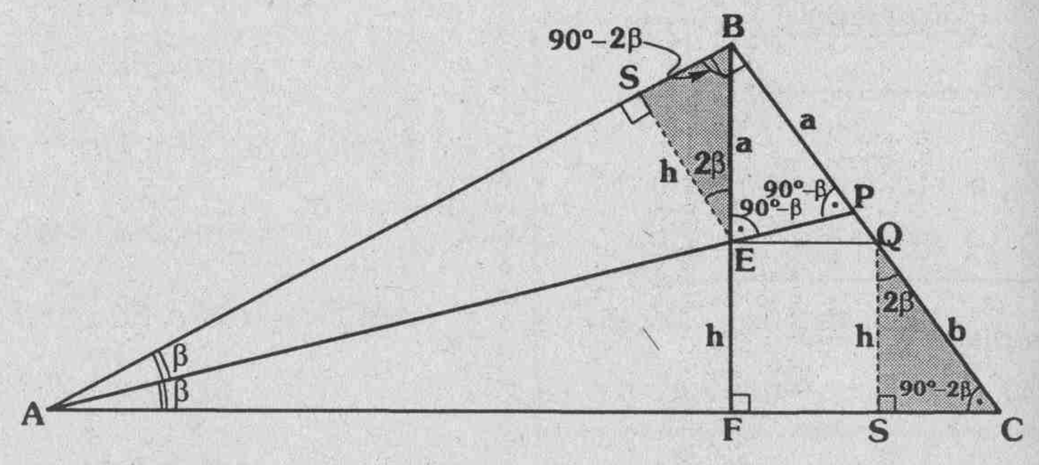
$\measuredangle STL = \measuredangle QPR$ ... (F)

- Con ello:

I) V **II)** F **III)** F **IV)** V

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 127



- Sea BP = a y QC = b

- Nos piden la relación entre **a** y **b**.

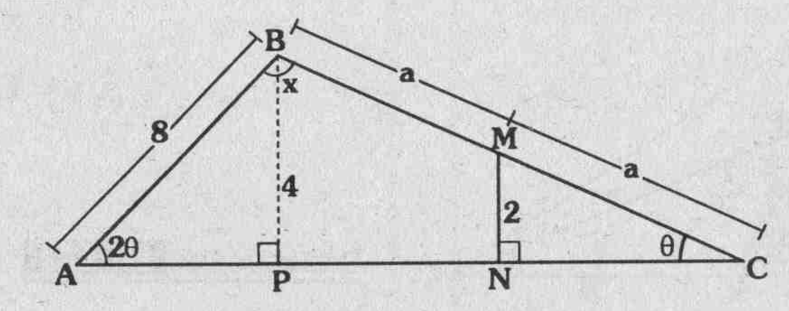
- $\triangle EBP$: isósceles $\Rightarrow BE = BP = a$
- Por teorema de la bisectriz: $ES = EF$

$$\measuredangle ESB \cong \measuredangle QSC \text{ (ALA)} \Rightarrow a = b$$

$$\therefore \mathbf{BP = QC}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 128



- Piden **x**.
- $\triangle ABC$: $x + 3\theta = 180°$
- Se traza $\overline{BP} \perp \overline{AC}$, por base media en el $\measuredangle PBC$: $BP = 4$
- $\measuredangle APB$: notable de 30°

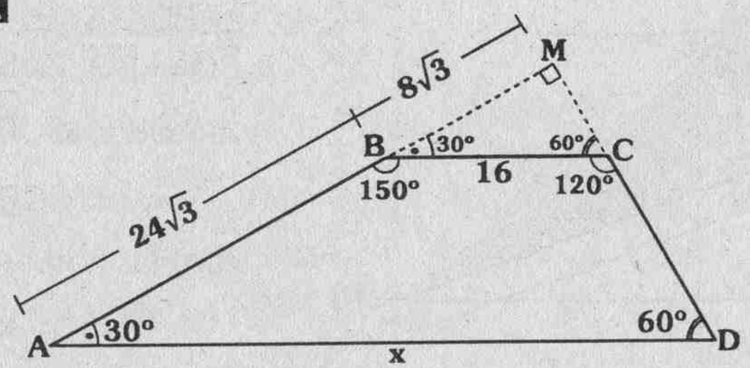
$$2\theta = 30° \Rightarrow \theta = 15°$$

- $x + 3(15°) = 180°$

$$\therefore \mathbf{x = 135°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 129



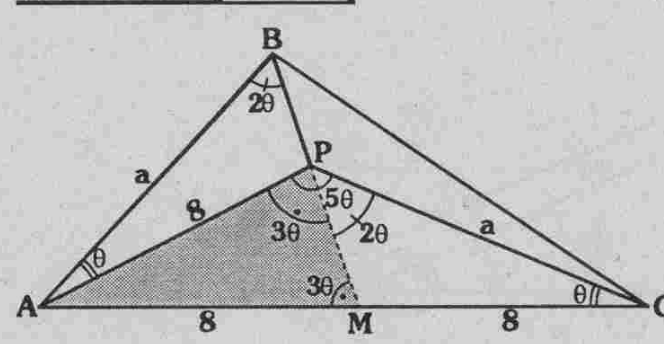
- Piden **x**.

- Del gráfico $\overline{AD} // \overline{BC}$
- ⊿BMC: notable de 30° $\Rightarrow BM = 8\sqrt{3}$
- ⊿AMD: notable, como $AM = 32\sqrt{3}$

$\therefore\ \mathbf{x = 64}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 130

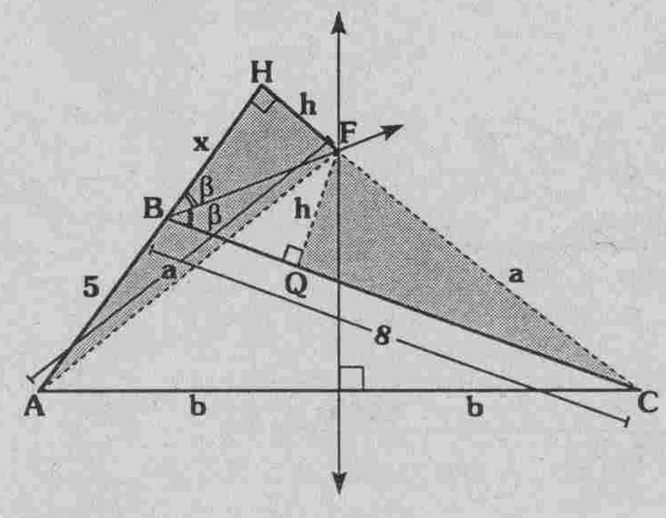


- Piden AC.
- Al prolongar $\overline{BP}$ hasta que corte a $\overline{AC}$ en M, nos damos cuenta.
- ΔAMP : isósceles $\Rightarrow AP = AM = 8$
- ΔABP ≅ ΔCPM (ALA) $\Rightarrow MC = AP = 8$

$\therefore\ \mathbf{AC = 16}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 131



- Piden **x**.
- Por teorema de la mediatriz: $FA = FC$
- Por teorema de la bisectriz:

$FH = FQ$

$BQ = x$

- ⊿AFH ≅ ⊿CFQ $\Rightarrow AH = CQ = x + 5$

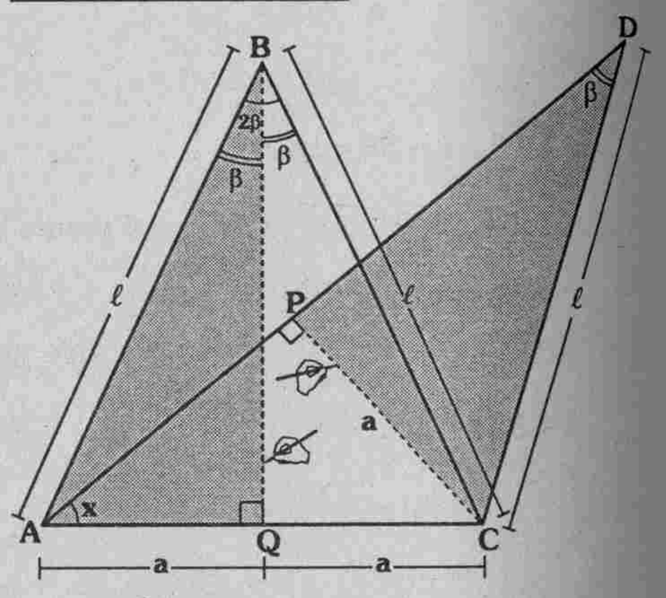
$\Rightarrow\ \underbrace{BC} = CQ + BQ$

$8 = x + 5 + x$

$\therefore\ \mathbf{x = 1,5}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 132



- Piden **x**.
- ΔABC: isósceles, se traza la altura $\overline{BQ} \Rightarrow \overline{BQ}$ es bisectriz y mediana.
- ⊿AQB ≅ ⊿CPD (ALA)

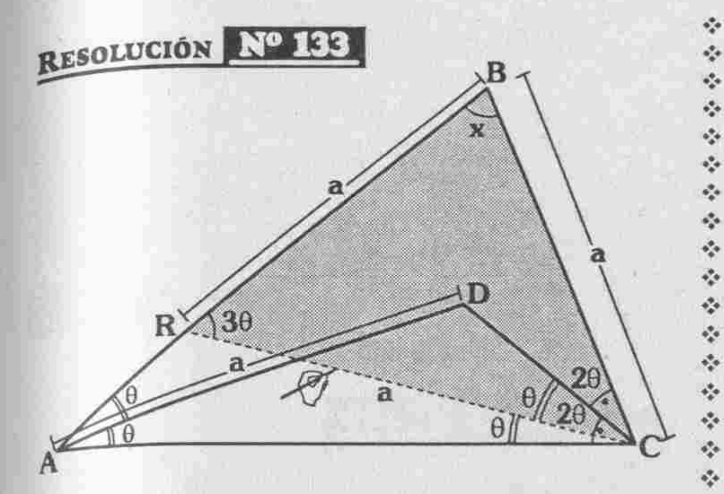
$\Rightarrow CP = AQ = QC$

- ⊿APC: notable

$\therefore\ \mathbf{x = 30°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 133



- Piden **x**.
- Al trazar $\overline{CR}$ tal que: $m\sphericalangle RCA = \theta$, se tiene:

ΔBRC : isósceles $\Rightarrow RB = BC$

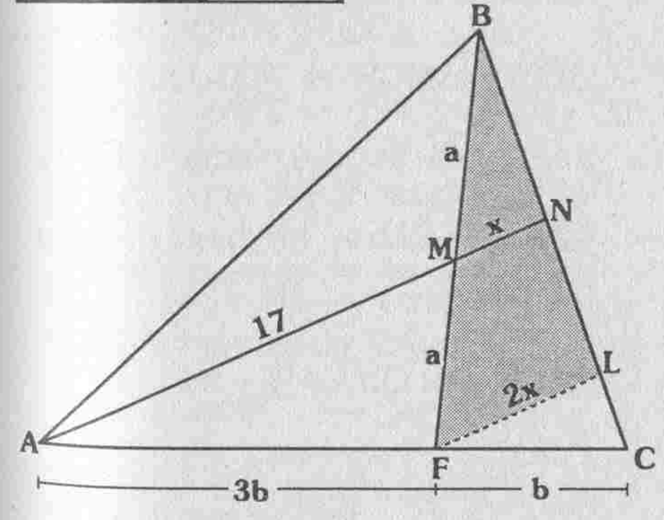
$\Delta RAC \cong \Delta BCA$ (ALA) $\Rightarrow RC = a$

- ΔRBC : equilátero

$$\therefore\ \mathbf{x = 60°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 134



- Piden **x**.
- Como $BM = MF$, se traza $\overline{FL} // \overline{MN}$, entonces en el ΔFLB, $\overline{MN}$ es base media, luego: $FL = 2x$ y $\overline{FL} // MN$.
- En ΔANC, observamos: $\overline{FL} // \overline{AN}$ y

$AF = 3(FC) \Rightarrow AN = 8x$ ... *(ver nota)*

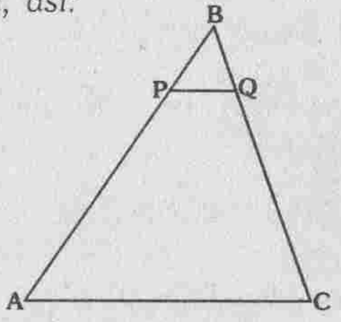
$$x + 17 = 8x$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \frac{17}{7}}$$

Clave E

Nota

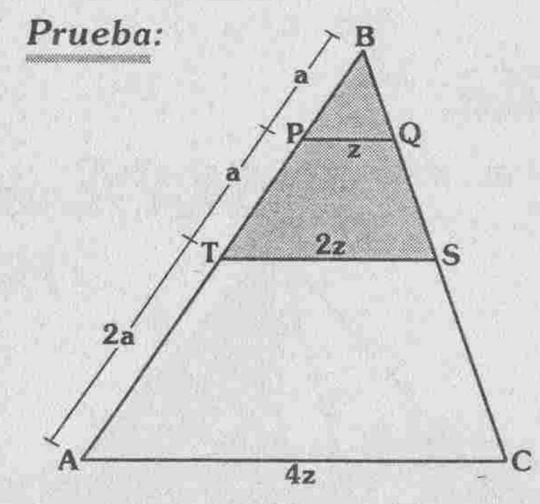
En el tema de semejanza de triángulos, se hará la prueba general pero en este caso se puede hacer la prueba con el teorema de la base media, asi:



Si: $AP = 3(PB)$ *y*

$\overline{AC} // \overline{PQ} \Rightarrow AC = 4(PQ)$

Prueba:



Se ubica T en $\overline{AB}$, *tal que* $AT = TB$, *luego se traza:* $\overline{TS} // \overline{AC}$.

Por base media:

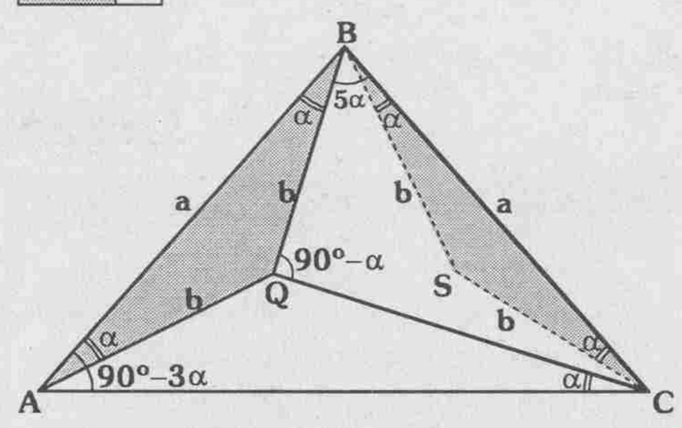
ΔTSB : $TS = 2(PQ)$

ΔABC : $AC = 2(TS)$

$\therefore\ AC = 4(PQ)$

RESOLUCIÓN Nº 135

Paso 1



- Piden: m∢BQC
- Se traza $\overline{BS}$ tal que m∢CBS = α y BS = BQ

  ⇒ ΔABQ ≅ ΔCBS (LAL) ⇒ CS = b

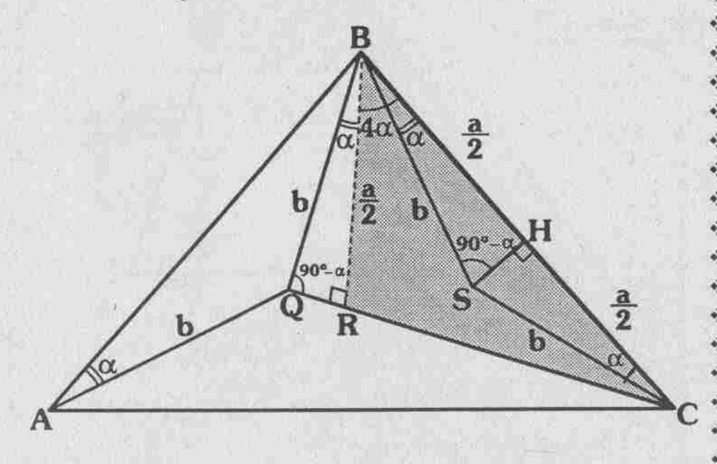
- Como AB = BC y

  m∢ABC = 6α ⇒ m∢BAC = 90° − 3α

  ⇒ m∢BQC = 90° − α

Paso 2

- Trabajemos solo en el ΔBQC :



- Se trazan $\overline{BR} \perp \overline{QC}$ y $\overline{SH} \perp \overline{BC}$, como ΔBCS es isósceles con:

  BS = CS ⇒ BH = HC

- ⊿RBC: notable de 30°

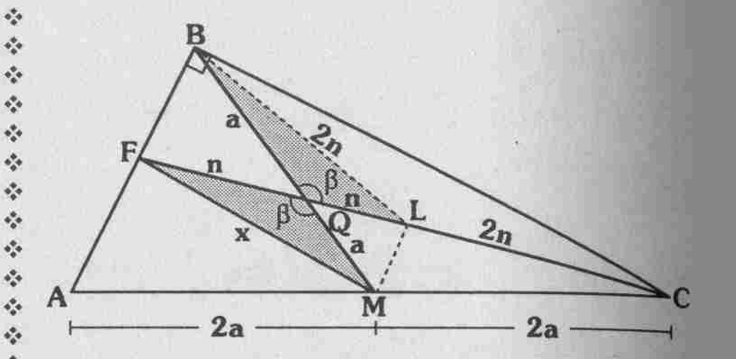
  ⇒ 4α = 60°

  ⇒ α = 15°

  ∴ **m∢BQC = 75°**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 136



- Piden **x**.
- Dato: CQ = 12
- Se traza $\overline{ML} // \overline{AB}$
- ΔBQL ≅ ΔMQF ⇒ FQ = QL = n
- ΔAFC , $\overline{ML}$ es base media ⇒ FL = LC
- ⊿FBC : $\overline{BL}$ es mediana relativa a la hipotenusa ⇒ BL = 2n
- ΔFQM ≅ ΔLQB ⇒ x = 2n
- Como:

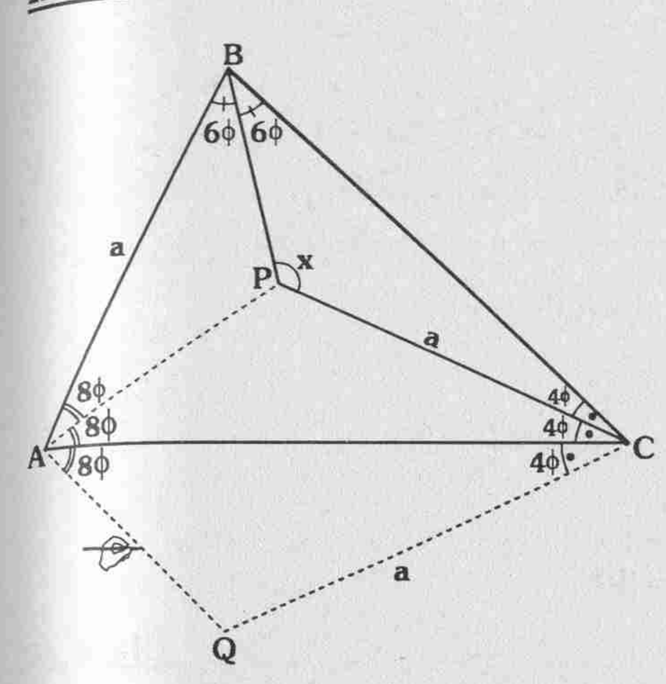
  3n = 12

  ⇒ n = 4

  ∴ **x = 8**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 137



- Piden **x**.
- En ΔPBC: $x + 10\phi = 180°$ ... (I)
- Se traza $\overline{CQ}$ tal que $CQ = a$ y $m\sphericalangle ACQ = 4\phi$
- Luego: $\Delta PCA \cong \Delta QCA$ (LAL)
- Como $m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle ACQ$ y $BA = CQ$

$$\Rightarrow \overline{AQ} // \overline{BC} \Rightarrow m\sphericalangle PAC = 8\phi$$

- Por la congruencia: $m\sphericalangle PAC = 8\phi$
- Por la observación (pág. 77)

$$m\sphericalangle BAP = m\sphericalangle CAP = 8\phi$$

- ΔABC: $16\phi + 12\phi + 8\phi = 180°$

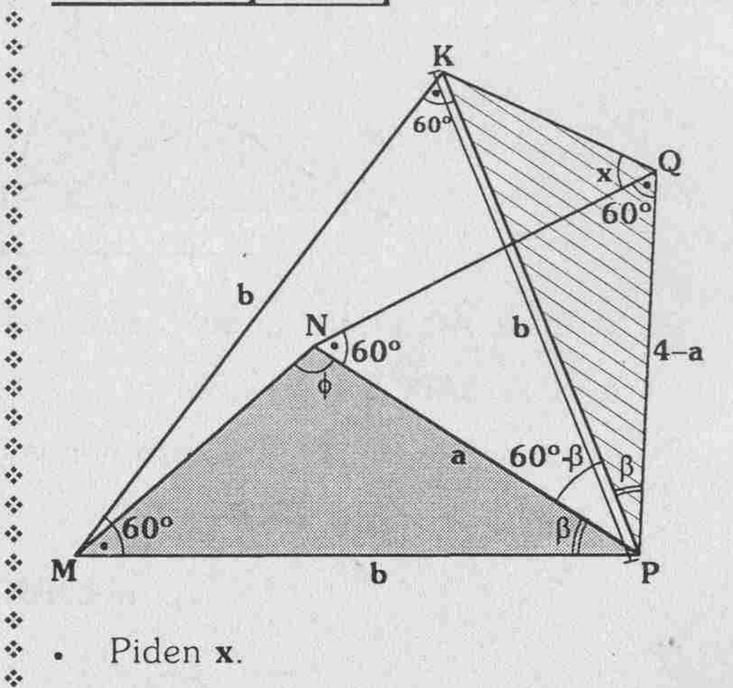
$$\Rightarrow \phi = 5°$$

- En (I): $x + 10(5°) = 180°$

$$\therefore \mathbf{x = 130°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 138



- Piden **x**.
- Como ΔMKP y ΔNQP son equiláteros, se tendrá:

$$\Delta NPM \cong \Delta QPK \text{ (LAL)}$$

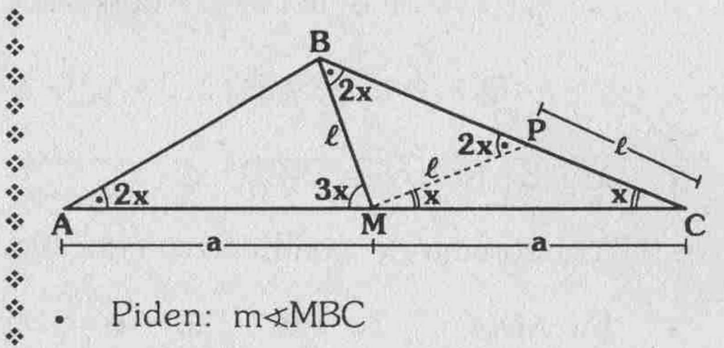
$$\Rightarrow x + 60° = \phi$$

$$\therefore \mathbf{x = \phi - 60°}$$

Clave C

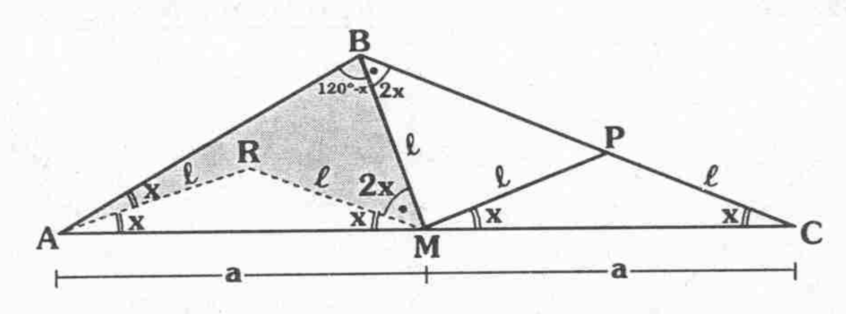
RESOLUCIÓN Nº 139

Paso 1



- Piden: $m\sphericalangle MBC$
- Como $m\sphericalangle MBC = 2(m\sphericalangle MCB)$ nos conviene trazar $\overline{MP}$ tal que $m\sphericalangle CMP = x$, entonces $MP = PC = MB$.

Paso 2

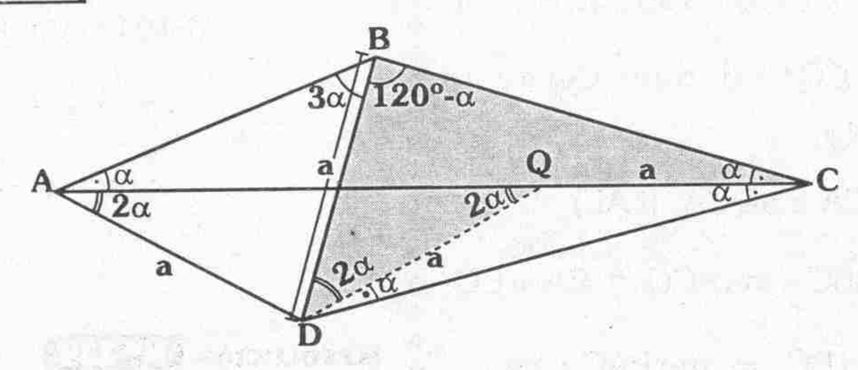


- Se traza $\overline{AR}$ y $\overline{MR}$ tal que: $m\sphericalangle RAM = m\sphericalangle AMR = x$
- $\Delta ARM \cong \Delta APC \Rightarrow AR = RM = \ell$
- Por teorema del cuadrilátero cóncavo: $m\sphericalangle ABM = 120° - x$
- $\Delta ABM: \ 2x + 3x + 120° - x = 180° \Rightarrow x = 15°$

$\therefore$ **$m\sphericalangle MBC = 30°$**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 140

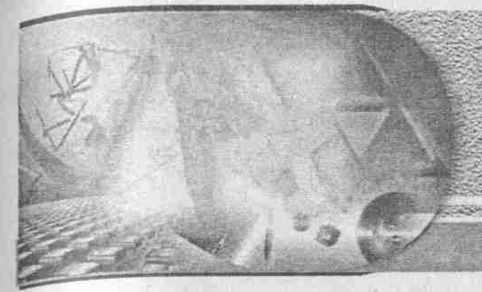


- Piden α.
- En ΔADC como $m\sphericalangle DAC = 2(m\sphericalangle ACD)$, trazamos $\overline{DQ}$ tal que:

  $m\sphericalangle QDC = \alpha \Rightarrow \Delta DQC$, ΔAQD son isósceles, luego: $AD = DQ = QC = a$
- ΔADB : isósceles $\Rightarrow BD = a$
- Por teorema del cuadrilátero cóncavo: $m\sphericalangle DBC = 120° - \alpha$
- En ΔDBC: $3\alpha + 2\alpha + 120° - \alpha = 180°$

$\therefore$ **$\alpha = 15°$**

Clave C



Solucionario

Ciclo Semestral

RESOLUCIÓN Nº 141

- Piden **x**.
- Por dato:

  $AD = BQ$ y $\overline{AD} \perp \overline{BQ}$

- En ΔQBC se traza la base media $\overline{DM}$, entonces:

  $BQ = 2(DM)$ y $\overline{BQ} // \overline{DM}$

- ⊿ADM notable, pues $AD = 2(DM)$

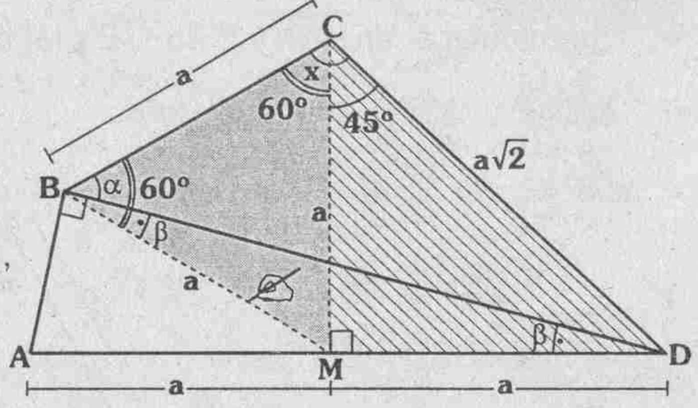
$$\therefore \ \mathbf{x = \frac{53^\circ}{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 142

- Piden **x**.
- Datos: $\alpha + \beta = 60^\circ$

  $AD = 2a$; $CD = a\sqrt{2}$ y $BC = a$



- En ⊿ABD, se traza la mediana $\overline{BM}$,
- Por teorema: $AM = MD = BM = a$

  $m\measuredangle MBD = \beta$

- Como $BM = BC$ y $m\measuredangle MBC = 60^\circ \Rightarrow \Delta MBC$ es equilátero.
- Como $CM = MD = a$ y $CD = a\sqrt{2} \Rightarrow m\measuredangle MCD = 45^\circ$

$$\therefore \ \mathbf{x = 105^\circ}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 143

- Piden AB.
- Dato: ΔABC es equilátero:

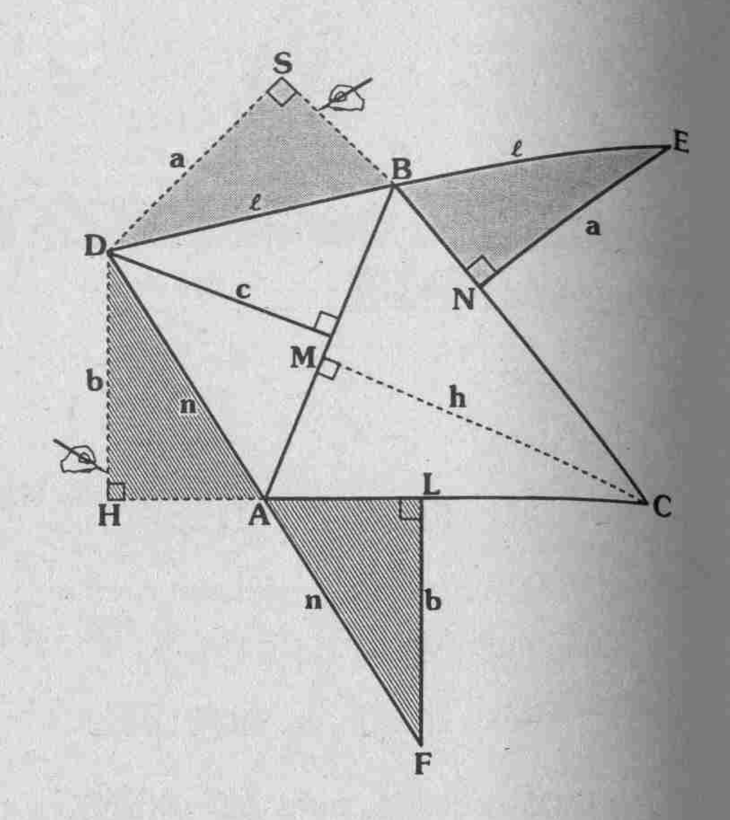
$$a+b-c=4\sqrt{3}$$

- $\triangle ALF \cong \triangle AHD \Rightarrow DH = b$
- $\triangle DNE \cong \triangle BSD \Rightarrow DS = a$
- Por teorema del triángulo equilátero (pág. 42)

$$h=a+b-c \;\Rightarrow\; h=4\sqrt{3}$$

- ΔABC equilátero y su altura mide $4\sqrt{3}$, por lo tanto:

$$\mathbf{AB=8}$$



Clave B

RESOLUCIÓN Nº 144

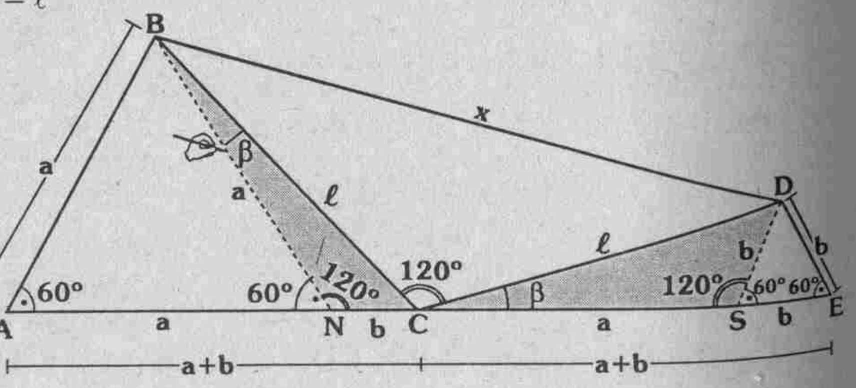
- Nos piden "**x**" en función de "ℓ".
- Ubiquemos N en $\overline{AC}$ y S en $\overline{CE}$, tal que: $AN=a$ y $ES=b \Rightarrow NC=b$ y $CS=a$
- ΔANB y ΔSDE son equiláteros.
- $\Delta BNC \cong \Delta CSD$ (LAL) $\Rightarrow CD=\ell$

  y $m\sphericalangle NBC = m\sphericalangle SCD = \beta$

  $\Rightarrow m\sphericalangle BCD = 120°$
- ΔBCD, como $BC=CD=\ell$

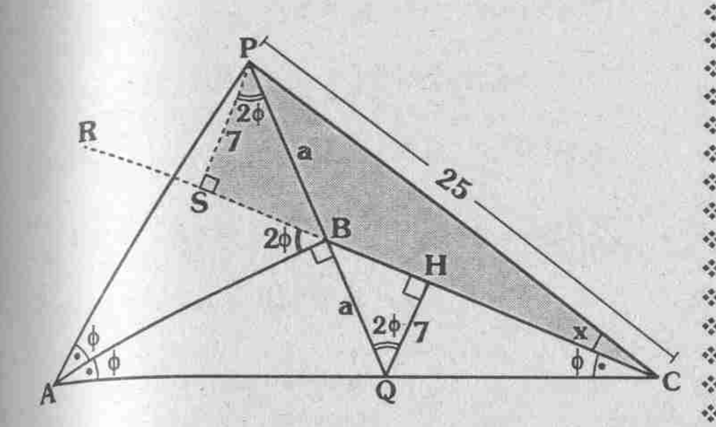
  y $m\sphericalangle BCD = 120°$

$$\Rightarrow \mathbf{x}=\ell\sqrt{3}$$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 145



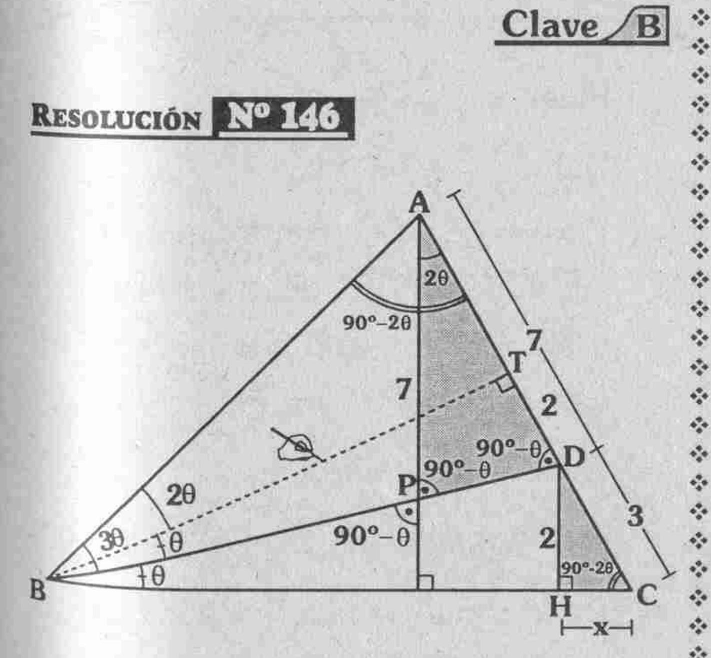
- Piden **x**.
- ΔABC: isósceles y como $m\sphericalangle ABR = 2\phi$

  $\Rightarrow m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle ACB = \phi$
- ΔAPQ: isósceles, pues $\overline{AB}$ es altura y bisectriz, entonces $PB = BQ$.
- ⊿PBS ≅ ⊿QBH (ALA) $\Rightarrow PS = QH = 7$
- ⊿PSC es notable:

  $\therefore$ **x = 16°**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 146



- Piden **x**.
- Completando medidas angulares.
- $m\sphericalangle ACB = m\sphericalangle BAC = 90° - 2\theta$

  $\Rightarrow m\sphericalangle ABC = 4\theta \Rightarrow m\sphericalangle DAC = \theta$
- ΔPAD: isósceles $\Rightarrow PA = AD = 7$
- ΔABC, se traza la altura $\overline{AT}$, la cual es mediana y bisectriz.

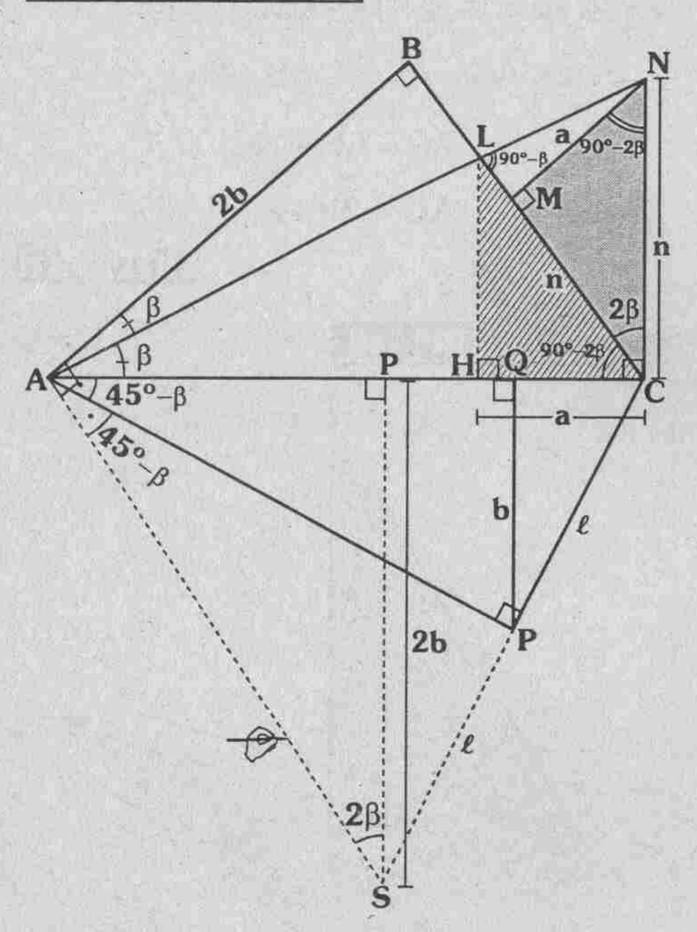
  $\Rightarrow TC = TA = 5 \Rightarrow TD = 2$
- Por teorema de la bisectriz: $TD = DH = 2$
- ⊿DHC: por teorema de Pitágoras:

  $$x^2 + 2^2 = 3^2$$

  $$\therefore \mathbf{x = \sqrt{5}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 147



- Piden "AC" en función de "a" y "b".
- Notemos que el ΔLNC es isósceles.
- Trazemos $\overline{LH} \perp AC$.

- $\measuredangle$ LHC ≅ $\measuredangle$ NMC (ALA) $\Rightarrow$ HC = a
- Ya conocemos parte de $\overline{AC}$, faltaría AH.
- Por teorema de la bisectriz:

$$AH = AB \qquad ... (I)$$

- Como: $m\measuredangle NAP = 45°$

$$\Rightarrow m\measuredangle PAC = 45° - \beta$$

- Prolongamos $\overline{CP}$ hasta S, tal que:

$$m\measuredangle CAP = m\measuredangle PAS = 45° - \beta$$

- ΔCAS : isósceles $\Rightarrow$ CL = CN y CP = PS
- Se traza: $\overline{ST} \perp \overline{AC}$
- $\measuredangle$STC: $\overline{PQ}$ es base media $\Rightarrow$ ST = 2b
- $\measuredangle$ ABC ≅ $\measuredangle$ STA (ALA)

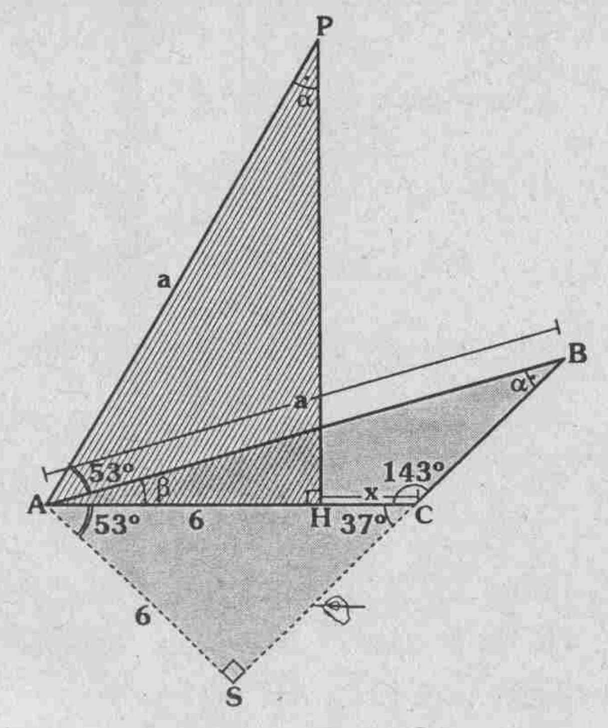
pues AC = AS $\Rightarrow$ AB = 2b

$$AC = AH + HC$$

$$\therefore \mathbf{AC = 2b + a}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 148



- Piden **x**.
- Notamos: $\alpha + \beta = 37°$

$$\Rightarrow m\measuredangle APH = m\measuredangle ABC = \alpha$$

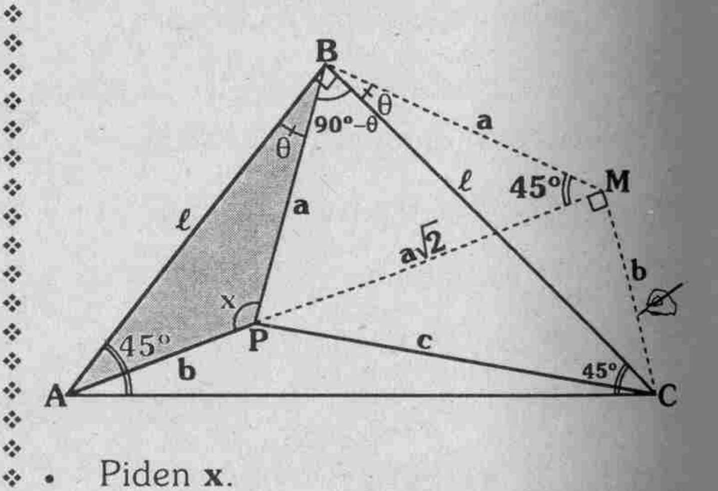
- $\measuredangle$ AHP ≅ $\measuredangle$ ASB (ALA) $\Rightarrow$ AH = AS = 6
- $\measuredangle$ASC: notable de 37° $\Rightarrow$ AC = 10

$$x + 6 = 10$$

$$\therefore \mathbf{x = 4}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 149



- Piden **x**.
- Dato: $c^2 = 2a^2 + b^2$
- Como AB = BC construimos:

$\Delta BMC \cong \Delta BPA$, tal que BM = BP = a y MC = AP = b, con ello $m\measuredangle MBC = \theta$ y $m\measuredangle PBM = 90° \Rightarrow PM = a\sqrt{2}$

- Del dato, notamos:

$(PC)^2 = (PM)^2 + (MC)^2 \Rightarrow m\measuredangle PMC = 90°$

- De la congruencia: $x = 45° + 90°$

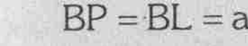
$$\therefore \mathbf{x = 135°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 150

- Piden θ.
- Como $m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle BAP)$, se traza la bisectriz del $\sphericalangle BAC$ y trazamos la perpendicular BL a dicha bisectriz, prolongamos $\overline{BL}$, hasta que corte a $\overline{AC}$.
- $\triangle BAM$: isósceles
- Por teorema de la bisectriz:

$$BP = BL = a$$



- Como $\triangle BAM$ isósceles $\Rightarrow BL = LM = a$
- Se traza la mediana $\overline{BN}$ relativa a $\overline{AC}$ del $\triangle ABC$.

  Por teorema: $AN = NC = BN = 2a$
- $\triangle NBM$: isósceles
- $\triangle ALM$: $\theta + 4\theta = 90°$

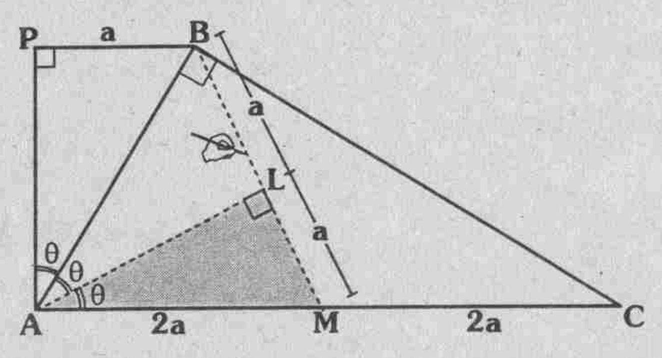
$$\therefore \ \boldsymbol{\theta = 18°}$$



Este problema tiene otra solución, de la observación dada en la pág. 75

Puede ser que $\overline{BM}$ *sea mediana, pues* $BM = \dfrac{AC}{2}$

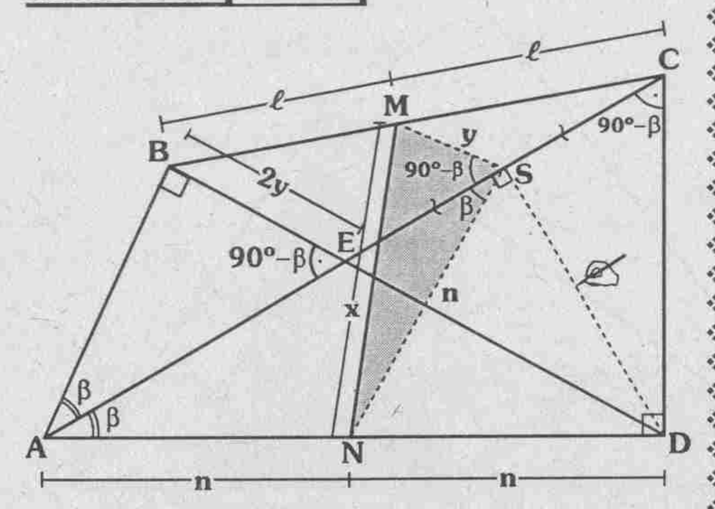
La figura quedaría asi:



En este caso, $\triangle ALM$ *es notable:* $\theta = 30° \Rightarrow$ *Los valores de* θ *son:* 18° ó 30°.

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 151



- Piden **x**.
- Dato: $(BE)^2+(AD)^2=20$
- Notemos primero que el ΔEDC es isósceles, pues:

$$m\sphericalangle CED=m\sphericalangle ACD=90°-\beta$$

- Busquemos la forma de aprovechar la presencia de los puntos medios, para ello se traza $\overline{DS}\perp\overline{EC}$, entonces: $ES=SC$.
- ΔBEC: $\overline{MS}$ es base media

$$\Rightarrow MS=\frac{BE}{2}=y \quad ; \quad \overline{BE}\,//\,\overline{MS}$$

- ⊿ASD: $\overline{SN}$ es mediana

$$\Rightarrow AN=ND=NS \quad ; \quad m\sphericalangle ASN=\beta$$

- Como:

$$m\sphericalangle MSN=90° \Rightarrow x^2=y^2+n^2$$

- Por dato:

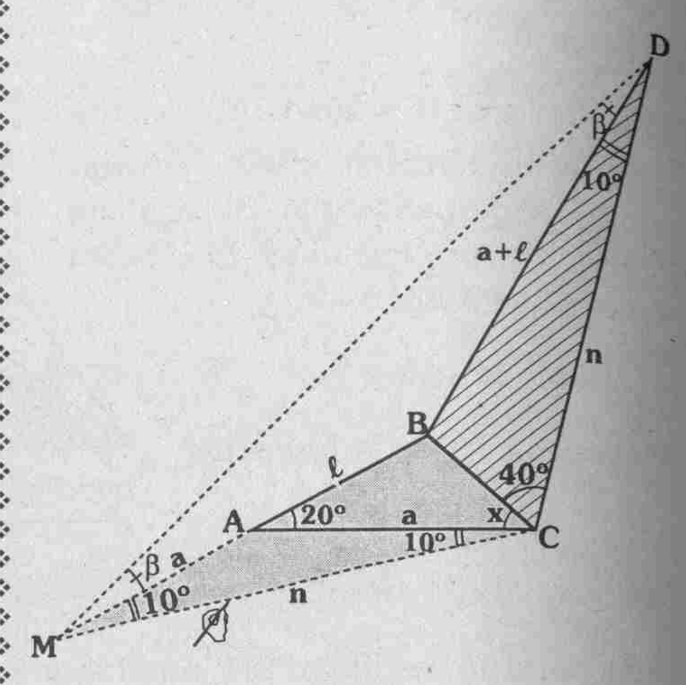
$$(2y)^2+(2n)^2=20$$

$$\Rightarrow y^2+n^2=5$$

$$\therefore \mathbf{x=\sqrt{5}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 152



- Piden **x**.
- Dato: $BD=AB+AC$
- Para aprovechar el dato, prolongamos $\overline{BA}$ hasta M tal que:

$$AM=AC \Rightarrow \Delta MAC \text{ isósceles}$$

- Luego:

$$m\sphericalangle AMC=m\sphericalangle ACM=10°$$

- Como :

$$BM=BD \Rightarrow \Delta MBD \text{ isósceles}$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle DMB=m\sphericalangle MDC \Rightarrow MC=CD$$

- $\Delta MBC\cong\Delta DBC$ (LLL)

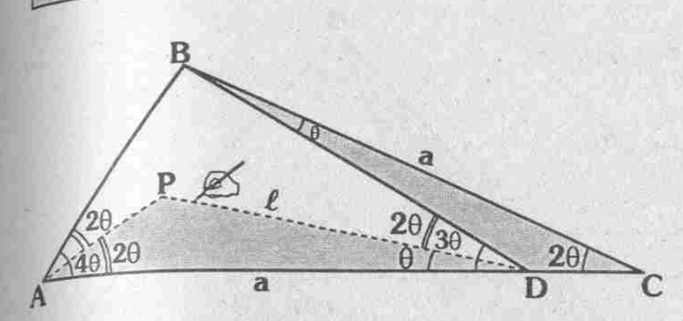
$$\Rightarrow x+10°=40°$$

$$\therefore \mathbf{x=30°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 153

Paso 1



- Piden θ.
- Como AD=BC, busquemos la forma de aprovechar dicho dato, para ello tracemos:

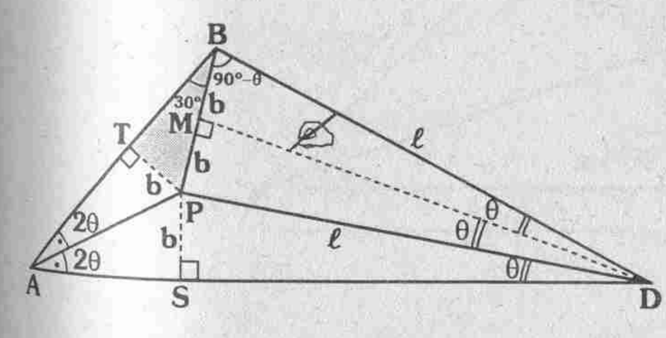
$$\Delta APD \cong \Delta CDB$$

Tal que: $m\sphericalangle PAD = m\sphericalangle BCD = 2\theta$

$$m\sphericalangle PDA = m\sphericalangle DBC = \theta$$

$$\Rightarrow BD = DP$$

Paso 2



- Trabajemos en el ΔABD.
- Como ΔDPB es isósceles de base $\overline{PB}$ se traza la altura DM, la cual también es mediana y bisectriz.
- Por teorema de la bisectriz:

$$PM = PS = PT$$

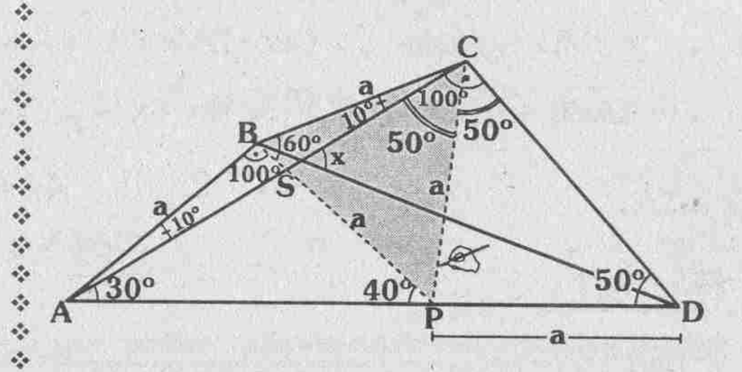
- $⊿PTB$: notable de 30°
- En ΔABD:

$$4\theta + 3\theta + 30° + 90° - \theta = 180°$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\theta = 10}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 154



- Nos piden **x**.
- Se traza $\overline{BP}$ tal que $BP = BA = a$

$$\Rightarrow m\sphericalangle APB = 40° \Rightarrow m\sphericalangle PBC = 60°$$

- ΔPBC: es equilátero, luego:

$$m\sphericalangle ACP = 50°$$

- ΔPCD: isósceles $\Rightarrow PD = PC = a$
- ΔBPD: isósceles, como $m\sphericalangle BPA = 40°$

$$\Rightarrow m\sphericalangle ADB = m\sphericalangle PBD = 20°$$

- ΔASD:

$$x = 30° + m\sphericalangle ADB$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 50°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 155

- Piden **x**.

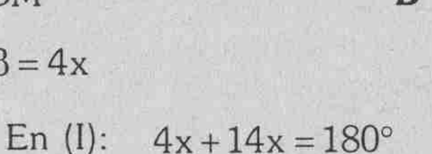
  $\Delta ABC: \ \beta + 14x = 180°$ ... (I)

- Como: $\underbrace{m\sphericalangle DBC}_{7x} = \underbrace{m\sphericalangle ABD}_{3x} + \underbrace{m\sphericalangle ACB}_{4x}$

- Nos conviene trazar $\overline{DM}$, tal que:

  $m\sphericalangle CDM = 3x \Rightarrow m\sphericalangle DMB = 7x$

- ΔBMD isósceles $\Rightarrow DB = DM$



- $\Delta ABD \cong \Delta CDM$ (LAL) $\Rightarrow \beta = 4x$

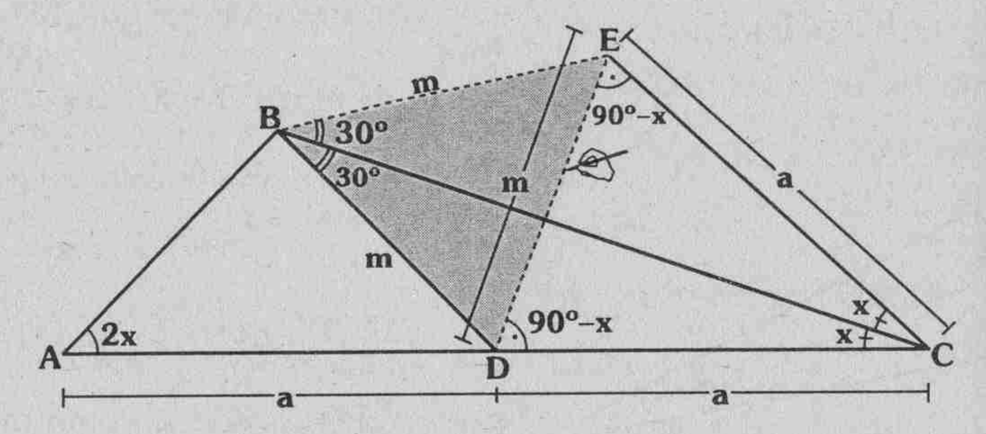
- En (I): $4x + 14x = 180°$

  $\therefore \ \mathbf{x = 10°}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 156

Paso 1



- Piden **x**.

- Dato: $m\sphericalangle ABD > 90°$ y $AD = DC = a$

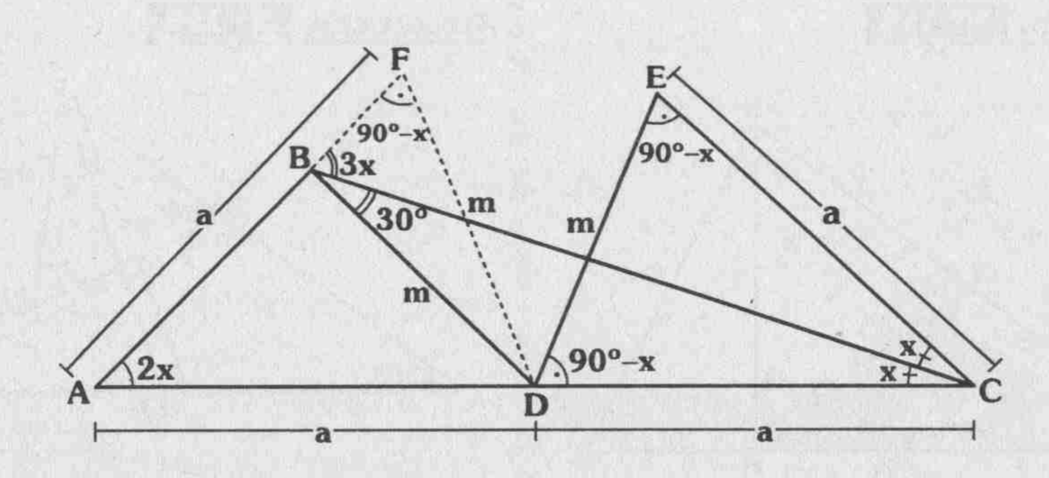
- Trazamos $\overline{CE}$ tal que: $m\sphericalangle BDE = x$ y $m\sphericalangle CBE = 30°$ / $\Rightarrow \Delta BCD \cong \Delta BCE$

- Con ello tendremos: _ $m\sphericalangle BAD = m\sphericalangle DCE = 2x$

  _ ΔDBE : equilátero

- Notar que tenemos ahora: $m\sphericalangle BAD = 2x$ y $AD = a$ y por otra parte: $m\sphericalangle DCE = 2x$ y $DC = a$.

Paso 2



- Como $m\sphericalangle ABD = 2(m\sphericalangle ACB)$, se traza $\overline{DF}$ tal que:

  $m\sphericalangle AFD\ \ 90° - x \Rightarrow \Delta AFD$: isósceles y $\Delta DAF \cong \Delta DCE$ (LAL) $\Rightarrow FD = DF = m$

- ΔBDF : isósceles $\Rightarrow 30° + 3x = 90° - x$

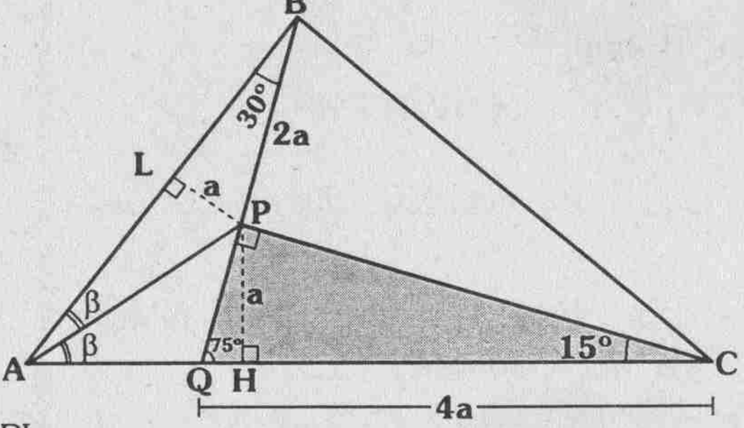
$$\therefore\ x = 15°$$

Clave A

Nota

Otra solución es cuando F=B, *en este caso*: x=30°

RESOLUCIÓN Nº 157



- Nos piden β .
- Dato: $QC = 2(PB)$
- En ⊿QPC por teorema:

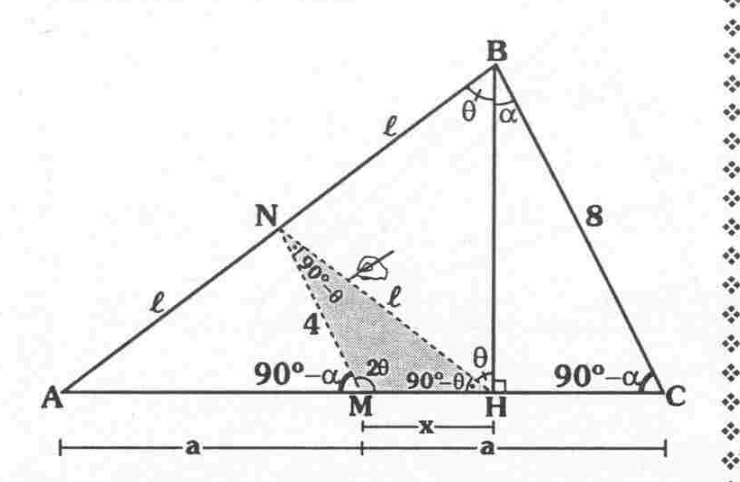
  $QC = 4(PH) \Rightarrow PH = a$ y $QC = 4a$

- Del dato: $PB = 2a$
- Por teorema de la bisectriz: $PH = PL = a$
- ⊿BLP: notable de 30°
- ΔABQ : $2\beta + 30° = 75°$

$$\therefore\ \beta = \frac{45°}{2} = 22°30'$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 158



- Piden **x.**
- Dato: $BC = 8$ y

$$2\theta - \alpha = 90° \Rightarrow 2\theta = 90° + \alpha$$

- Se ubican "N" punto medio de $\overline{AB}$, con ello tendremos:
- $\overline{MN}$ es base media del ΔABC entonces $MN=4$, $\overline{MN}//\overline{BC}$, $m\measuredangle AMN = 90° - \alpha$.
- Como:

$$m\measuredangle AMN = 90° - \alpha$$

$$\Rightarrow m\measuredangle NMC = \underbrace{90° + \alpha}_{2\theta}$$

- En $\triangle AHB$, $\overline{HN}$ es mediana relativa a $\overline{AB}$ entonces:

$$HN = AN = NB$$

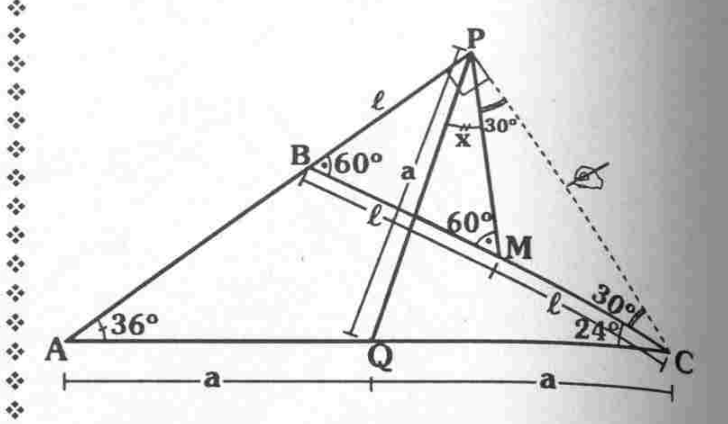
$$\Rightarrow m\measuredangle NHB = \theta$$

- ΔMNH : isósceles

$$\therefore \mathbf{x = 4}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 159



- Piden **x**.
- Como $BP = BM$ y $m\measuredangle PBM = 60°$

$\Rightarrow \Delta BPM$ es equilátero

- Como:

$BM = MC = MP \Rightarrow m\measuredangle BPC = 90°$

- En $\triangle APC$, $\overline{PQ}$ es mediana

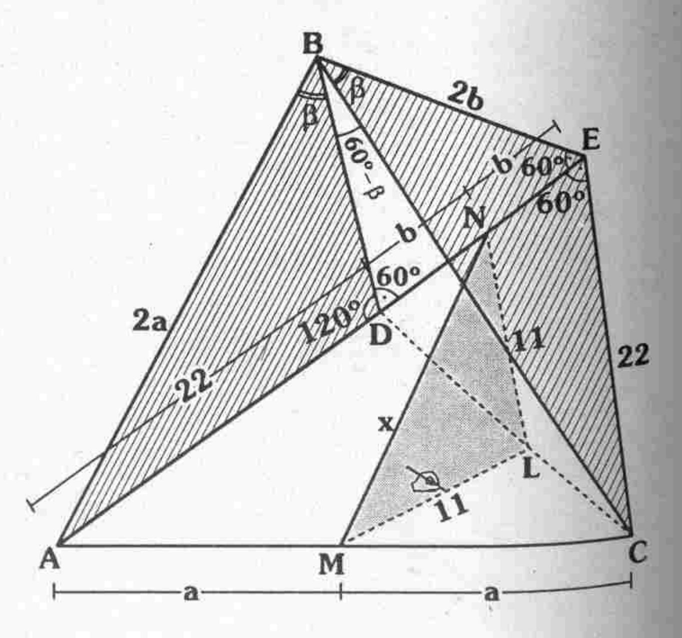
$$\Rightarrow AQ = QC = QP$$

- ΔQPC : isósceles: $x + 30° = 24° + 30°$

$$\therefore \mathbf{x = 24°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 160



- Piden **x**.
- Como ΔABD y ΔCBE son equiláteros

$\Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta CBE$ (LAL)

$\Rightarrow AD = EC = 22$ y $m\sphericalangle BEC = 120°$

- Trazamos $\overline{CD}$ y ubicamos su punto medio "L".
- Por teorema de la base media en:

_ $\Delta ACD: CM=11$ y $\overline{ML} // \overline{AE}$

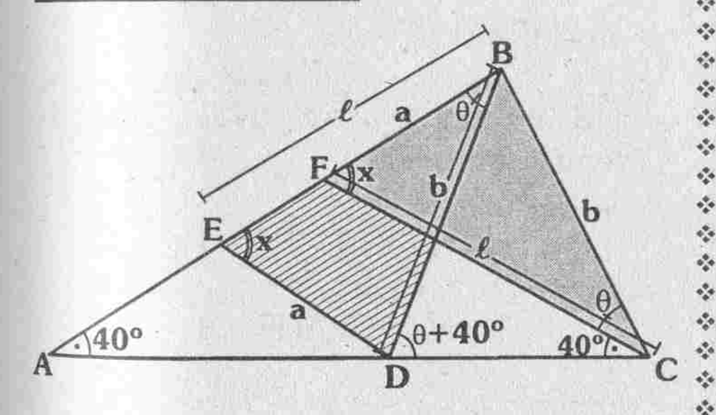
_ $\Delta DCE: CN=11$ y $\overline{NL} // \overline{EC}$

- Como $m\sphericalangle BEC = 120°$, por ángulo entre paralelas: $m\sphericalangle MLN = 120°$
- ΔMLN por teorema:

$$\mathbf{x = 11\sqrt{3}}$$

Clave C

Resolución Nº 161



- Piden **x**.
- De los datos, deducimos rápidamente:

$\Delta FBC \cong \Delta EDB$ (LLL)

$\Rightarrow m\sphericalangle DEB = m\sphericalangle CFB = x$;

$m\sphericalangle BCF = m\sphericalangle EBD = \theta$

- Como ΔDBC es isósceles

$\Rightarrow m\sphericalangle BDC = m\sphericalangle DCB = 40° + \theta$

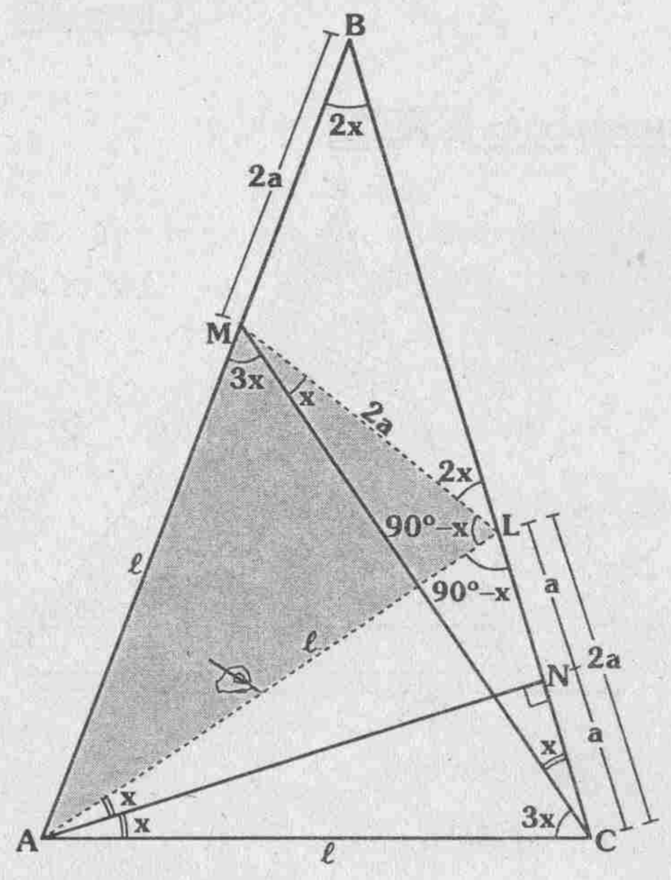
- Luego: $m\sphericalangle DCF = 40°$
- ΔAFC, por ángulo exterior:

$x = 40° + 40°$

$\therefore\ \mathbf{x = 80°}$

Clave B

Resolución Nº 162



- Piden **x**.
- Como $AB = BC$ y $m\sphericalangle NAC = x$

$\Rightarrow m\sphericalangle ACB = m\sphericalangle CAB = 90° - x$

Luego: $m\sphericalangle ABC = 2x$

- En ΔBMC, como:

$m\sphericalangle MBC = 2(m\sphericalangle MCB)$

nos conviene trazar $\overline{ML}$, tal que $m\sphericalangle CML = x$, entonces:

$MB = ML = LC = 2a$

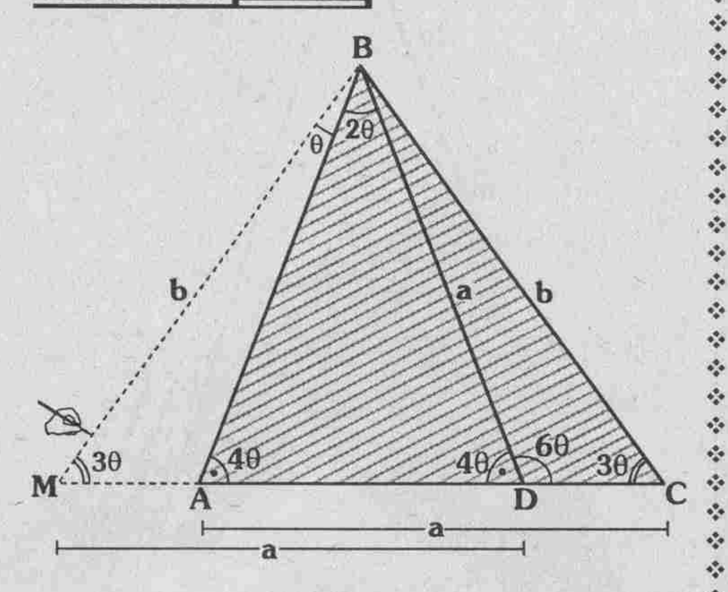
- Como $LN = NC \Rightarrow \Delta ALC$ isósceles, con $AL = AC$ y $m\measuredangle ALC = 90° - x$.
- $\Delta ALM \cong \Delta ALC$ (LAL)

  $\Rightarrow AC = AM \Rightarrow m\measuredangle ACM = 3x$
- $⊿ANC$: $x + 4x = 90°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 18°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 163



- Nos piden θ.
- En ΔDBC como:

$$m\measuredangle BDC = 2(m\measuredangle DCB)$$

trazamos $\overline{BM}$ tal que: $m\measuredangle BMD = 3\theta$, entonces $MB = BC$ y $MD = DB$.

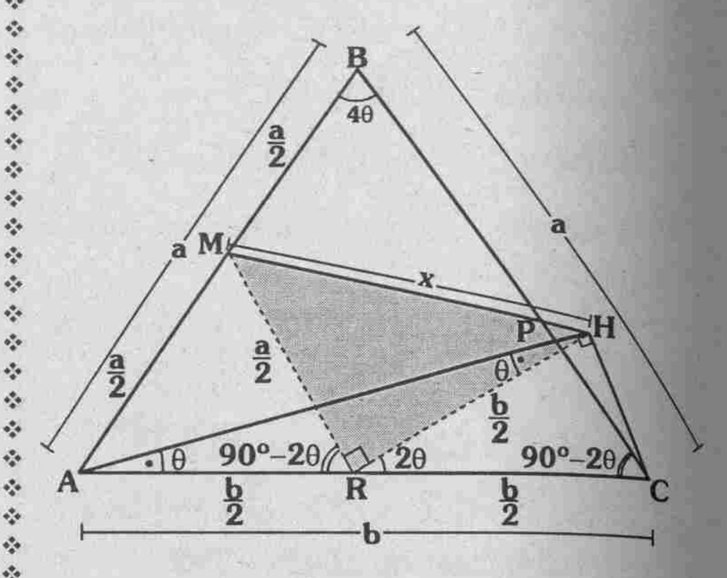
- $\Delta BMD \cong \Delta BCA$ (LAL)

  $\Rightarrow m\measuredangle BDM = m\measuredangle BAC = 4\theta$
- En "D": $4\theta + 6\theta = 180°$

$$\therefore\ \mathbf{\theta = 18°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 164



- Piden x, en función de "a" y "b".
- Se ubica "R", punto medio de $\overline{AC}$.
- $\overline{MR}$ es base media para el $\Delta ABC \Rightarrow MR = \dfrac{a}{2}$ y $\overline{MR} // \overline{BC}$, luego $m\measuredangle MRA = 90° - 2\theta$.
- $\overline{HR}$ es mediana relativa a la hipotenusa en:

$$⊿AHC \Rightarrow HR = HA = HC = \frac{b}{2}$$

$$\text{y} \quad m\measuredangle AHR = \theta$$

- Como:

$$m\measuredangle HRC = 2\theta \Rightarrow m\measuredangle MRH = 90°$$

- Finalmente en el $⊿MRH$:

$$x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 165

- Nos piden **x** en función de "a" y "b".
- Al prolongar $\overline{MN}$, nos damos cuenta:

$m\sphericalangle CMN = 2\beta$ y

$m\sphericalangle CNT = 90° - \beta$

Nos conviene trazar $\overline{CS}$ tal que:

$m\sphericalangle NSC = 90° - \beta$

- ΔCMS y ΔNSC : isósceles, luego:

$SM = MC = a$

- En ΔNCS, se traza la altura $\overline{CH}$, la cual también es mediana, como $BC = MH = b \Rightarrow NH = b - x$, luego: $NH = HS = b - x$
- Finalmente: $MH + HS = MS \Rightarrow b + b - x = a$

$$\therefore\ \mathbf{x = 2b - a}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 166

- Nos piden **x**.
- Del gráfico, en el ΔABC: $\alpha + \theta = 70°$
- Trazamos $\overline{RM}$ tal que:

$m\sphericalangle MRC = \theta$

$\Rightarrow m\sphericalangle RMB = \alpha + \theta \Rightarrow RB = RM$

- $\Delta ABR \cong \Delta CRM$ (LAL)

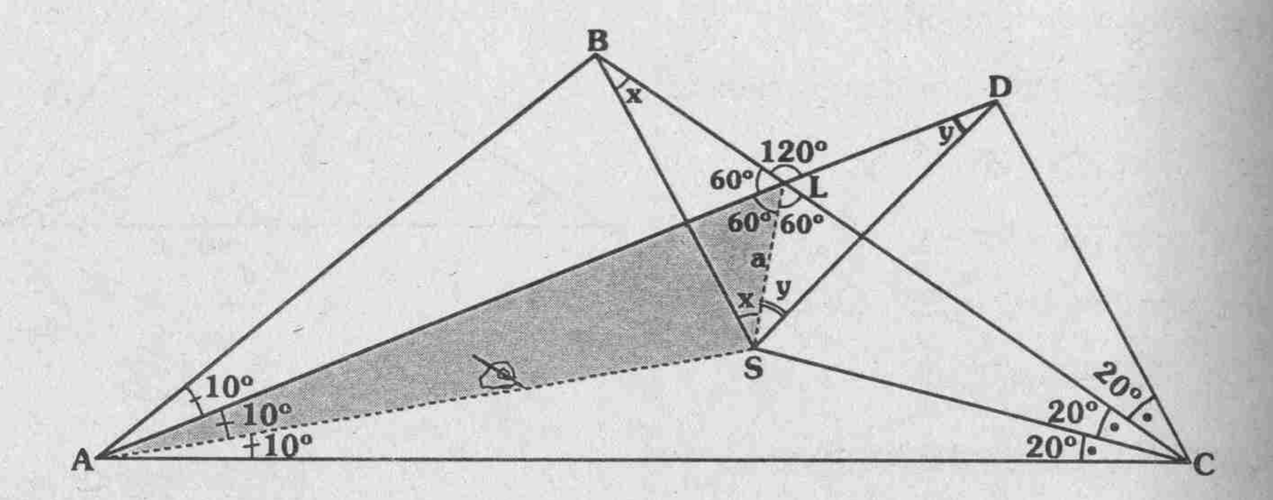
$\Rightarrow \alpha = 40°$

- Como $\alpha = 40° \Rightarrow BC = a$, luego el ΔRBC es isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle CRB = 70°$
- $\triangle RBS$: $x + m\sphericalangle CRB = 90°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 20°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 167



- Piden $x+y$.
- Por la observación dada en la pág. 73, en ΔALC, como $\overline{AS}$ y $\overline{CS}$ son bisectrices

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle ALS = m\measuredangle CLS = 60°$$

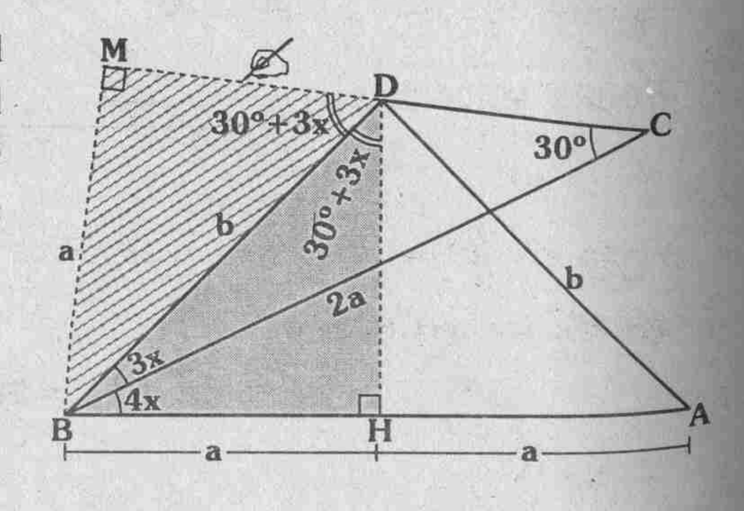
- $\Delta ALB \cong \Delta ALS$ (ALA) $\Rightarrow$ $BL = LS \Rightarrow m\measuredangle BSL = x$
- $\Delta CLS \cong \Delta CLD$ (ALA) $\Rightarrow$ $LS = LD \Rightarrow m\measuredangle LSD = y$
- En ⊿BSDL: $2x + 2y = 120°$

$$\therefore \; \mathbf{x+y=60°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 168

- Piden **x**.
- Para aprovechar la presencia del "30°" y $AB = BC$, primero en el ΔADB que es isósceles ($DB = DA$), se traza la altura $\overline{DH} \Rightarrow BH = HA = a$; se traza $\overleftrightarrow{BM} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (M en $\overleftrightarrow{CD}$).



- ⊿BMC notable de 30°

$$\Rightarrow \; BM = \frac{BC}{2} = a$$

- Por teorema de la bisectriz (recíproco), debido a que:

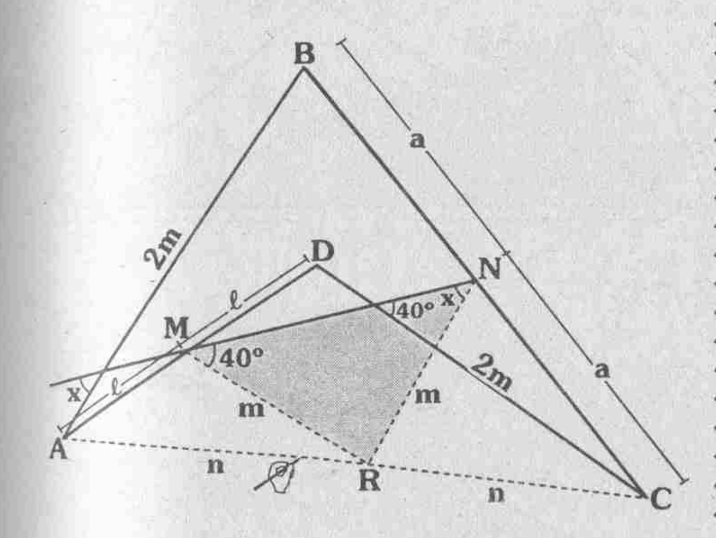
$BM = BH \Rightarrow m\sphericalangle MDB = m\sphericalangle BDH$

- ⊿BHD: $7x + 30° + 3x = 90°$

$\therefore\ \mathbf{x = 6°}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 169



- Piden **x**.
- Dato $AB = CD$
- Se ubica R, punto medio de $\overline{AC}$,
- En ΔADC, $\overline{MR}$ es media

$$\Rightarrow MR = \frac{CD}{2} \quad y$$

$$\overline{MR} // \overline{DC}$$

- En ΔABC, $\overline{RN}$ es base media

$$\Rightarrow RN = \frac{AB}{2} \quad y \quad \overline{RN} // \overline{AB}$$

- Por ángulo entre paralelas:

$- \ m\sphericalangle RMN = 40°\ ; \quad y$

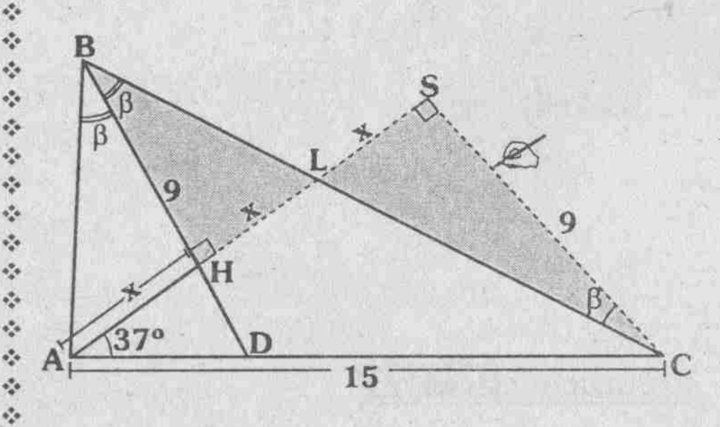
$- \ m\sphericalangle RNM = x$

- También: $MR = RN$
- ΔMRN: isósceles

$\therefore\ \mathbf{x = 40°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 170



- Piden **x**.
- Se prolonga $\overline{AH}$ y se traza $\overline{CS} \perp \overleftrightarrow{AH}$, con S en $\overleftrightarrow{AH}$.
- ⊿ASC: notable de 37°

$\Rightarrow CS = 9 \quad y$

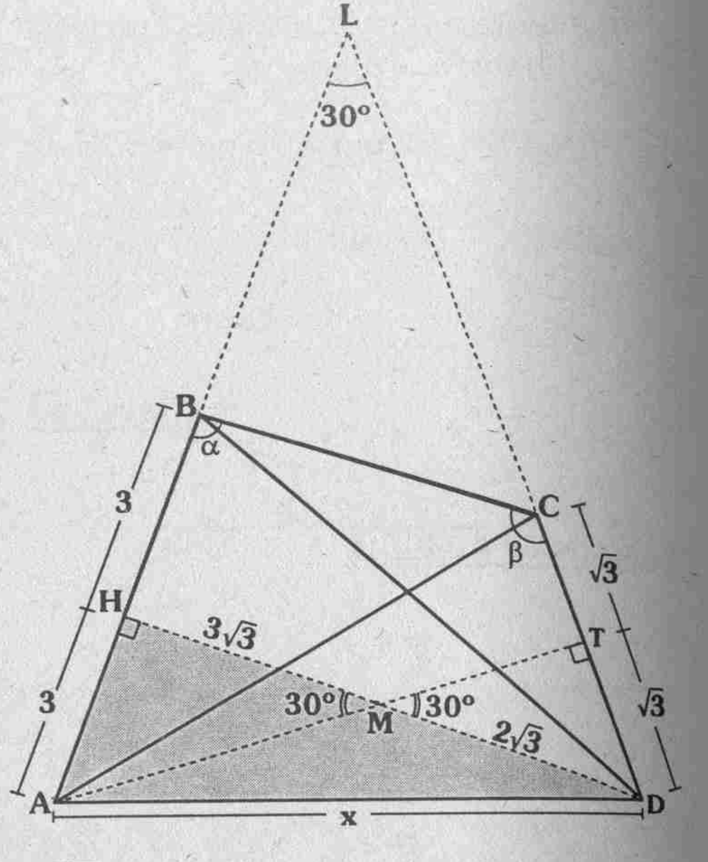
$AS = 12$

- ΔABL : isósceles $\Rightarrow AH = HL = x$
- ⊿BHL ≅ ⊿CSL $\Rightarrow HL = LS = x$
- Como $\underbrace{AS}_{3x} = 12$

$\therefore\ \mathbf{x = 4}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 171



- Piden **x**.
- Dato: AD = DB = DC
- Como:

$$\alpha + \beta = 210° \Rightarrow m\sphericalangle ALD = 30°$$

- En los triángulos isósceles ADB y DAC, se trazan las alturas $\overline{DH}$ y AT ⇒ AH = HB = 3 y CT = TD = $\sqrt{3}$.
- ⊿AHM y ⊿MTD: notable de 30°

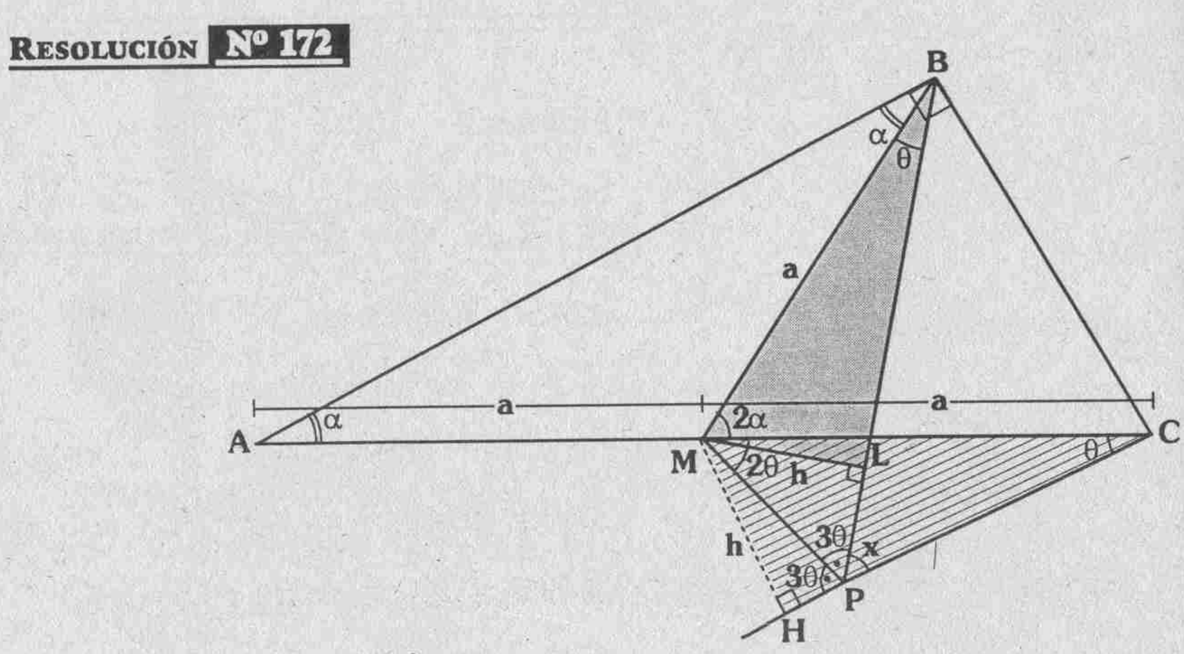
$$\Rightarrow HM = 3\sqrt{3} \quad y$$
$$MD = 2\sqrt{3}$$

- ⊿AHD: $x^2 = 3^2 + (5\sqrt{3})^2$

$$\therefore\ \mathbf{x = 2\sqrt{21}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 172

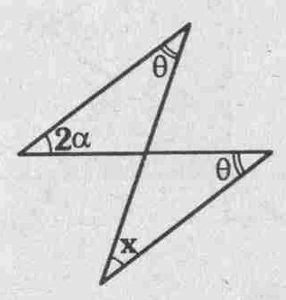


- Piden **x** en función de α
- $\overline{BM}$: mediana relativa a la hipotenusa, por teorema: AM = MC = MB
- Por teorema de la bisectriz: MH = ML

- ⊿MLB ≅ ⊿HMC

$\Rightarrow$ m∢MBP = θ

- Del gráfico:

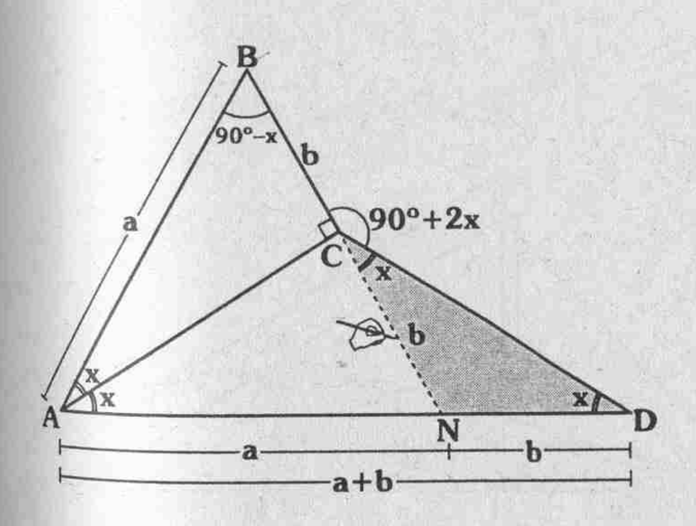


$x + \theta = 2\alpha + \theta$

$\therefore$ **x = 2α**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 173



- Piden **x**.
- De los datos:

m∢ABC = 90° – x

$\Rightarrow$ m∢ACB = 90°

- Se prolonga $\overline{BC}$ hasta que corte a $\overline{AD}$ en N, ΔABN es isósceles

$\Rightarrow$ AB = AN

- ΔCND : isósceles $\Rightarrow$ m∢DCN = x

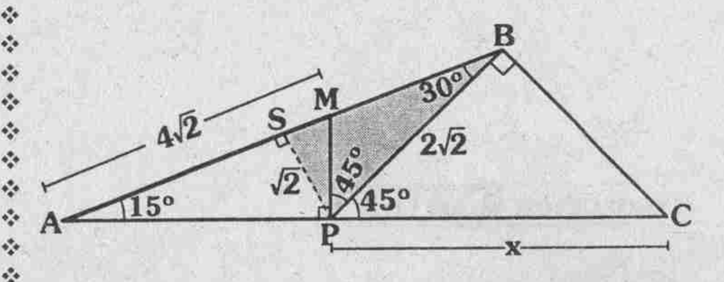
- En "C":

$90° + 2x + x = 180°$

$\therefore$ **x = 30°**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 174



- Piden **x**.
- En ⊿APM, por teorema AM = 4(PS)

$\Rightarrow PS = \sqrt{2}$

- ⊿PSB: notable de 30°

$\Rightarrow PB = 2\sqrt{2}$

- ⊿PBC: notable de 45°, como $PB = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ **x = 4**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 175

- Piden MN
- En ⊿ABC se traza la mediana:

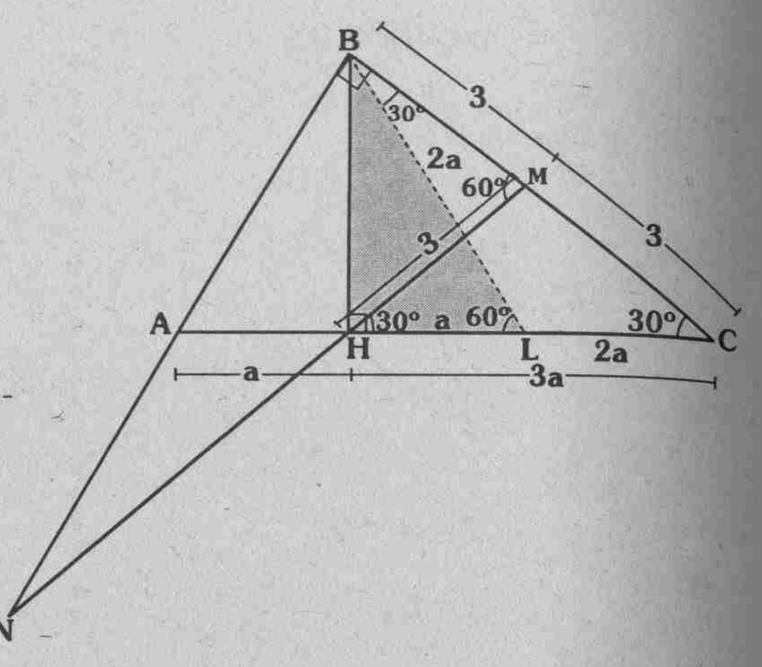
  $BL \Rightarrow AL = LC = BN$

- ⊿BHL: notable de 30° y 60°

  $\Rightarrow m\sphericalangle BCH : 30$

- En ⊿BHC: $\overline{HM}$ es mediana relativa a $\overline{BC} \Rightarrow MB = MC = MN$
- $m\sphericalangle BMH = 60°$
- ⊿NBM: notable de 30° y 60°

  $\therefore$ **MN = 6**



Clave D

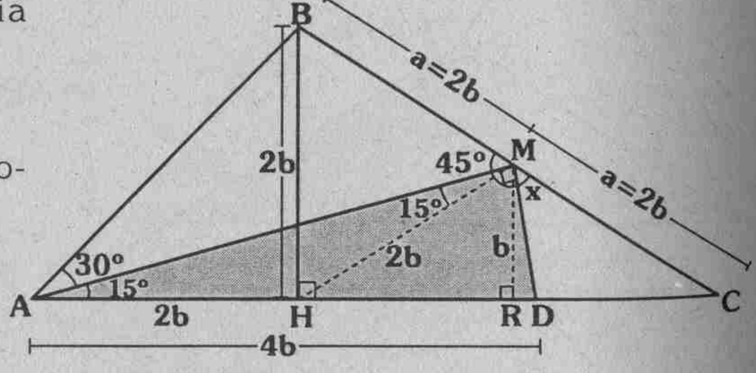
RESOLUCIÓN Nº 176

- Nos piden **x**.
- Por teorema de la base media $MR = \dfrac{BH}{2}$:
- Luego, como $AD = 4(MR)$, por teorema: $m\sphericalangle MAD = 15°$
- ⊿ABN: notable de 45°

  $\Rightarrow AH = HB$

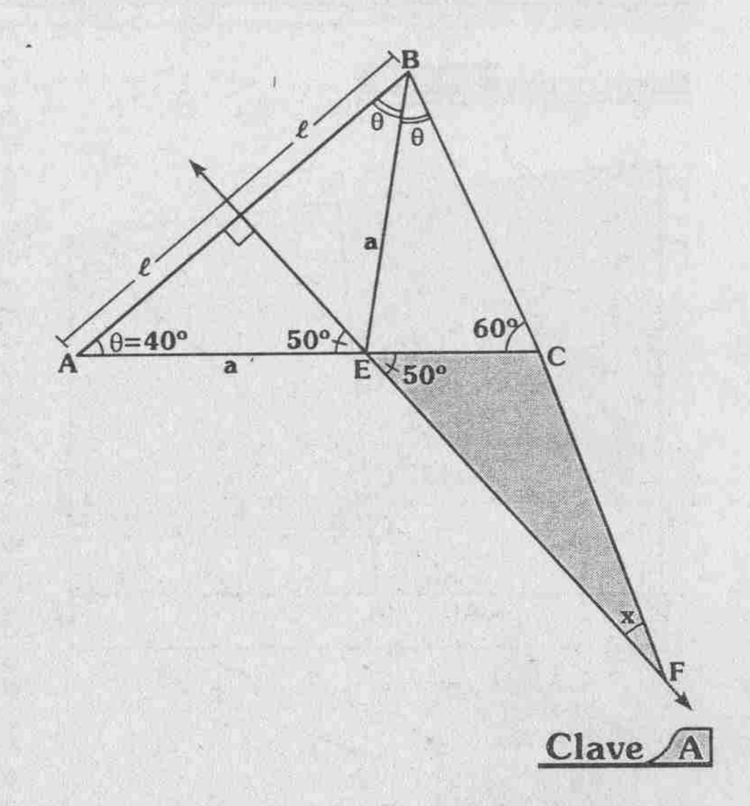
- En ⊿BHC: $\overline{HM}$ es mediana $\Rightarrow$ $HM = MB = MC$
- ΔHMB : equilátero $\Rightarrow m\sphericalangle BMA = 45°$

  $\therefore$ **x = 45°**



Clave B

RESOLUCIÓN Nº 177



- Piden **x**.
- Por teorema de la mediatriz:

$$EA = EB$$

- ΔABC :

$$3\theta + 60° = 180° \Rightarrow \theta = 40°$$

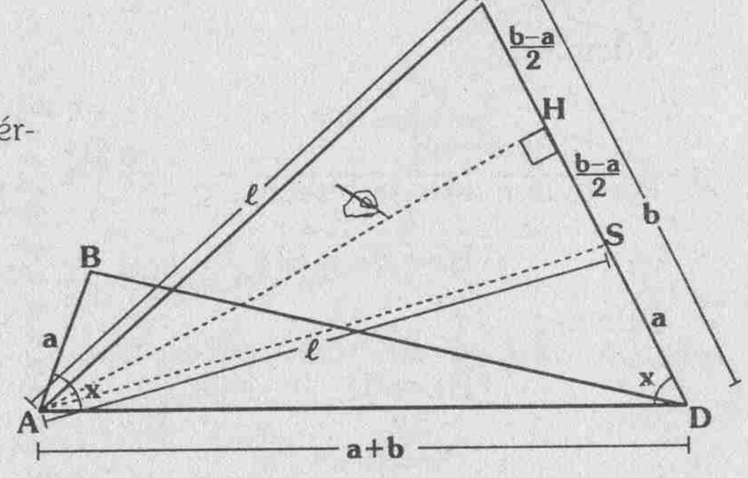
- ΔECF :

$$x + 50° = 60°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 10°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 178



- Nos piden **x**.
- Como $AB \neq CD$, consideremos sin pérdida de generalidad: $CD > AB$
- Se ubica S en $\overline{CD}$ tal que:

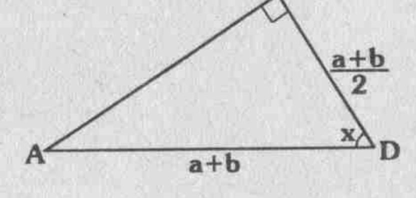
$$DS = AB = a$$

- $\Delta ABD \cong \Delta ASD$ (LAL)

$$\Rightarrow AS = DB = \ell$$

- ΔACS : isósceles, aquí se traza la altura $\overline{AH}$, por teorema: $CH = HS = \dfrac{b-a}{2}$

- Del gráfico:



- $\measuredangle$AHD: notable $\quad \therefore \ \mathbf{x = 60°}$

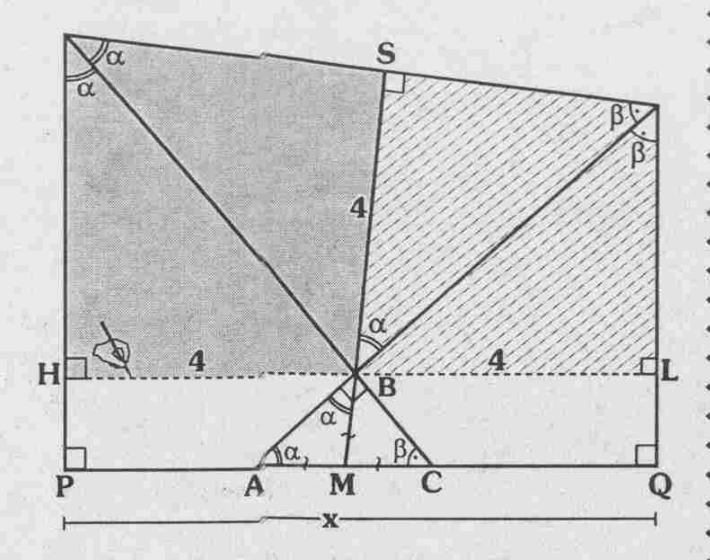
Clave B



Nota

Si se considera $AB > CD$, se comprueba en forma análoga.

RESOLUCIÓN Nº 179



- Piden **x**.
- ⊿ABC: $\overline{BM}$ mediana relativa a la hipotenusa.
- Además:

$$\alpha + \beta = 90°$$

- Por teorema de la bisectriz:

$$BS = BL = BH$$

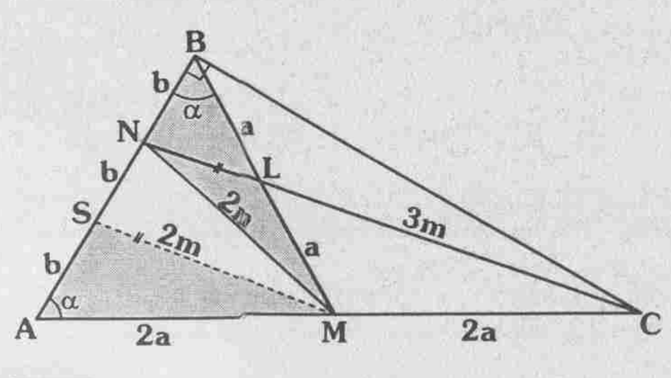
- Además:

$$HL = PQ$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 8}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 180



- Piden: $\dfrac{MN}{CN}$
- Trazamos $\overline{MS} // \overline{NS}$
- ΔMSB : $\overline{NL}$ es base media

$$\Rightarrow BN = NS$$

- ΔANC : $\overline{MS}$ es base media

$$\Rightarrow AS = SN$$

- ⊿ABC: $\overline{BM}$ es mediana relativa a la hipotenusa

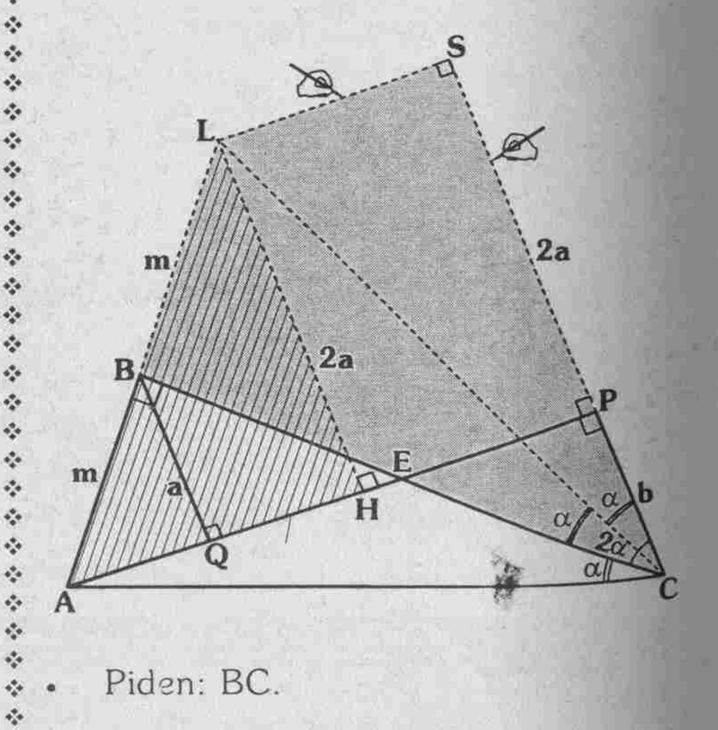
$$\Rightarrow\ m\sphericalangle MAB = m\sphericalangle MBA$$

- $\Delta AMS \cong \Delta BMN$ (LAL) $\Rightarrow$ MN = MS

$$\therefore\ \frac{\mathbf{MN}}{\mathbf{CN}} = \frac{\mathbf{2m}}{\mathbf{4m}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 181



- Piden: BC.
- Trazamos $\overline{CL}$ tal que: $m\sphericalangle BCL = \alpha$

- ΔLCA : isósceles $\Rightarrow$ $AB = BL$
- Trazamos $\overline{LH} \perp \overline{AP}$
- $\measuredangle ALH$: $\overline{BQ}$: base media

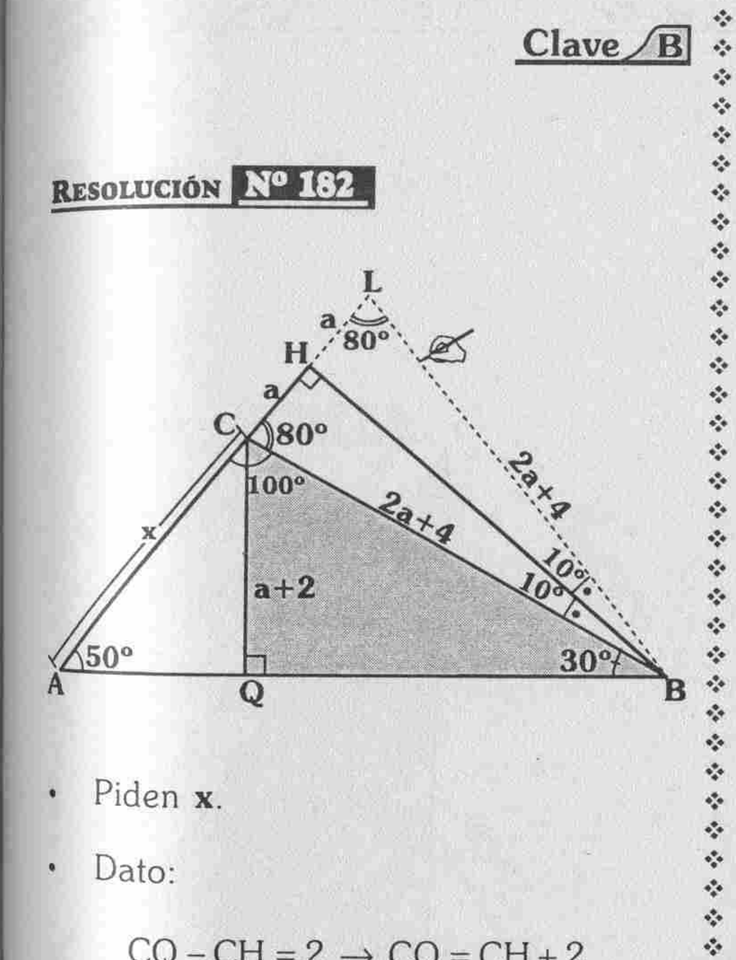
$$\Rightarrow LH = 2(BQ)$$

- Por teorema de la bisectriz $BC = SC$; además $SP = LH$.

$$\therefore \mathbf{BC = 2a + b}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 182



- Piden **x**.
- Dato:

$$CQ - CH = 2 \rightarrow CQ = \underbrace{CH}_{a} + 2$$

- En la prolongación de $\overline{AH}$ se ubica el punto L tal que:

$$BC = BL \Rightarrow CH = HL$$

- $\measuredangle CQB$: notable de 30° y 60°

$$\Rightarrow BC = 2(CQ)$$

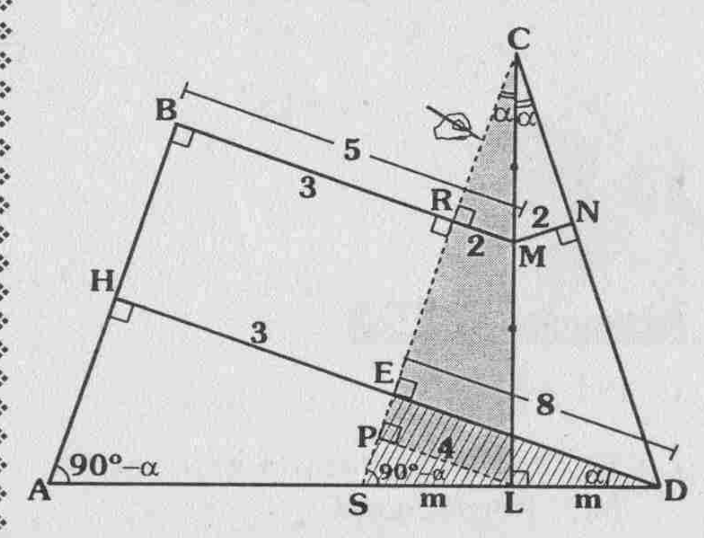
- ΔALB : isósceles

$$x + 2\cancel{a} = 2\cancel{a} + 4$$

$$\therefore \mathbf{x = 4}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 183



- Piden: HD
- Trazamos $\overline{CS} // \overline{AB}$ tal que ΔSCB: isosceles

$$\Rightarrow MN = MR \quad y$$

$$SL = LD$$

- $\measuredangle CPL$: $\overline{RM}$ es base media
- $\measuredangle DSE$: $\overline{PL}$ es base media

$$\Rightarrow ED = 2(PL) = 8$$

$$\Rightarrow HD = 3 + 8$$

$$\therefore \mathbf{HD = 11}$$

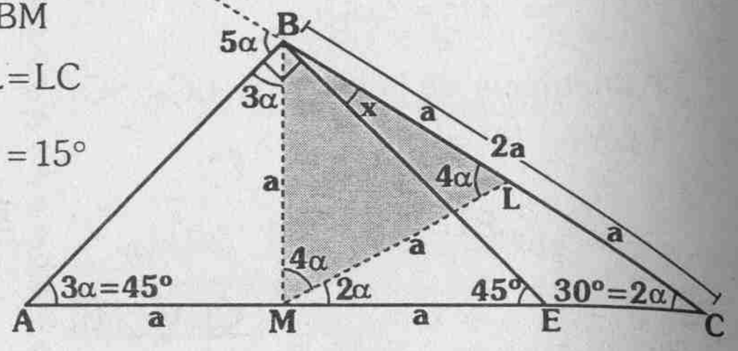
Clave C

RESOLUCIÓN Nº 184

- Piden **x**.
- ⊿ABE : $\overline{BM}$ es mediana relativa a la hipotenusa.
- ΔBMC: trazamos $\overline{ML}$ tal que BL=BM
- Además el ⊿MLC es isósceles ⇒ ML=LC
- ΔMBL: equilátero ⇒ $4\alpha = 60°$ ⇒ $\alpha = 15°$
- ΔEBC:

$$30° + x = 45°$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 15°}$$



Clave E

RESOLUCIÓN Nº 185

- Piden **x**.
- En ΔAPB se traza la base media $\overline{ML}$, por teorema:

$$PL = LB \quad y$$

$$ML = \frac{AP}{2}$$

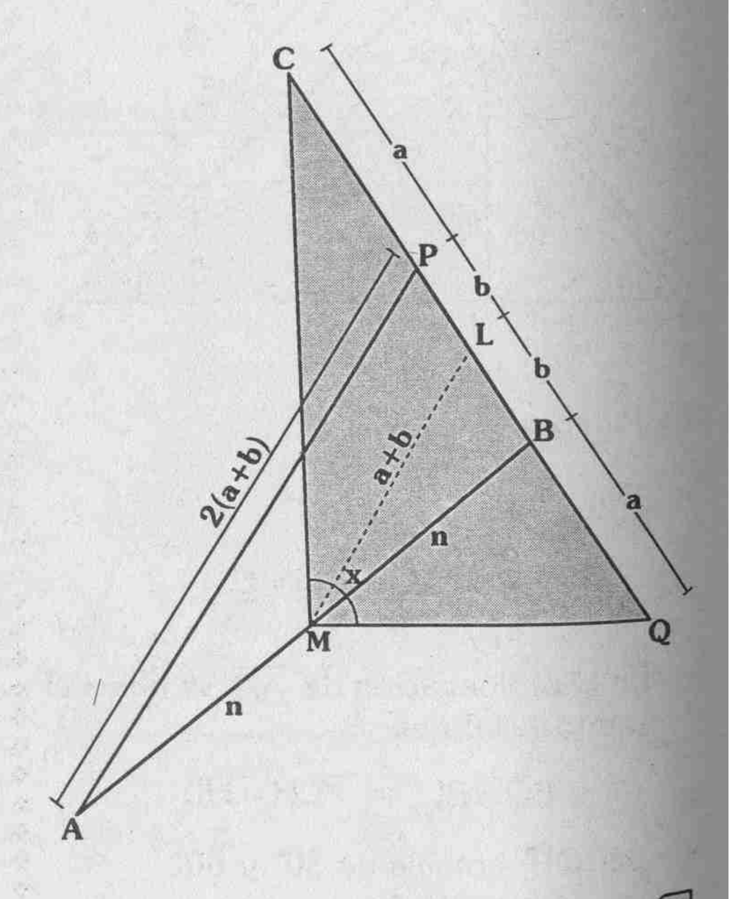
- Como AP=CQ

$$\Rightarrow \quad ML = a + b$$

- Como CL = LQ = ML, por teorema:

$$m\sphericalangle CMQ = 90°$$

$$\therefore \; \mathbf{x = 90°}$$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 186

- Piden **x**.
- $\measuredangle$AHB: $\overline{HL}$ es mediana relativa a la hipotenusa.

  $\Rightarrow$ HL = AL = LB
- ΔABC: $\overline{LM}$ es base media $\Rightarrow \overline{LM} // \overline{AC}$

  m$\measuredangle$LMA = m$\measuredangle$MAC
- ΔLMH : isósceles
- $\measuredangle$AHB: $2\alpha = 45° \Rightarrow 2a = 5\sqrt{2} \Rightarrow a = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$
- $\measuredangle$BSC: $\overline{HM}$ es base media

$$\mathbf{x = 5\sqrt{2}}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 187

- Piden θ.
- Trazamos $\overline{AL}$ tal que: AB=AL
- ΔLAE $\cong$ ΔEDC (LAL)

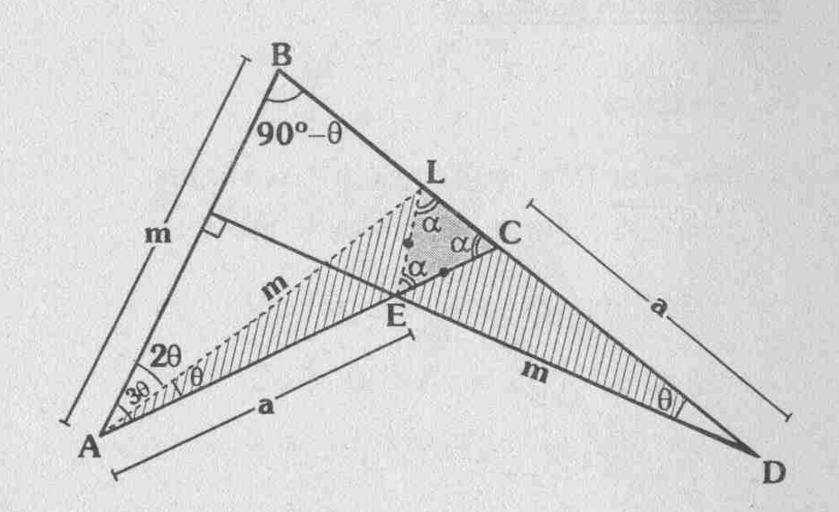
$\Rightarrow$ LE = EC y

m$\measuredangle$LEC = m$\measuredangle$ECL = m$\measuredangle$ELC

$\Rightarrow$ ΔLEC : equilátero ($\alpha = 60°$)

- ΔBAC :

  $3\theta + 90° - \theta + 60° = 180°$



$$\therefore\ \mathbf{\theta = 15°}$$

Clave A

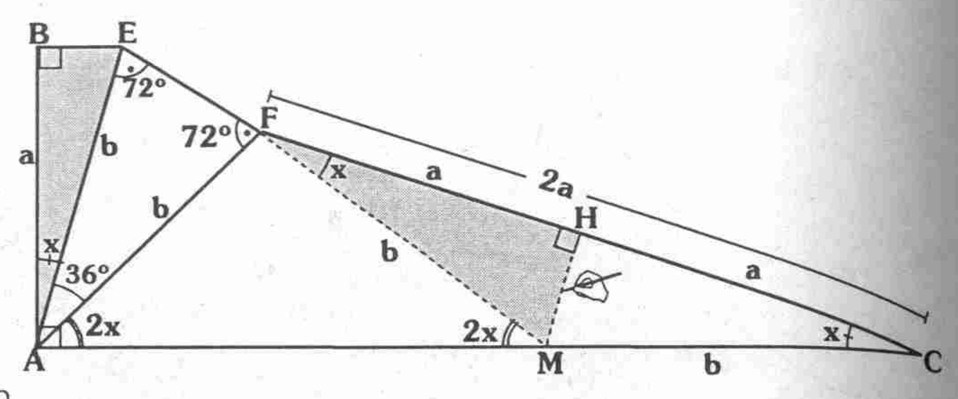
RESOLUCIÓN Nº 188

- Nos piden **x**.
- En ΔAEC notamos:

  $m\sphericalangle FAC = 2(m\sphericalangle FCA)$
- Nos conviene trazar $\overline{FM}$ tal que:

  $m\sphericalangle CFM = x$

  $\Rightarrow\ FA = FM = MC = b$



- Se traza : $\overline{MH} \perp \overline{FC}$ $\Rightarrow FH = HC = a$
- $\triangle ABE \cong \triangle FHM$ (ALA) $\Rightarrow AE = b$
- ΔAEF : isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle EAF = 36°$
- Finalmente: $x + 36° + 2x = 90°$

  $\therefore\ \mathbf{x = 18°}$

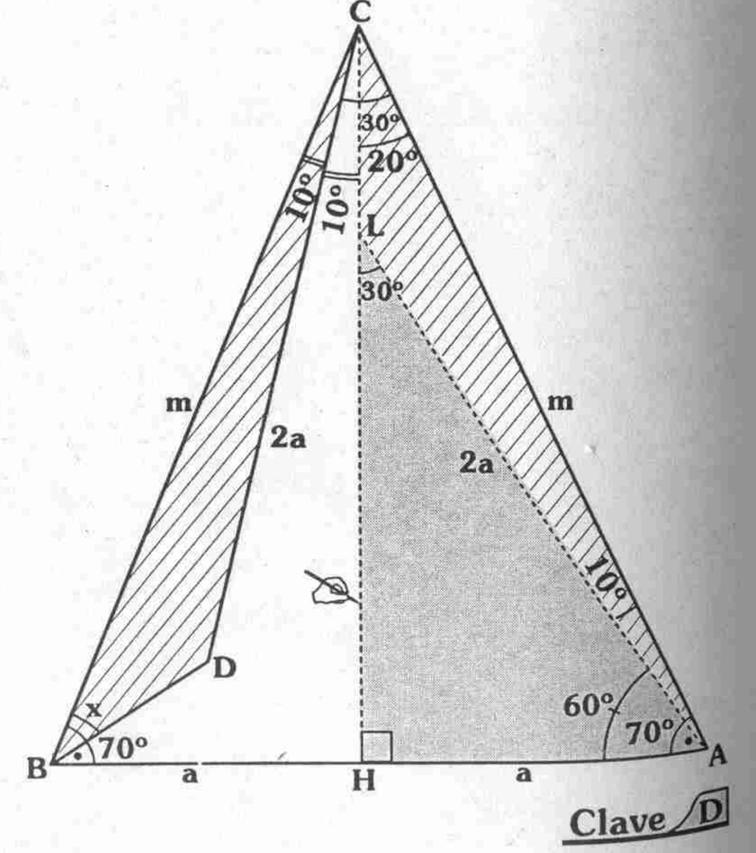
Clave D

RESOLUCIÓN Nº 189

- Piden **x**.
- Se deduce que ΔBCA isósceles $\Rightarrow \overline{CH}$: altura, mediana y bisectriz.
- $\triangle ACH$: trazamos $\overline{AL}$ tal que:
- $\triangle AHL$: notable de 30° y 60°

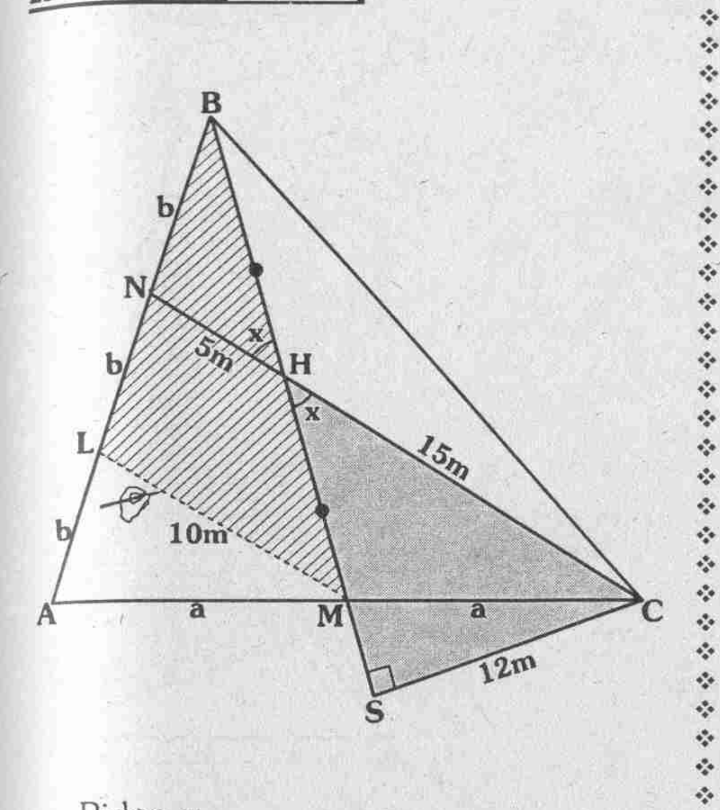
  $\rightarrow AL = 2(AH)$
- $\triangle BCD \cong \triangle CAL$ (LAL)

  $\therefore\ \mathbf{x = 20°}$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 190



- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{ML} // \overline{CN}$
- Δ LBM:

  $\overline{NH}$ es base media $\Rightarrow$ LM = 2(NH)

- Δ NAC:

  $\overline{LM}$ es base media $\Rightarrow$ NC = 2(LM)

  y del dato:

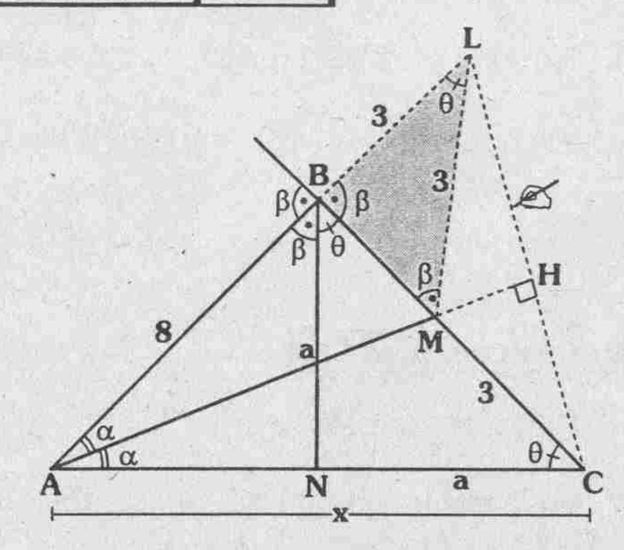
$$\frac{CN}{CS} = \frac{5}{3} \Rightarrow \begin{array}{l} CN = 20\text{ m} \\ CS = 12\text{ m} \end{array}$$

- ⊿CSH: notable de 37° y 53°

$$\mathbf{x = 53°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 191



- Piden AC = x.
- En la prolongación de $\overline{AB}$ se ubica el punto L tal que: LA = LC.

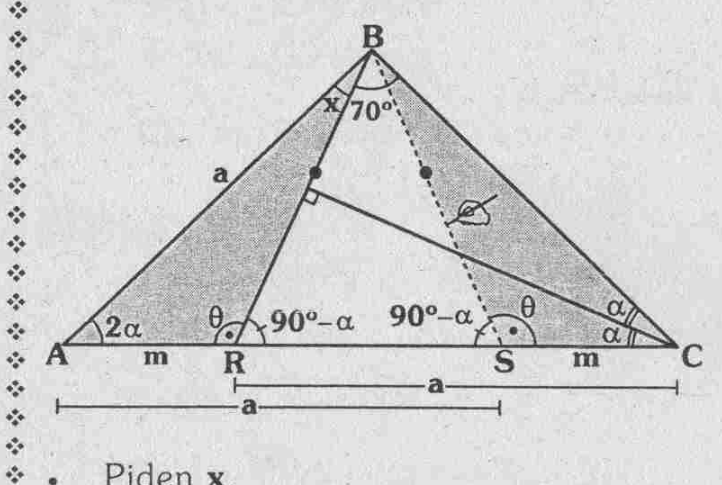
  $\Rightarrow$ m∢ALM = m∢MCA y LM = MC

- ΔBLM: se deduce que m∢LMB = β
- ΔBLM: isósceles (BL = LM)

$$\therefore\ \mathbf{x = 11}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 192



- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{BS}$ tal que AB = AS.

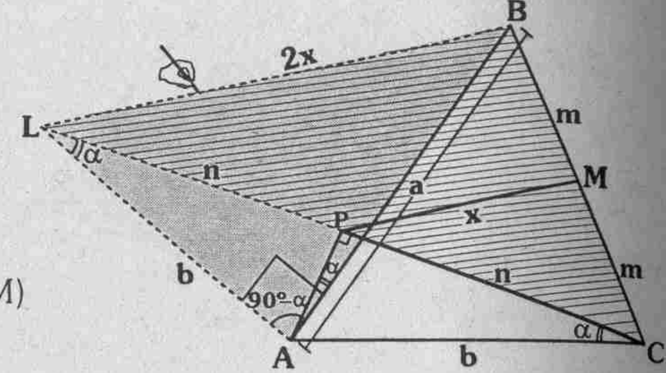
- Además ΔRBS : isósceles $(RB = BS)$
- $⊿ ABR \cong ⊿ BSC$ (LAL) $\Rightarrow$ $m\measuredangle BSC = m\measuredangle BAR$ $(\alpha = 20°)$
- ΔABC : $40° + x + 70° + 40° = 180°$

$$\therefore \ \mathbf{x = 30°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN N° 193

- Piden **x**; dato: $a^2 + b^2 = 36$
- En la prolongación de $\overline{CP}$ se ubica el punto L tal que $CA = AL$.
- ΔCAL : $\overline{AP}$ es altura y mediana
- ΔCLB : $\overline{PM}$ es base media $\Rightarrow LB = 2(PM)$
- $⊿LAB$: teorema de Pitágoras



$$(2x)^2 = a^2 + b^2 = 36$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 3}$$

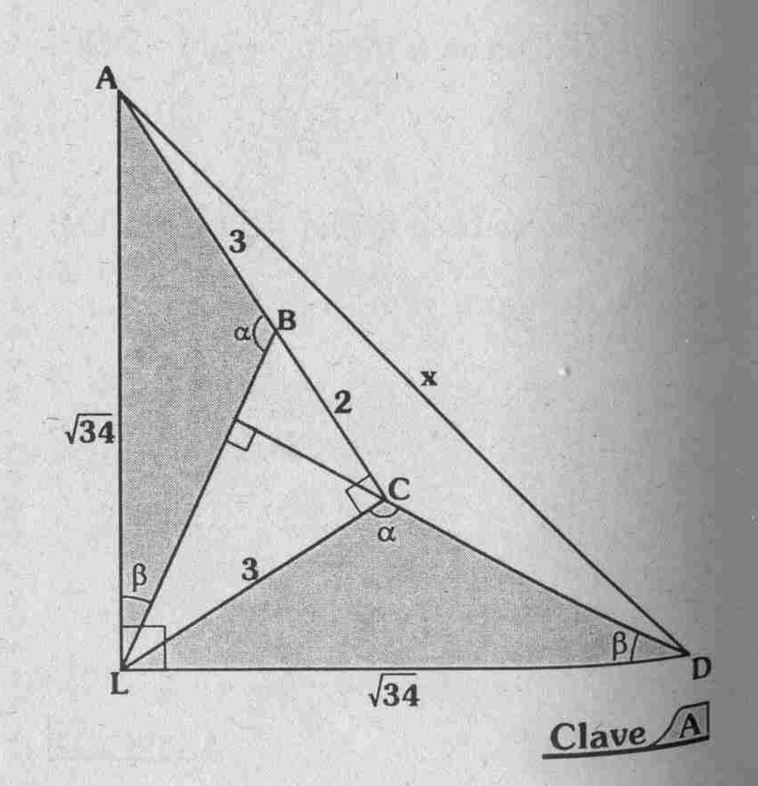
Clave D

RESOLUCIÓN N° 194

- Piden **x**.
- Se deduce: $m\measuredangle ABL > 90°$ y $m\measuredangle LCD > 90°$

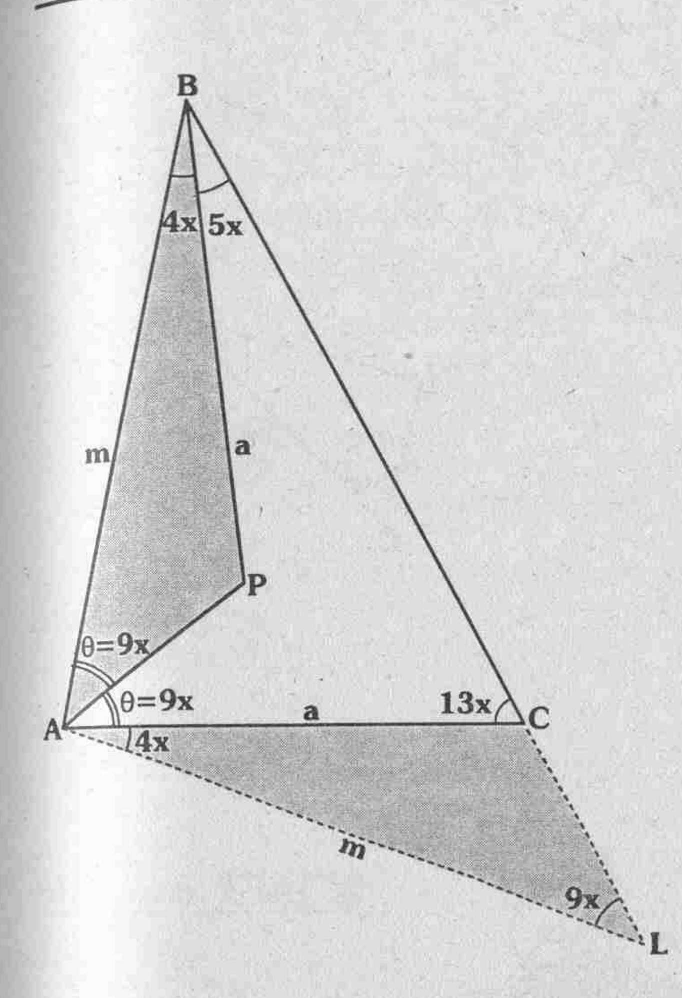
  y como $⊿ ABL \cong ⊿ m\measuredangle LCD$
  y $AL = LD$; $LC = AB$
- Se deduce: $m\measuredangle BCL = 90°$
- $⊿ACL$: $(AL)^2 = 5^2 + 3^2$

  $\Rightarrow AL = \sqrt{34}$
- $⊿ALD$: $\mathbf{x = 2\sqrt{17}}$



Clave A

RESOLUCIÓN Nº 195



- Piden **x**.
- En la prolongación de $\overline{BC}$ se ubica el punto "L" tal que $AB = AL$.
- $\Delta ABP \cong \Delta LAC$ (LAL)

$$\Rightarrow \quad \theta = 9x$$

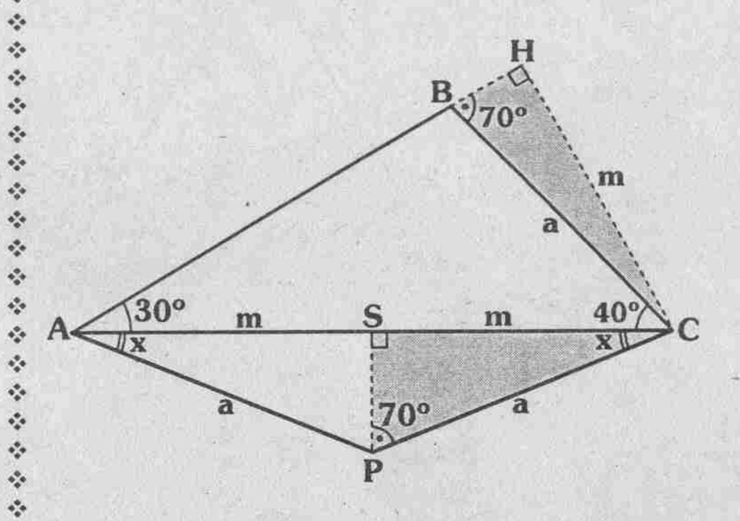
- En ΔABC:

$$18x + 9x + 13x = 180$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 4{,}5°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 196



- Piden **x**.
- ⊿AHC: notable de 30° y 60°

$$\Rightarrow AC = 2(HC)$$

- ΔAPC: isósceles, $\overline{PS}$ altura y mediana

$$\Rightarrow AS = SC$$

- ⊿PSC ≅ ⊿BHC

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle SPC = m\measuredangle HBC$$

- ⊿PSC: $x + 70° = 90°$

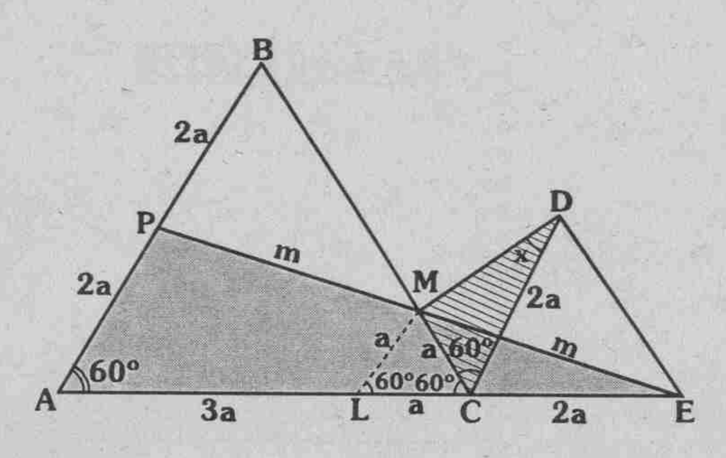
$$\therefore \ \mathbf{x = 20°}$$

Clave B

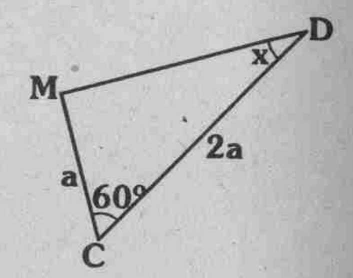
RESOLUCIÓN Nº 197

- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{ML} \,//\, \overline{AP}$
- ⊿APE: $\overline{ML}$: base media

$$\Rightarrow AP = 2(ML) \ , \ AL = LE$$



- En el ⊿CMD:



$$m\sphericalangle DMC = 90°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 30°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 198

- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{AL} \perp \overline{BQ}$
- ⊿ALB: notable de 30 y 60°

$$\Rightarrow \ AB = 2(AL)$$

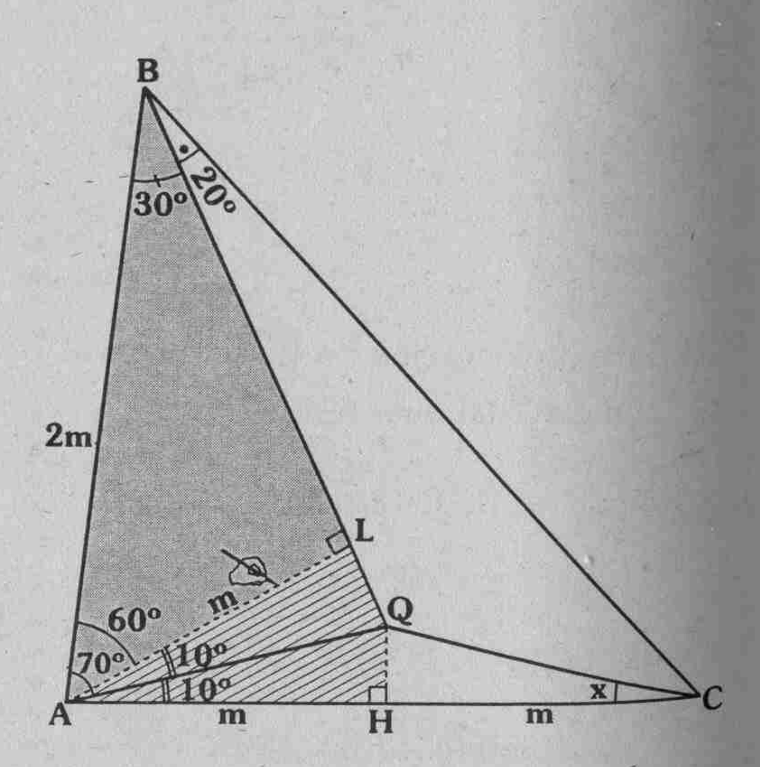
- Además el ΔBAC es isósceles $(AB = AC)$
- Por teorema de la bisectriz:

$$LA = HA$$

$$\Rightarrow \ AH = HC$$

- ΔAQC : $\overline{QH}$ es altura y mediana

$$\Rightarrow \ \Delta AQC: \text{ isósceles}$$

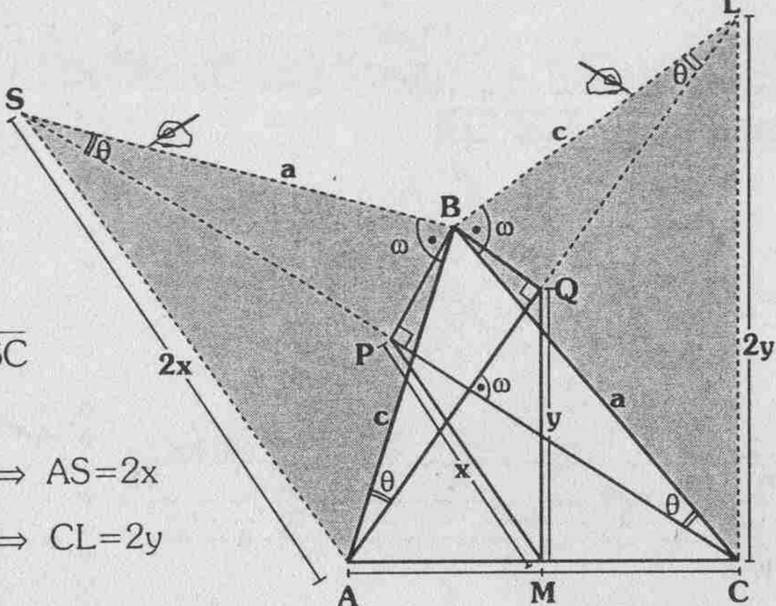


$$\therefore \ \mathbf{x = 10°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 199

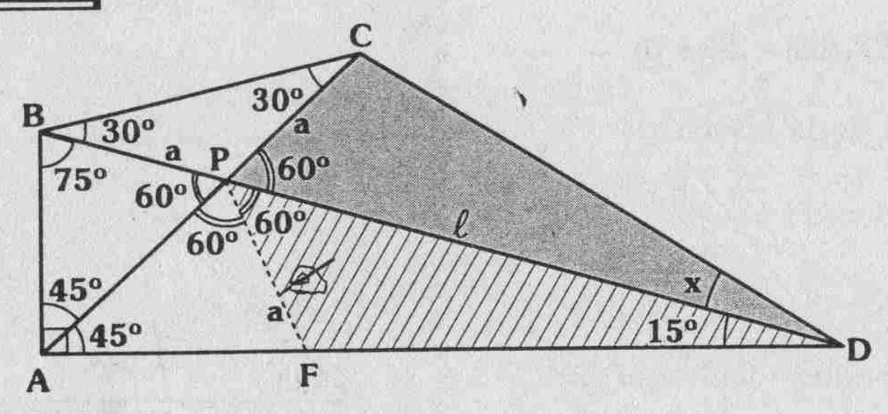
- Piden $\frac{x}{y}$.
- Se prolongan $\overline{CP}$ y $\overline{AQ}$ y se traza $\overline{BS}$ y $\overline{BL}$, con S y L en dichas prolongaciones tal que: $BS = BC$ y $AB = BL$.
- $\triangle SBC$ y $\triangle ABL$ son isósceles.
- P y Q son puntos medios de $\overline{SC}$ y $\overline{AL}$ respectivamente.
- En $\triangle ACS$, $\overline{MP}$ es base media $\Rightarrow AS = 2x$
- En $\triangle ALC$, $\overline{MQ}$ es base media $\Rightarrow CL = 2y$
- $\triangle ABS \cong \triangle LBC$ (LAL) $\Rightarrow 2x = 2y$



$$\therefore \ \frac{x}{y} = 1$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 200



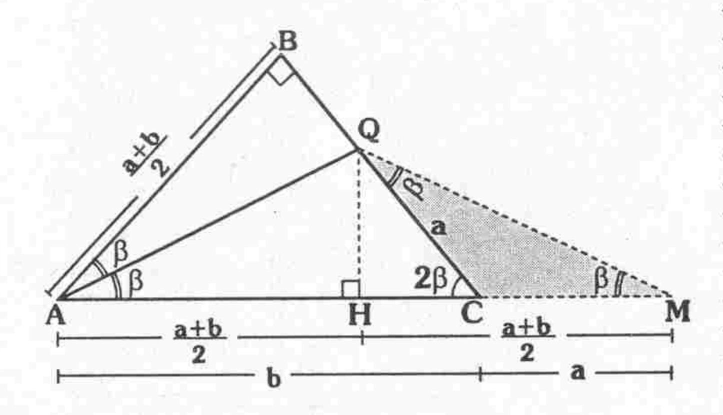
- Piden **x.**
- $\triangle BPC$: isósceles $\Rightarrow PB = PC = a$
- Se traza $\overline{PF}$ tal que: $m\measuredangle APF = 60°$
- $\triangle APF \cong \triangle APB$ (ALA) $\Rightarrow PF = BP = a$
- Como: $m\measuredangle FPC = 60° \Rightarrow \triangle DPF \cong \triangle DPC$ (LAL)

$$\therefore \ x = 15°$$

Clave B

Solucionario
Ciclo Semestral Intensivo

RESOLUCIÓN Nº 201



- Piden β
- Se prolonga $\overline{AC}$ hasta M, tal que:

$$CM = CQ = a$$

- Así tenemos:

$$AM = 2(AB) = 2(a + b)$$

- Por teorema de la bisectriz:

$$AB = AH = \frac{a+b}{2}$$

- Como:

$$AH = HM \Rightarrow AQ = QM \Rightarrow \Delta AQM$$

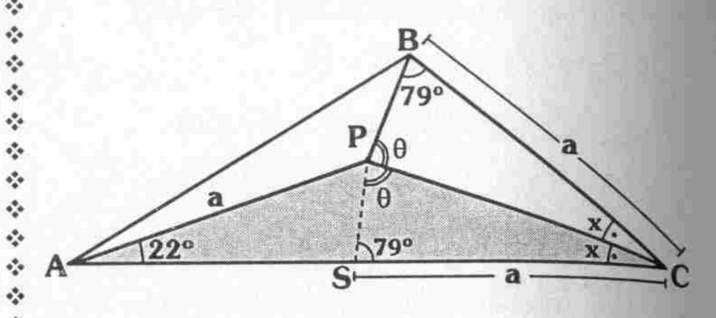
es isósceles, luego $m\measuredangle AMQ = \beta$

- ΔCQM : isósceles $\Rightarrow m\measuredangle MQC = \beta$
- $\triangle ABC$: $2\beta + 2\beta = 90°$

$$\therefore \beta = \mathbf{22,5°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 202



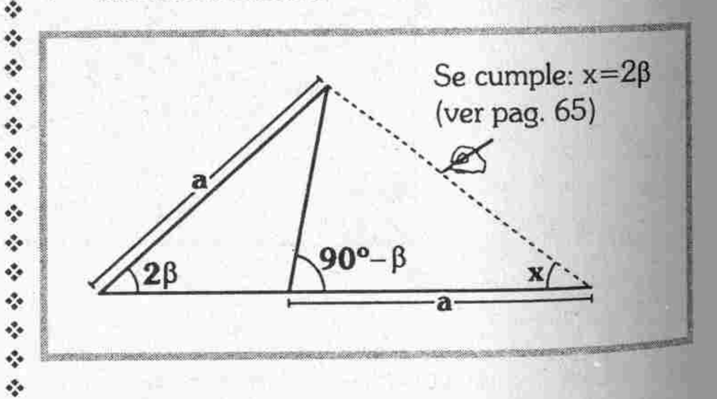
- Piden **x**.
- Se traza $\overline{PS}$, tal que:

$$m\measuredangle CPS = m\measuredangle CPB$$

$$\Rightarrow \Delta BPC \cong \Delta SPC \text{ (ALA)}$$

$$\Rightarrow CS = CB = a$$

- Consideremos:



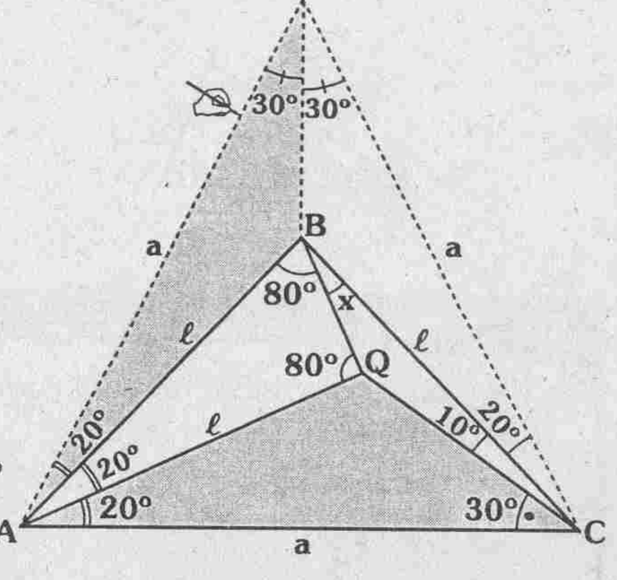
- En el problema:

$$\beta = 11°$$

$$\therefore \mathbf{x = 22°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 203



- Piden **x**.
- Se traza $\overline{AS}$ tal que $m\sphericalangle SAB = 20°$ y $AS = AC = a$
- ΔASC : equilátero $\Rightarrow CS = a$
- Como $AS = SC$ y $AB = BC$

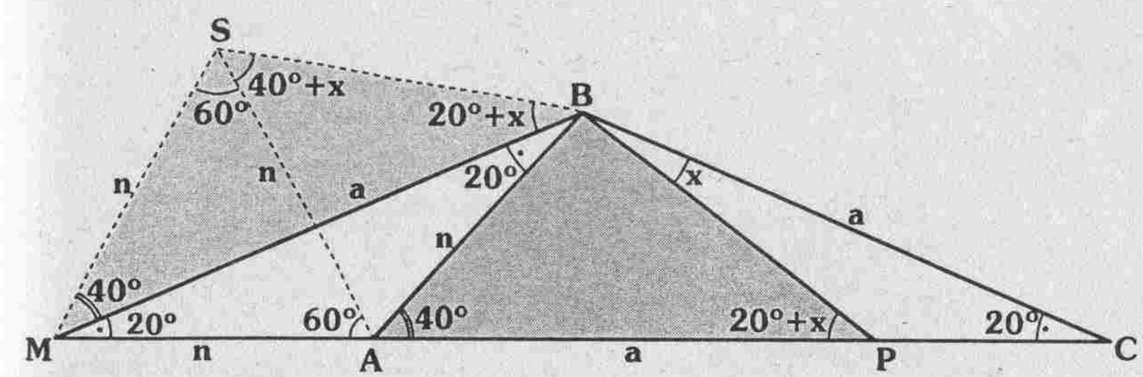
  $\Rightarrow m\sphericalangle ASB = m\sphericalangle BSC = 30°$
- $\Delta SAB \cong \Delta CAQ$ (ALA) $\Rightarrow AB = AQ$
- ΔABQ : isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle ABQ = m\sphericalangle AQB = 80°$
- ΔABC : $m\sphericalangle ABC = 100°$

  $80° + x = 100°$

$$\therefore \mathbf{x = 20°}$$

Clave D

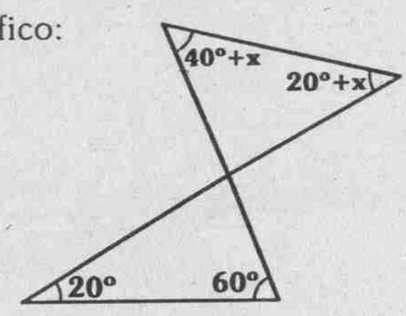
RESOLUCIÓN Nº 204



- Piden **x**.
- Como $m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle BCA)$, se traza $\overline{BM}$ tal que:

  $m\sphericalangle MBA = 20° \Rightarrow AM = AB = n$ y $MB = BC = a$
- Se traza $\overline{MS}$ tal que $MS = n$ y $m\sphericalangle SMB = 40°$
- $\Delta SMB \cong \Delta BAP$ (LAL) $\Rightarrow m\sphericalangle ABS = 20° + x$
- ΔASM : equilátero $\Rightarrow AS = n$
- ΔBAS : isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle ASB = 40° + x$

- Del gráfico:



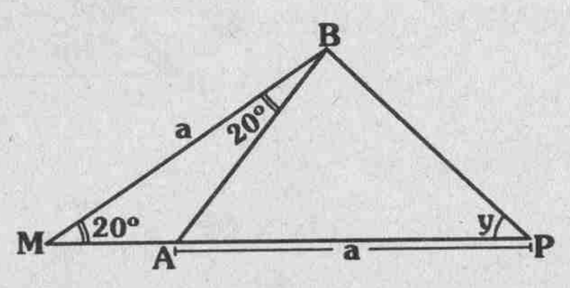
$$40° + x + 20° + x = 20° + 60°$$

$$\therefore x = 10°$$

Clave D

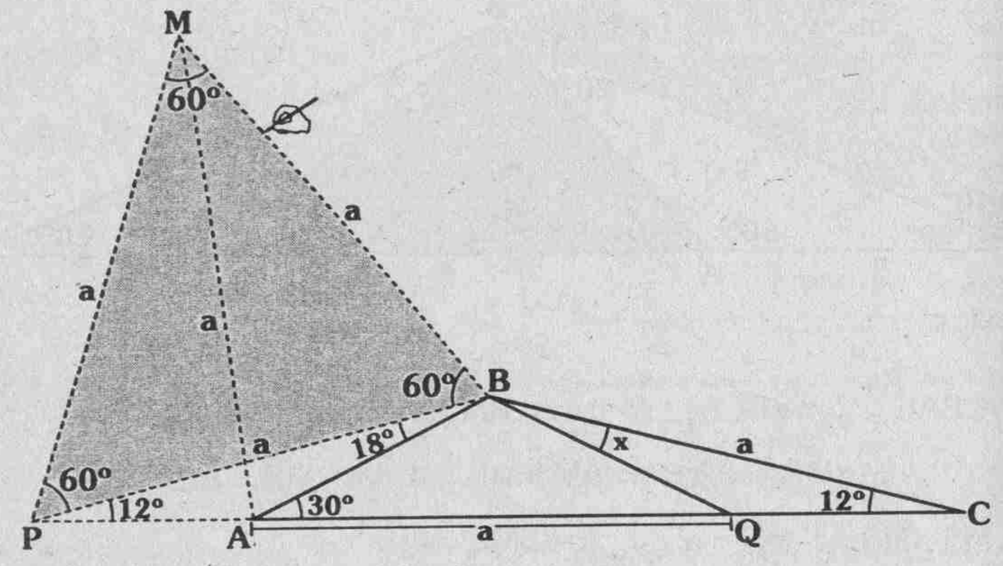
Nota

Si notamos el ΔMBP , lo cual ya fue analizado en el capítulo de trazos auxiliares (ver pág 59).



RESOLUCIÓN Nº 205

Paso 1



- Piden **x**.

- Se traza $\overline{BP}$ (P en la prolongación de $\overline{QA}$), tal que:

$$m\measuredangle BPA = 12° \Rightarrow PB = BC = a$$

- Se traza el ΔPBM equilátero, verificamos entonces:

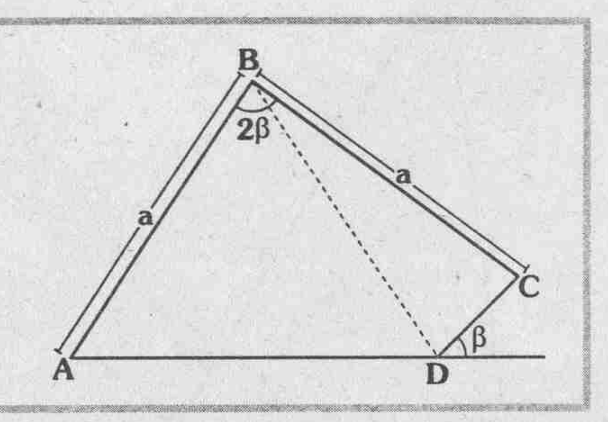
$$m\measuredangle PMB = 2(m\measuredangle BAP) \quad y \quad PM = MB = a \Rightarrow MA = a$$

Recordar:

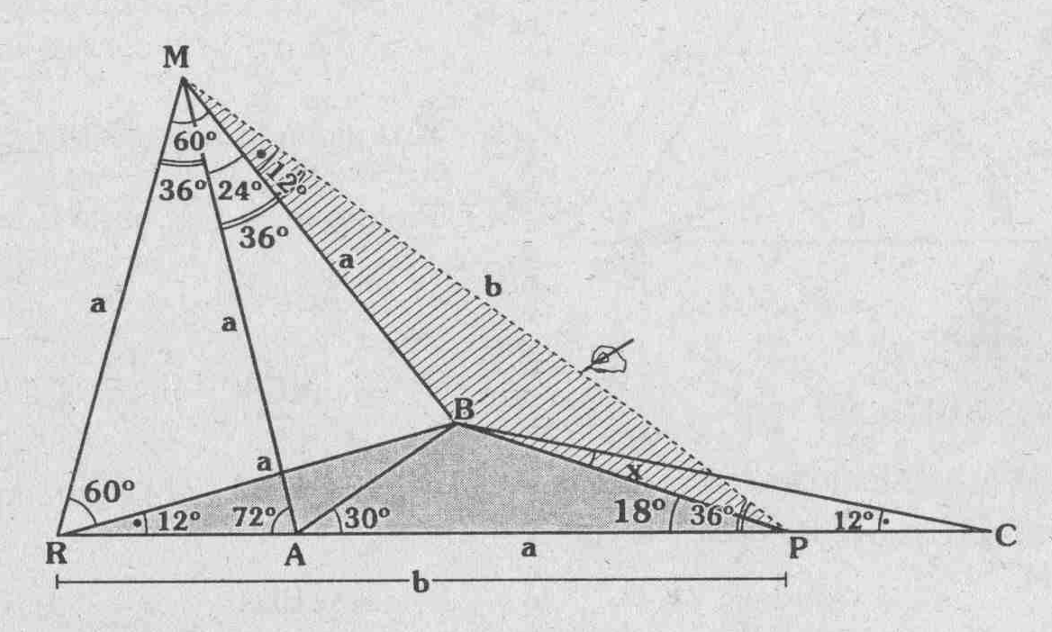
- Del gráfico, se cumple:

$$\boxed{BD = a}$$

- La prueba fue realizada en la publicación de "Triángulos", también se demuestra en "Puntos Notables".



Paso 2



- Como: $AM = AP = a$ y $m\measuredangle MAR = 72°$

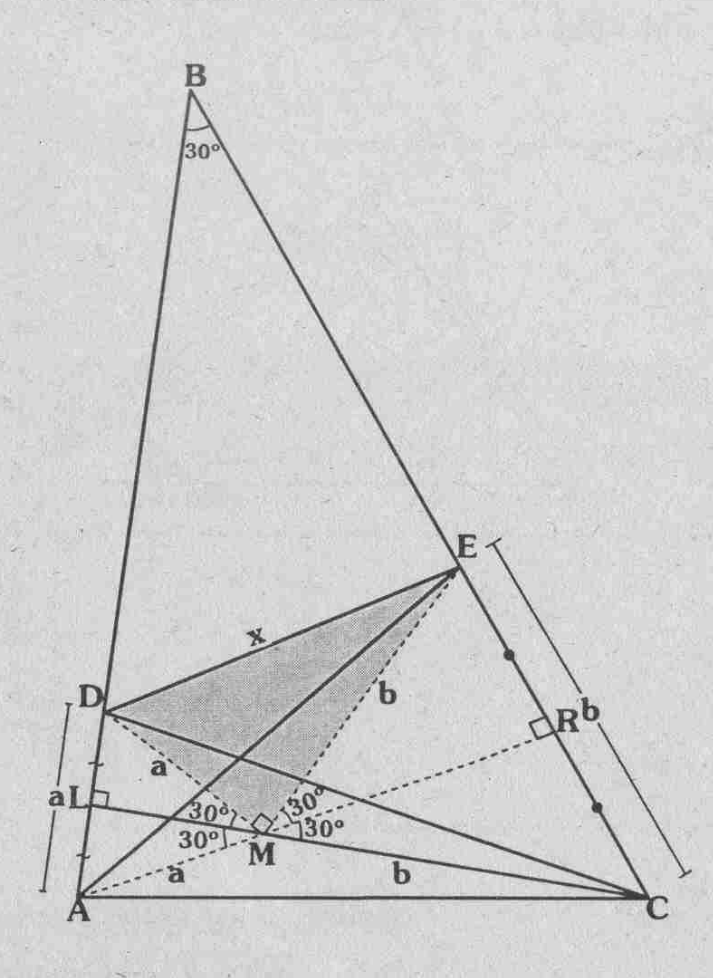
$$\Rightarrow m\measuredangle APM = 36°$$

- ΔRMP : isósceles $\Rightarrow PR = PM$
- Como: $PR = PM$ y $RB = BM$ $\Rightarrow m\measuredangle RPB = m\measuredangle MPB = 18°$
- ΔPBC : $x + 12° = 18°$

$$\therefore \mathbf{x = 6°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 206



- Piden **x**.
- Datos: AC = CD = AE
- En ΔACD y ΔCAE (isósceles) se trazan las alturas $\overline{CL}$ y $\overline{AR}$ las cuales se cortan en M.
- Por teorema: m∢EMR = 30°
- ΔAMD y ΔCME : equiláteros
- m∢DME = 90°

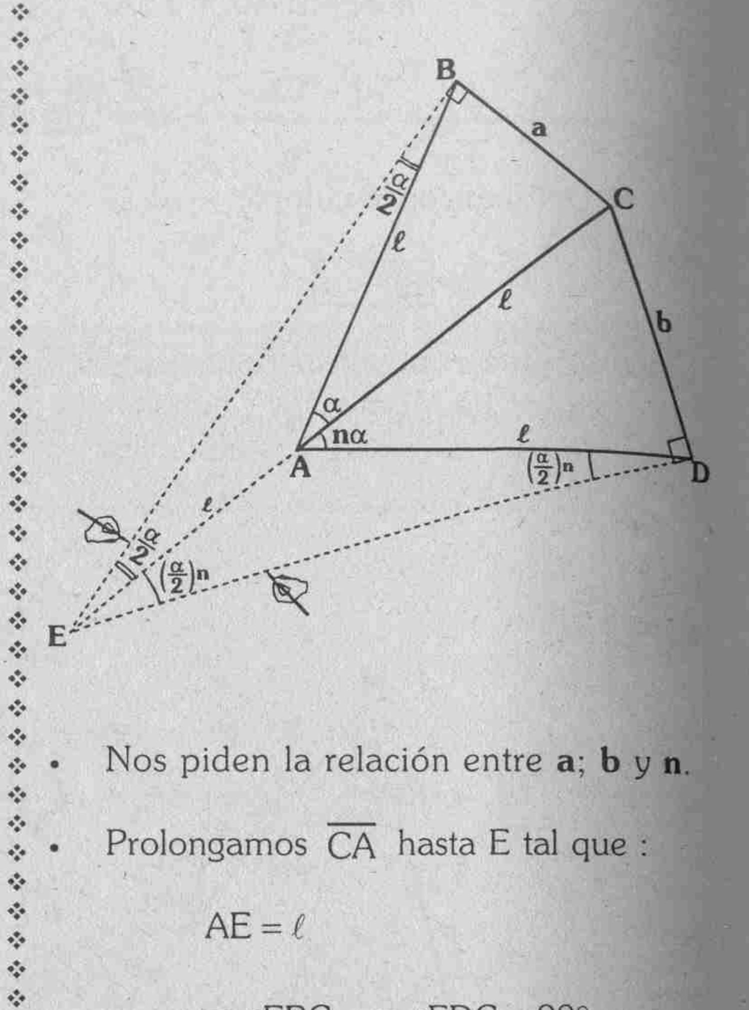
  ⊿DME: por teorema de Pitágoras:

$$x^2 = a^2 + b^2$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 207



- Nos piden la relación entre **a**; **b** y **n**.
- Prolongamos $\overline{CA}$ hasta E tal que :

$$AE = \ell$$

$$\Rightarrow m\sphericalangle EBC = m\sphericalangle EDC = 90^\circ$$

- En ΔBEA y ΔAED notamos:

$$m\sphericalangle BEA = \frac{\alpha}{2} \qquad y$$

$$m\sphericalangle AED = n\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

- Por teorema (pág. 51)

$$\therefore\ \mathbf{b < na}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 208

- Nos piden **x**.
- Se traza:

$\overline{FR} // \overline{CB} \Rightarrow \Delta BMC \cong \Delta FMR$ (LAL)

$\Rightarrow FR = 3$

$\overline{BT} // \overline{EF} \Rightarrow \Delta MBT \cong \Delta MEF$ (ALA)

$\Rightarrow BT = 1$

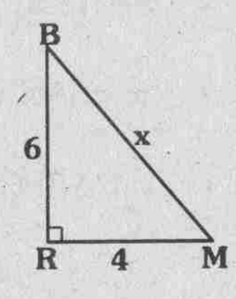
- ⊿RFG: notable de 37°
- ⊿ABT: notable de 53/2
- Se traza $\overline{MR} \perp \overline{AD}$ (R en $\overline{AD}$)
- ⊿MRC: notable de 37°

$\Rightarrow MR = 4a$ y $RC = 3a$

- En ⊿ARM: notable de $\dfrac{53°}{2}$ $\Rightarrow AR = 8a$

$8a = 3a + 5 \Rightarrow a = 1$

- En ⊿BRM:



$\therefore$ $\mathbf{x = 2\sqrt{13}}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 209

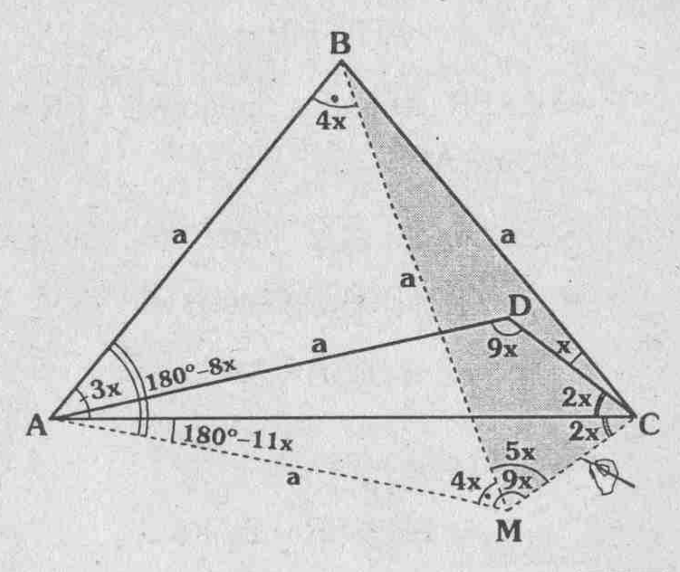
- Nos piden **x**.
- Se traza $\overline{CM}$ tal que $CD = CM$ y

$m\measuredangle ACM = 2x \Rightarrow \Delta ADC \cong \Delta AMC$

- Como:

$m\measuredangle CAM = 180° - 11x$

$\Rightarrow m\measuredangle BAM = 180° - 8x$



- Como: $AB = AM$

  $\Rightarrow m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle AMB = 4x$

- $m\sphericalangle AMC = 9x \quad \Rightarrow m\sphericalangle CMB = 5x$

- ΔMBC : isósceles $\Rightarrow CB = BM = a$

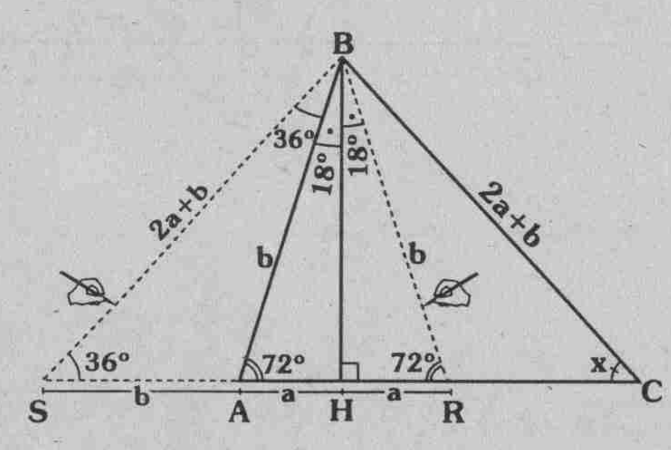
- ΔAMB : equilátero

$$4x = 60°$$

$$\therefore \mathbf{x = 15°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 210



- Piden **x**.
- Se ubica R en $\overline{HC}$ tal que:

$$AH = HR = a$$

  $\Rightarrow \Delta ABR$: isósceles , luego $AB = BR = b$
  y $m\sphericalangle ARB = 72°$

- Se prolonga $\overline{CA}$ hasta "S" tal que: $AS = b \Rightarrow \Delta BSA$: isósceles

  $\Rightarrow m\sphericalangle BSA = 36°$

- ΔSBR : isósceles

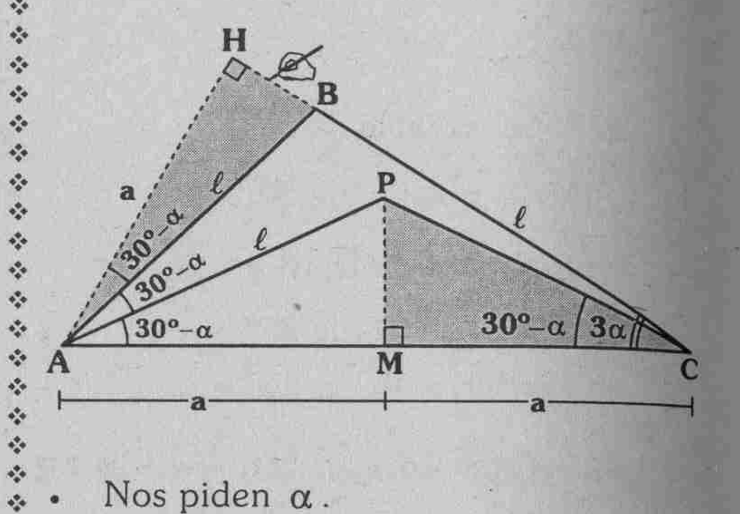
  $\Rightarrow SB = SR = 2a + b$

- ΔSBC : isósceles

$$\therefore \mathbf{x = 36°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 211



- Nos piden α.

- Se traza $\overline{AH} \perp \overleftrightarrow{BC}$ (H en $\overleftrightarrow{BC}$)

- $m\sphericalangle BAH = 30° - \alpha$

- En ΔAPC se traza la altura $\overline{PM}$, M en $\overline{AC}$

  $\Rightarrow AM = MC$

- $⊿ AHB \cong ⊿ CMP$

  $\Rightarrow AH = MC = a$

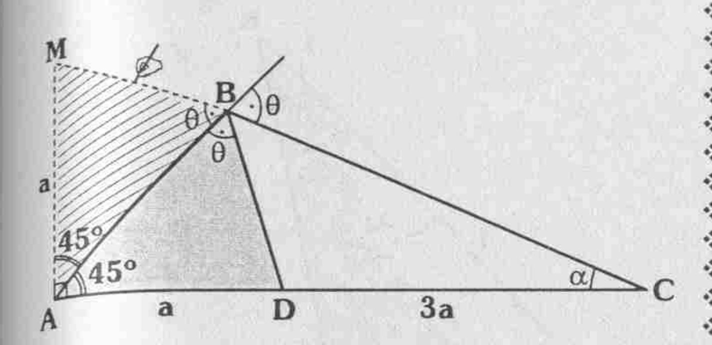
- $⊿ AHC$: notable :

$$3\alpha = 30°$$

$$\therefore \alpha = \mathbf{10°}$$

Clave C

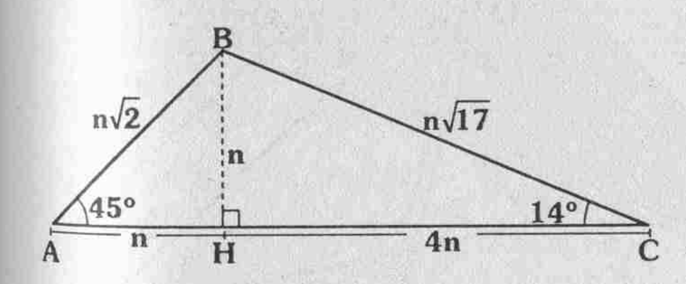
RESOLUCIÓN Nº 212



- Nos piden: $\dfrac{BC}{AB}$
- Aprovechemos el hecho que $\overline{BA}$ es bisectriz exterior del ΔDBC.
- Se traza $\overline{AM}$, tal que: $m\measuredangle BAM = 45°$
- $\Delta MAB \cong \Delta DAB$ (ALA)

$$\Rightarrow AM = AD = a$$

- $\triangle MAC$: $AC = 4(AM) \;\Rightarrow \alpha = 14°$
- Ahora analicemos el ΔABC.



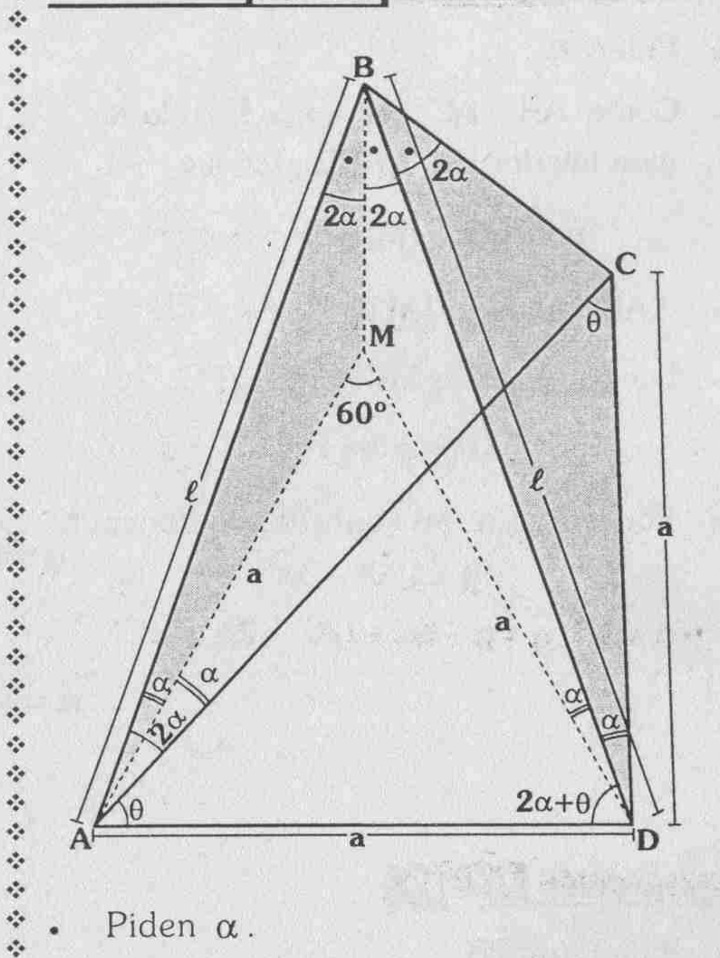
- $\triangle AHB$: notable de 45°
- $\triangle BHC$: notable de 14°

$$\Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{n\sqrt{17}}{n\sqrt{2}}$$

$$\therefore \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{AB}} = \frac{\sqrt{\mathbf{34}}}{\mathbf{2}}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 213



- Piden α.
- En ΔADC: $3\alpha + 3\theta = 180°$

$$\Rightarrow \alpha + \theta = 60°$$

- Se traza $\overline{AM}$ tal que:

$$m\measuredangle BAM = \alpha \quad y \quad AM = a$$

- $\Delta MAB \cong \Delta CDB$ (LAL) $\Rightarrow m\measuredangle ABM = 2\alpha$
- ΔAMD : equilátero
- Como $AB = BD$ y

$AM = MD \Rightarrow m\measuredangle DBM = m\measuredangle ABM = 2\alpha$

- En $\measuredangle ABDM$:

$$\alpha + 4\alpha + \alpha = 60°$$

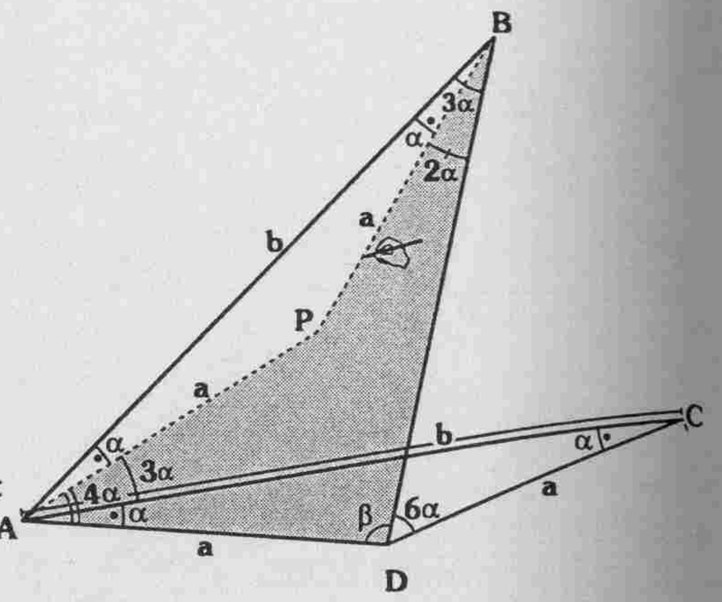
$$\therefore \alpha = \mathbf{10°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 214

- Piden α.
- Como $AB = AC$, se ubica P en la región interior del ΔABD, tal que:

$$m\sphericalangle BAP = m\sphericalangle ABP = \alpha$$



- $\Delta ABP \cong \Delta ACP$ (ALA) $\Rightarrow AP = PB = a$
- Luego tenemos: $AP = AD = PC$ y

$$m\sphericalangle DAP = 2(m\sphericalangle PBD)$$

- Por teorema del cuadrilátero cóncavo:

$$\beta = 120° - 2\alpha$$

- $\Delta ADC : \alpha + \alpha + 6\alpha + 120° - 2\alpha = 180°$

$$\therefore \alpha = 10°$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 215

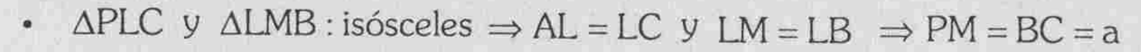
- Piden $m\sphericalangle PBC$
- Se traza $\overline{AN}$ tal que:

  $m\sphericalangle CAN = 20°$ y

  $AN = AB \Rightarrow \Delta ANB$ es equilátero
- ΔNBC : isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle ACN = 30°$
- Prolongamos $\overline{AP}$ hasta M tal que: $AC = AM$

  $\Rightarrow \Delta AMC$ es isósceles

  $\Rightarrow m\sphericalangle AMC = 80°$
- $\Delta BAM \cong \Delta CAN$ (LAL) $\Rightarrow m\sphericalangle AMB = 30°$



- ΔPLC y ΔLMB : isósceles $\Rightarrow AL = LC$ y $LM = LB$ $\Rightarrow PM = BC = a$
- $\Delta PCB \cong \Delta CPM$ (LAL)

$$\therefore \ m\sphericalangle PBC = 80°$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 216

- Piden **x**.
- $\triangle ABE$ y $\triangle ECD$: isósceles
- Al prolongar $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ hasta que se corten en L, tenemos:

  $m\measuredangle ALD+\alpha+\theta=180°$

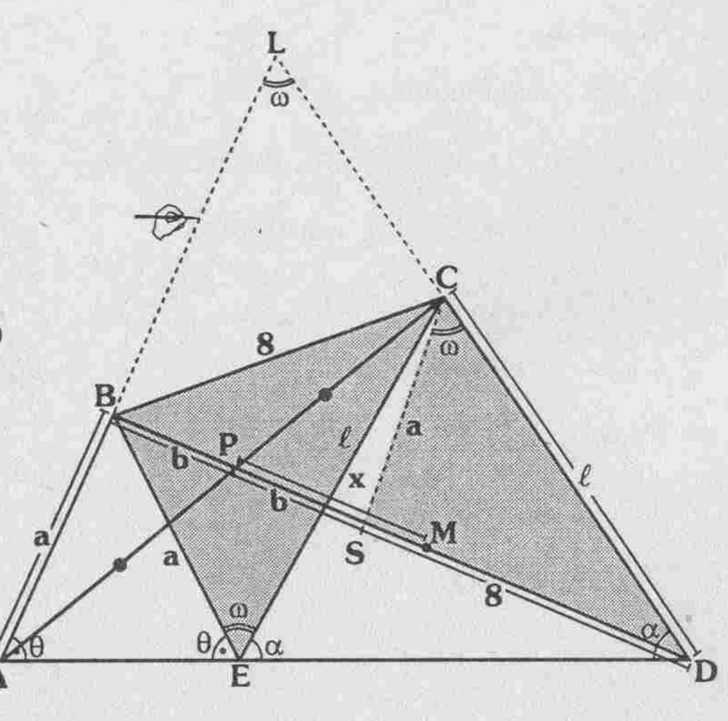
- Como: $\omega+\alpha+\theta=180° \Rightarrow m\measuredangle ALD=\omega$
- Sea:

  $\overline{CS} // \overline{AB} \Rightarrow \triangle ABP \cong \triangle SCP \Rightarrow CS=a$

- $\triangle SCD \cong \triangle BEC$ (LAL) $\Rightarrow SD=BC=8$
- Como M es punto medio de $\overline{BD}$

  $\Rightarrow \; BM=\dfrac{BD}{2}$

  $b+x=4+x$



$\therefore\; \mathbf{x=4}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 217

- Nos piden **x**.
- Prolonguemos $\overline{BA}$ y ubiquemos M, tal que:

  $m\measuredangle AMD=80° \Rightarrow \triangle AMD$ y $\triangle MBD$; isósceles

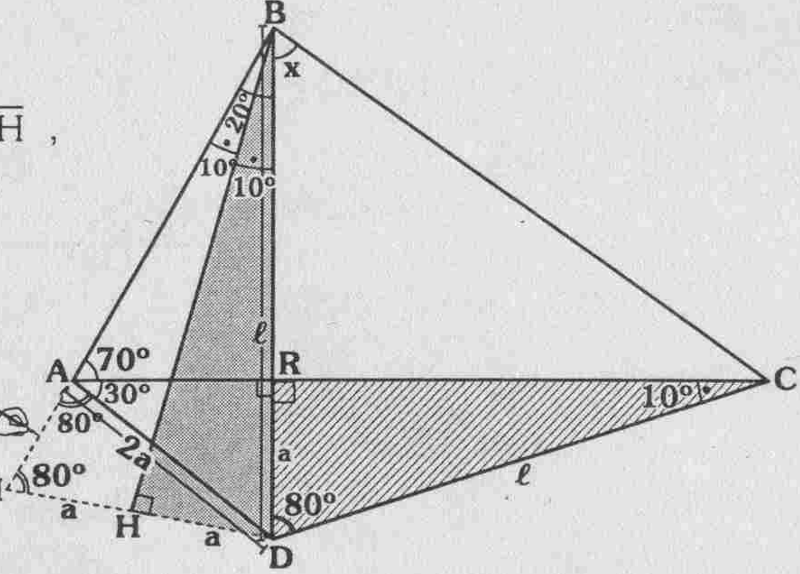
- En el $\triangle MBD$ se traza la altura $\overline{BH}$, como: $MB=BD \Rightarrow MH=HD=a$
- $\triangle AMD$: isósceles $\Rightarrow AD=2a$
- ⊿ARD: notable de 30°

  $\Rightarrow DR=a$

- ⊿ DHB ≅ ⊿ DRC (ALA)

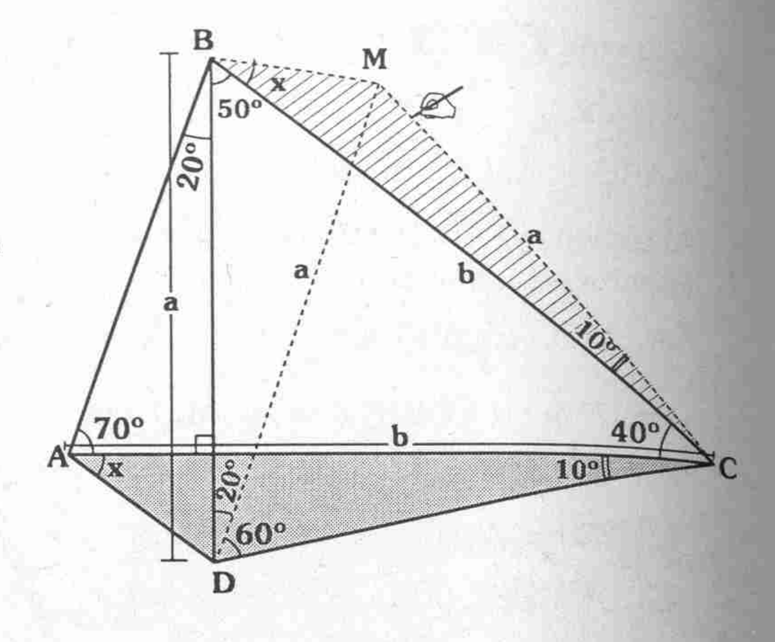
  $\Rightarrow DB=DC$

  $\therefore\; \mathbf{x=50°}$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 218



- Piden **x**.
- ΔDBC : isósceles $\Rightarrow$ $DB = DC = a$
- Tracemos $\overline{CM}$ tal que $m\sphericalangle BCM = a$

  y $CM = a \Rightarrow \Delta DCM$ equilátero
- $\Delta ACD \cong \Delta BCM$ (LAL)

  $\Rightarrow$ $m\sphericalangle MBC = x$
- Como: $DB = DM$

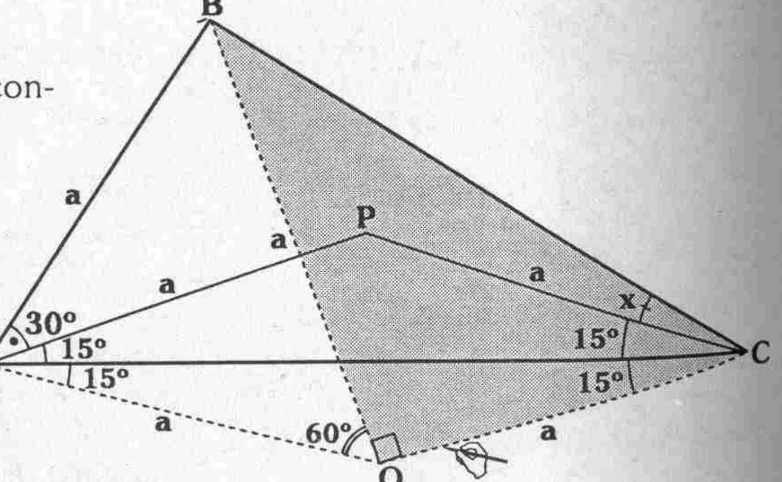
  $\Rightarrow$ ΔDBM : isósceles

  $\Rightarrow$ $x + 50° = 80°$

$\therefore$ **x = 30°**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 219



- Piden **x**.
- Tracemos ΔAQC tal que :

  $\Delta AQC \cong \Delta APC$, producto de la congruencia:

  $AQ = AP = a$ y $m\sphericalangle CAQ = 15°$
- ΔAQB : equilátero
- Como:

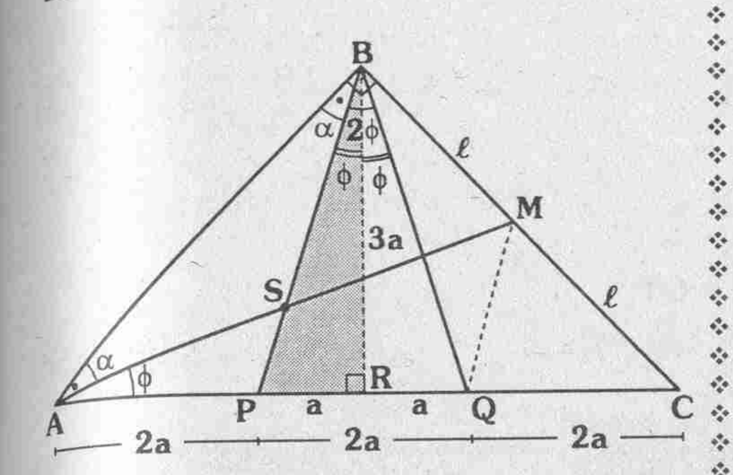
  $BQ = QC$ y $m\sphericalangle BQC = 90°$
- Tenemos:

  $x + 30° = 45°$

$\therefore$ **x = 15°**

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 220



- Piden ϕ
- En ΔPBC: $\overline{MQ}$ es base media

$$\Rightarrow \overline{QM} // \overline{PB}$$

- En ΔAMQ:

$AP = PQ$ y $\overline{PS} // \overline{QM} \Rightarrow \overline{PS}$ es base media $\Rightarrow AS = SM$

- En ⊿ABM: $\overline{BS}$ es mediana

$$\Rightarrow AS = SM = SB$$

- ΔABS:

isósceles $\Rightarrow m\measuredangle BAS = m\measuredangle SBA$

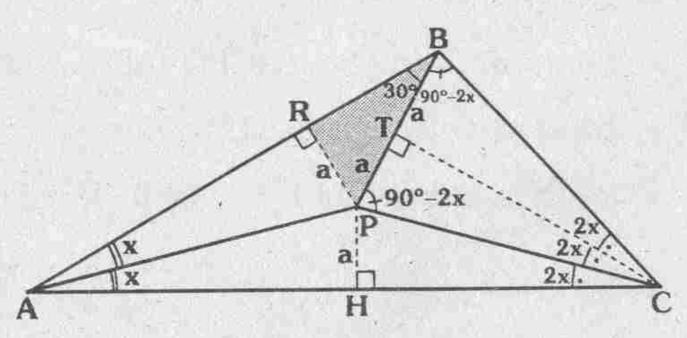
- En ⊿ABC se traza la mediana:

$\overline{BR} \Rightarrow AR = RC = RB = 3a$

- En ΔPBQ: $\overline{BR}$ es mediana y bisectriz, entonces $\overline{BR}$ también es altura.
- ⊿PBR: $\phi = \dfrac{37°}{2}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 221



- Nos piden **x**.
- ΔPCB: isósceles, pues $CP = CB$ entonces al trazar la altura, tenemos:

$PT = TB$ y

$m\measuredangle PCT = m\measuredangle BCT = 2x$

- Por teorema de la bisectriz:

$$PT = PH = PR = a$$

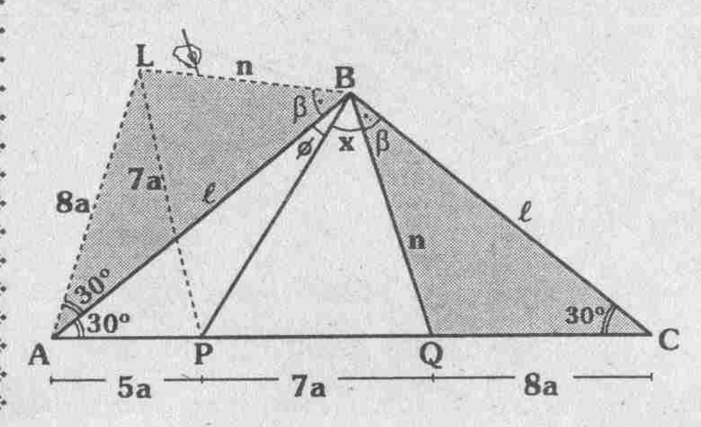
- ⊿PRB: notable de 30°
- En ΔABC:

$$8x + 90° - 2x + 30° = 180°$$

$$\therefore \mathbf{x = 10°}$$

Clave B

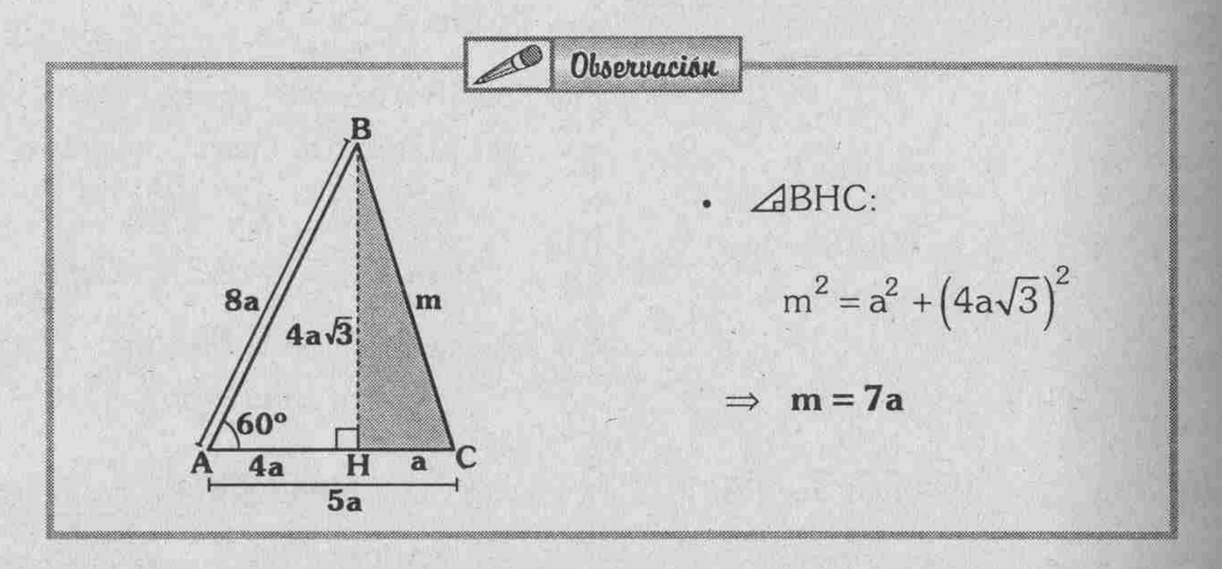
RESOLUCIÓN Nº 222



- Piden **x**.
- Del gráfico: $x+\beta+\phi=120°$
- Se traza: $\Delta ABL \cong \Delta CBQ$ (ALA), asi tenemos: $AL=8a$ y $LB=BQ=n$
- De la obsevación: $LP=7a$
- $\Delta PBL \cong \Delta PBQ$ (LLL) $\Rightarrow$ $x=\beta+\phi$

$$\therefore\ \mathbf{x=60°}$$

Clave C

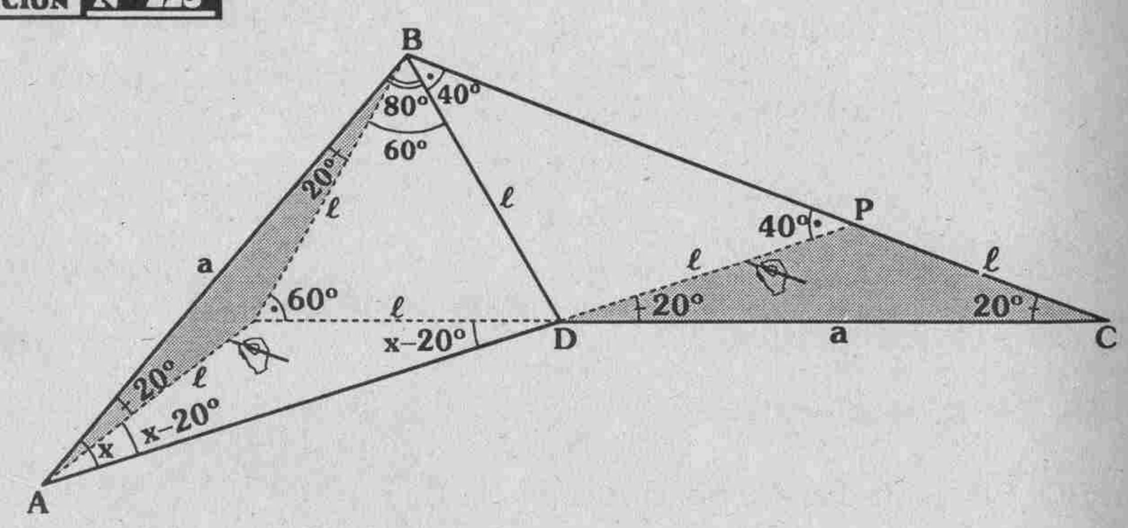


- $\triangle$BHC:

$$m^2=a^2+\left(4a\sqrt{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{m=7a}$$

Resolución Nº 223



- Piden **x**.
- En ΔDBC se nota: $m\sphericalangle DBC=2(m\sphericalangle DCB)$
- Se nos sugiere trazar $\overline{DP}$ tal que: $m\sphericalangle PDC=20° \Rightarrow PC=PD=DB=\ell$
- Se traza el ΔASB, tal que $\Delta ASB \cong \Delta DPC$

- Como $BS = BD$ y $m\sphericalangle SBD = 60°$

  $\Rightarrow \Delta SBD$: equilátero

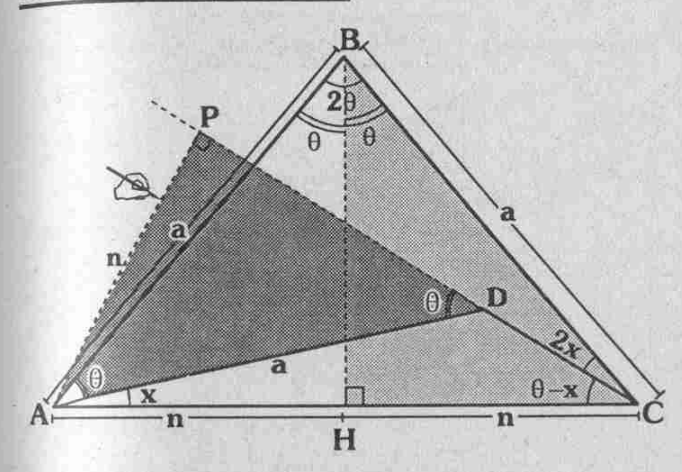
- En ⊿ ABSD :

  $20° + x + x - 20° = 60°$

  $\therefore\ \mathbf{x = 30°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 224



- Piden **x**.
- Dato: $AB = BC = AD$
- Se traza $\overline{AP} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (P en $\overleftrightarrow{CD}$)
- Se traza:

  $\overline{BH} \perp \overline{AC} \Rightarrow AH = HC$ y

  $m\sphericalangle ABH = m\sphericalangle CBH$

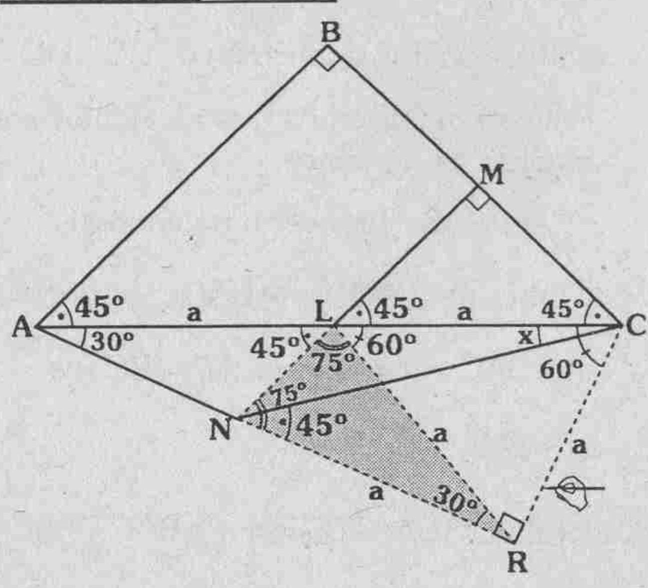
- ⊿ $APD \cong CHB \Rightarrow AP = AH = n$
- ⊿APC: notable de 30°
- Como: $2\theta + x = 90°$ y $\theta - x = 30°$

  $\Rightarrow \theta = 40°$

  $\therefore\ \mathbf{x = 10°}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 225

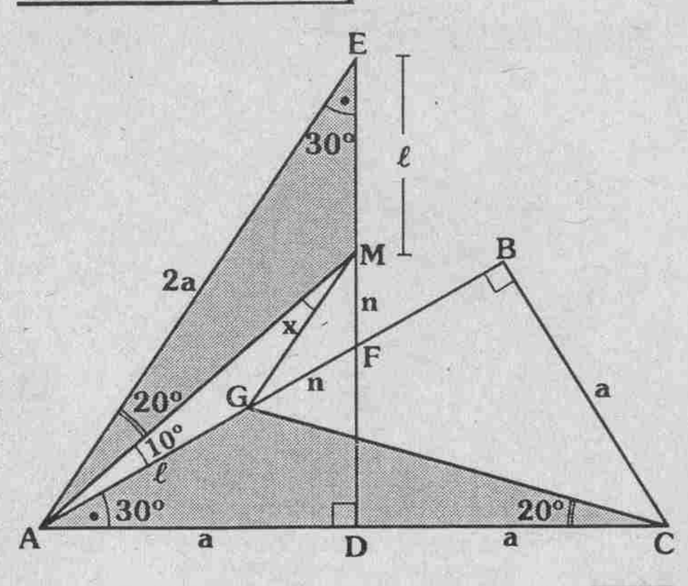


- Piden **x**.
- Como: $BM = MC \Rightarrow AL = LC = a$
- ARC: notable de 30° $\Rightarrow CR = a$
- ⊿LCR: equilátero $\Rightarrow LR = a$
- ⊿NLR: isósceles $\Rightarrow NR = a$
- ⊿NRC: isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle RNC = 45°$
- ΔANC : $x + 30° = 45°$

  $\therefore\ \mathbf{x = 15°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 226



- Piden **x**.
- Dato: $\measuredangle ABC \cong \measuredangle EDA$ y $BC=DC$
- Primero, analicemos que elementos son iguales; asi tenemos:

$AC = AE$ (por ser hipotenusas)

- Como $m\measuredangle EAD \neq m\measuredangle BAC$, entonces:

$m\measuredangle BAC = m\measuredangle AED \Rightarrow AD = BC = a$

$m\measuredangle BCA = m\measuredangle EAD$

- Como: $AC = 2(BC) \Rightarrow m\measuredangle BAC = 30°$
- ΔAEF : isósceles, con $AF = FE$
- $\Delta ACG \cong \Delta EAM$ (ALA)

$\Rightarrow AG = EM$

- ΔGFM : isósceles

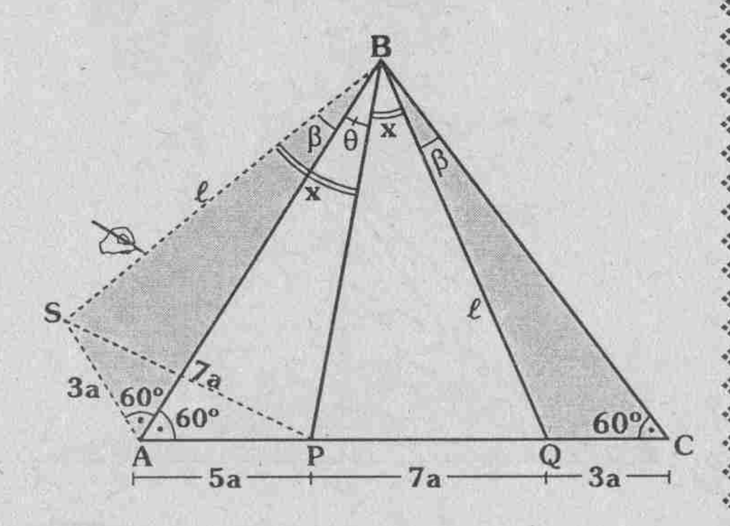
$\Rightarrow m\measuredangle GMF = m\measuredangle FGM = 30°$

- Luego: $\overline{GM} // \overline{AE}$

$\therefore\ \mathbf{x = 20°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 227



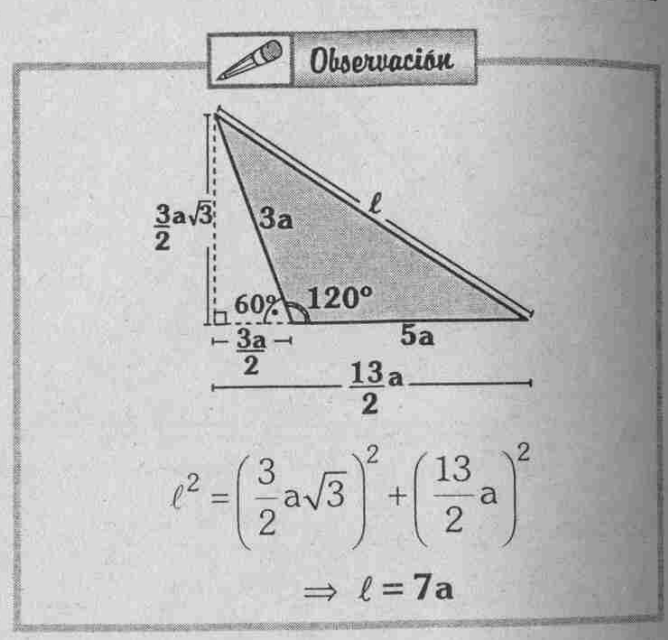
- Piden **x**.

$$\beta + \theta + x = 60°$$

- Construimos ΔABS congruente con el ΔACQ :
- Como $AS = 3a$ y $AP = 5a$, de la observación: $SP = 7a$
- $\Delta PSB \cong \Delta PQB$ (LLL) $\Rightarrow x = \beta + \theta$

$\therefore\ \mathbf{x = 30°}$

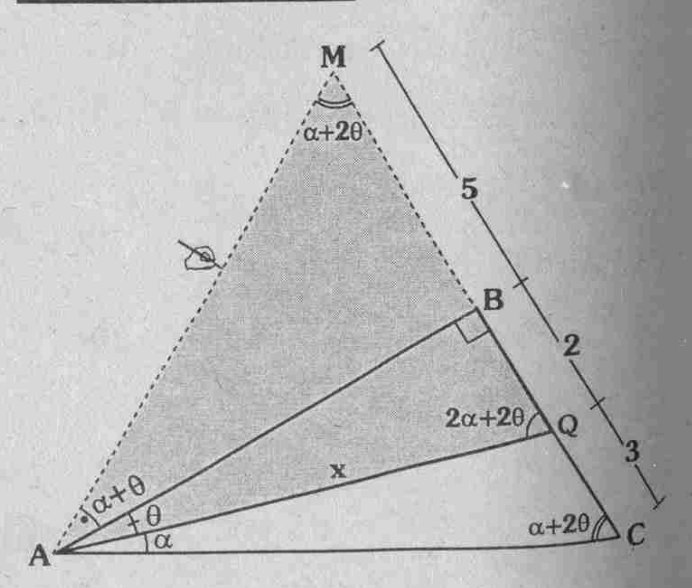
Clave C



$$\ell^2 = \left(\frac{3}{2}a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{13}{2}a\right)^2$$

$$\Rightarrow \ \ell = 7a$$

RESOLUCIÓN Nº 228

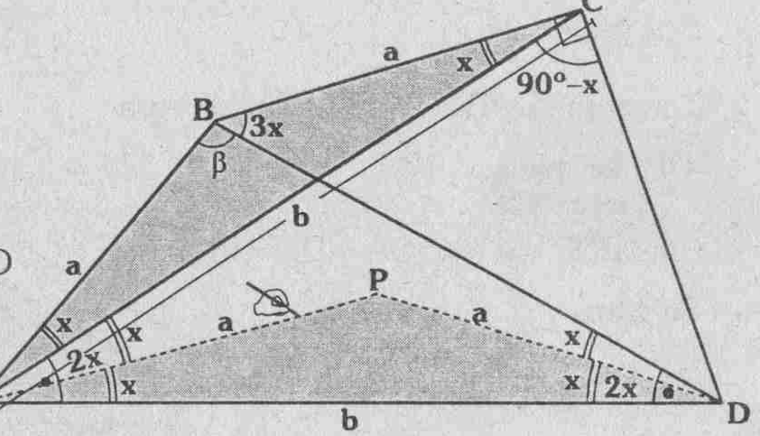


- Piden **x**.
- En $\triangle$ABC: $2\alpha + 3\theta = 90°$
- Prolongamos $\overline{CB}$ y unicamos M tal que: CB = BM
- ΔAMC : isósceles $\Rightarrow$ m∢AMC = $\alpha + 12\theta$
- En $\triangle$ABM: m∢MAB = $\alpha + \theta$
- Como: m∢MAQ = m∢AMQ = $\alpha + 2\theta$
- ΔAMQ : isósceles

$\therefore$ **x = 7**

Clave A

Resolución Nº 229



- Piden **x**.
- Del gráfico: m∢CAD = 2x y

  m∢ACD = 90° – x

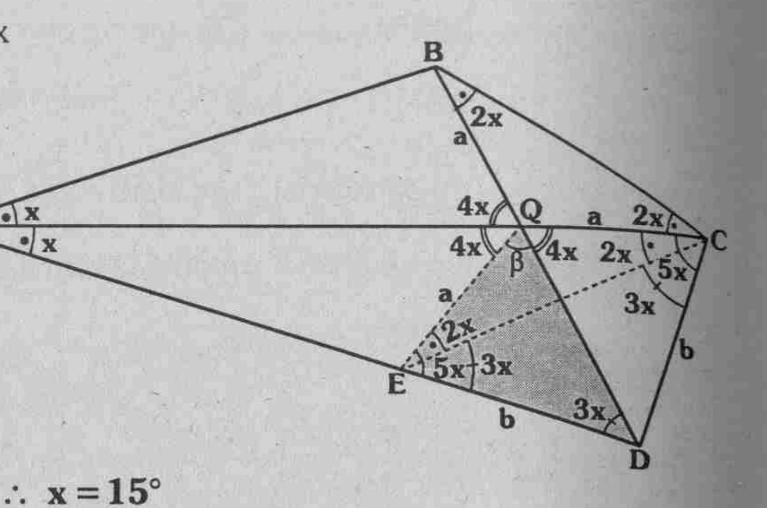
  $\Rightarrow$ ΔACD : isósceles, luego AC = AD
- Como AC = AD , aprovechemos ello para utilizar la congruencia.
- Trazamos $\overline{AP}$ y $\overline{DP}$ tal que: m∢DAP = m∢ADP = x
- ΔACB ≅ ΔADP (ALA) $\Rightarrow$ AP = PD = AB = BC = a
- En ABDP: $\beta = 120° - x$
- En ΔBDP: $3x + 2x + 120° - x = 180°$

$\therefore$ **x = 15°**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 230

- Nos piden **x**.
- Tracemos $\overline{CE}$ tal que: $m\measuredangle ACE = 2x$
- $\Delta ACE \cong \Delta ACB$ (ALA) $\Rightarrow AB = AE$
- $\Delta ABQ \cong \Delta AEQ$ (ALA) $\Rightarrow BQ = QE$
  y $m\measuredangle AQE = 4x$
- ΔBQC y ΔCQE : isósceles
- $\Delta EQD \cong \Delta CQD$ (LLL) $\Rightarrow \beta = 4x$
- En Q: $4x + 4x + 4x = 180°$



$\therefore$ $\mathbf{x = 15°}$

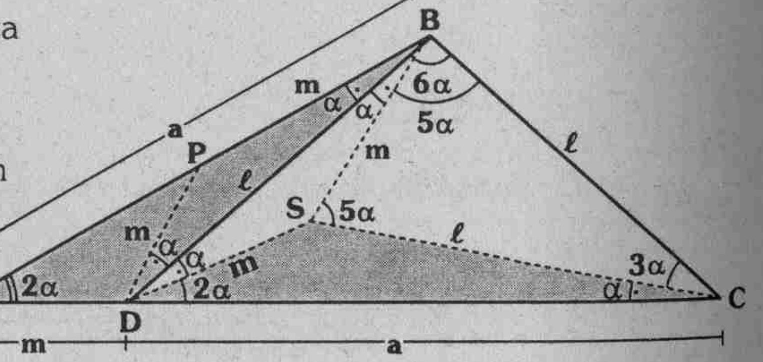
Clave E

RESOLUCIÓN Nº 231

- Nos piden: α
- Como $m\measuredangle DAB = 2(m\measuredangle ABD)$, se traza $\overline{DP}$ tal que:

  $m\measuredangle BDP = \alpha \Rightarrow DA = DP = PB = m$
- Se traza:

  $\Delta DPB \cong \Delta DSB$



- $\Delta BAD \cong \Delta CDS$ (LAL) $\Rightarrow CS = DB$
- Como: $m\measuredangle DBC = 6\alpha$ y $m\measuredangle DBS = x$ $\Rightarrow$ $m\measuredangle SBC = 5\alpha$
- En ∡BDCS: $m\measuredangle BSC = 5\alpha$
- ΔDBC : isósceles $\Rightarrow m\measuredangle BCD = 3\alpha$
- En ΔDBC: $3\alpha + 6\alpha + 3\alpha = 180°$

$\therefore$ $\mathbf{\alpha = 15°}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 232

- Piden β.
- Como $m\measuredangle DBA = 2(m\measuredangle BAD)$, se traza $\overline{DP}$ tal que: $m\measuredangle APD = 3\beta$
- $\triangle APD$ y $\triangle DBP$: isósceles $\Rightarrow AD = DP = 3$ y $DB = BP = \ell$
- Como $DP = DC = a$, en $\triangle DBC$ se traza la altura $\overline{DH}$ $\Rightarrow LP = LC = LD$
- $\triangle DBL \cong \triangle PBL$ (LLL) $\Rightarrow \theta = 3\beta$
- En "D": $6\beta + 3\beta + 3\beta = 180°$

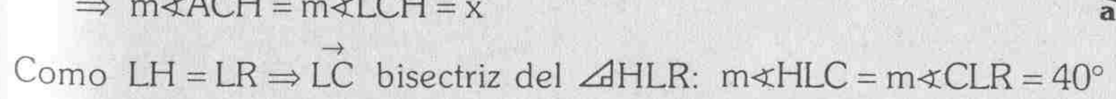
$$\therefore\ \beta = 15°$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 233

- Piden **x**.
- Como $m\measuredangle ADH = m\measuredangle HDL$, se traza $\overline{AL} \perp \overline{CD}$, con H en $\overline{AC}$ y L en $\overline{BD}$.
- $\triangle ADL$: isósceles $\Rightarrow AH = HL = a$
- $\triangle ALB$: isósceles $\Rightarrow AL = LB = 2a$
- $\triangle ACL$: isósceles

  $\Rightarrow m\measuredangle ACH = m\measuredangle LCH = x$

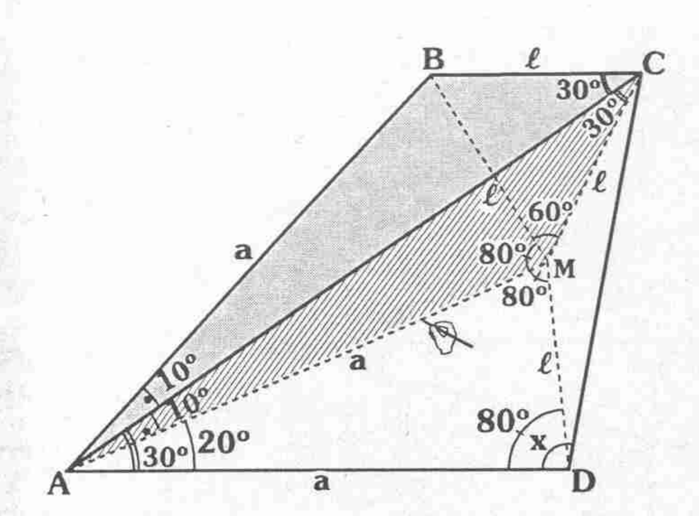


- Como $LH = LR \Rightarrow \overrightarrow{LC}$ bisectriz del ⊿HLR: $m\measuredangle HLC = m\measuredangle CLR = 40°$
- En ⊿HCL: $x + 40° = 90°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 50°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 234



- Piden **x**.
- Ubicamos M tal que:

$$m\measuredangle CAM = 10° \quad y \quad m\measuredangle ACM = 30°$$

$$\Rightarrow \Delta BAC \cong \Delta MAC \text{ (ALA)}$$

- Luego: $CM = BC$ y $AM = AB = \ell$
- ΔBCM : equilátero
- $\Delta BAM \cong \Delta DAM \Rightarrow DM = \ell$
- ΔCMD : isósceles
- Como:

$$m\measuredangle CMD = 140°$$

$$\Rightarrow m\measuredangle MDC = m\measuredangle MCD = 20°$$

- Luego:

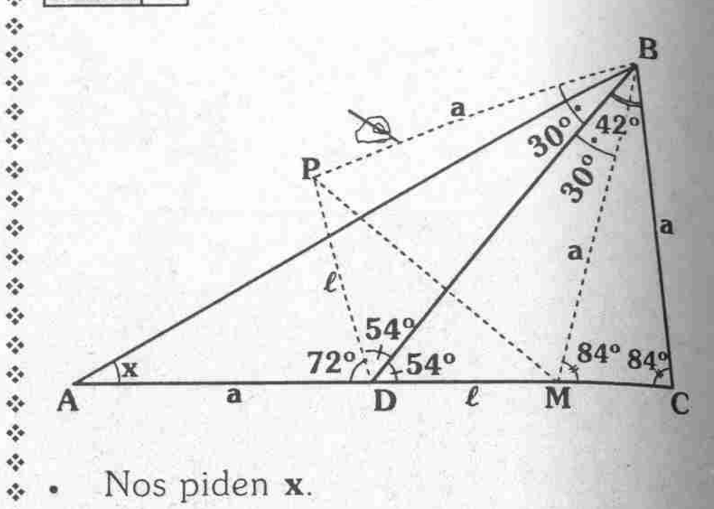
$$x = 80° + 20°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 100°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 235

Paso 1



- Nos piden **x**.
- Se traza $\overline{BM}$ tal que $m\measuredangle BCM = 84°$, entonces:

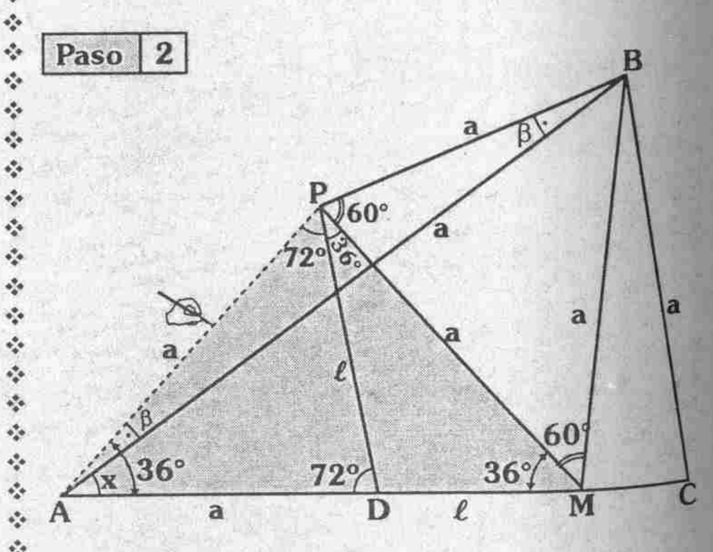
$$BM = BC = a \quad y \quad m\measuredangle MBD = 30°$$

- Se traza $\Delta DMB \cong \Delta DPB$ con:

$$DM = DP = \ell \quad y \quad PB = BM = a$$

- ΔMBP : equilátero

Paso 2



- ΔPDM : isósceles $\Rightarrow m\measuredangle PMA = 36°$
- Como $PM = AD$, $m\measuredangle PMD = 36°$ y $m\measuredangle PDA = 72°$, de la observación:

$$AP = a$$

- ΔAPB : isósceles

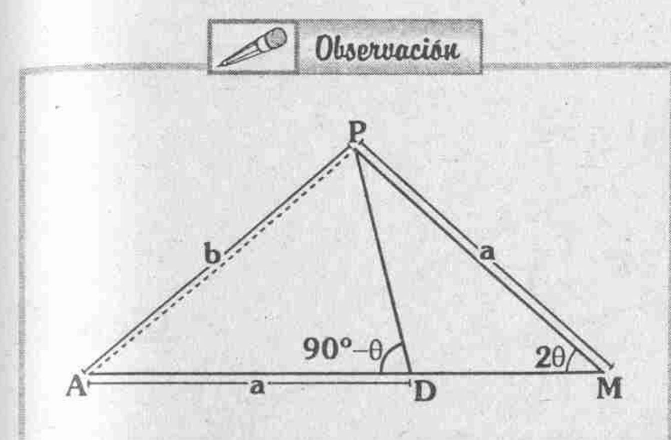
$$2\beta + 168° = 180° \Rightarrow \beta = 6°$$

- Como: $x + \beta = 36°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 30°}$$

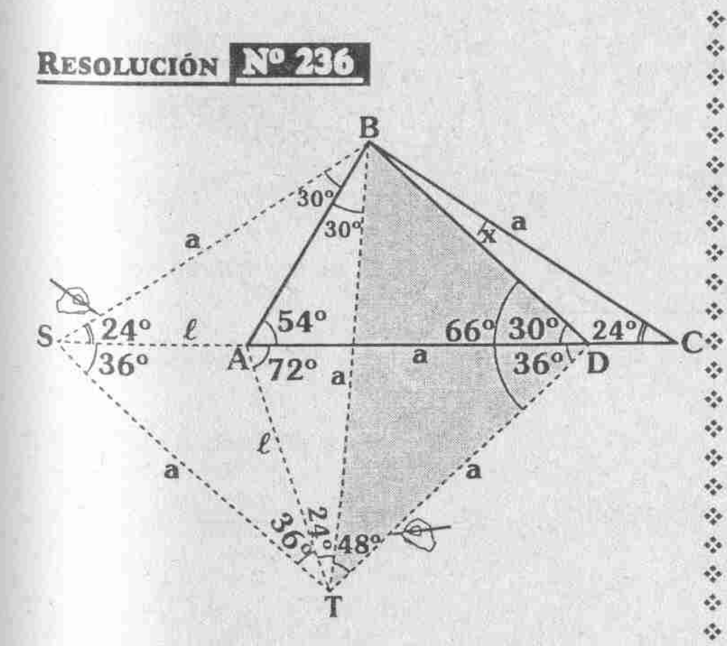
Clave A

Observación



En el problema $\theta = 18°$. *Se cumple* a=b, *(ver pág. 65 y 66)*

RESOLUCIÓN Nº 236



- Nos piden **x**.
- Se prolonga $\overline{CA}$ y se ubica S tal que:

$$m\measuredangle BSA = 24° \Rightarrow SB = BC = a$$

- Se traza $\overline{BT}$ tal que $m\measuredangle ABT = 30°$ y $BT = a$.
- ΔSBT : equilátero
- Como $m\measuredangle TSA = 36°$, $m\measuredangle TAD = 72°$ y $ST = AD = a$, de la observación anterior: $TD = a$
- ΔTDA y ΔBDT : isósceles

$$\Rightarrow m\measuredangle ADT = 36°$$

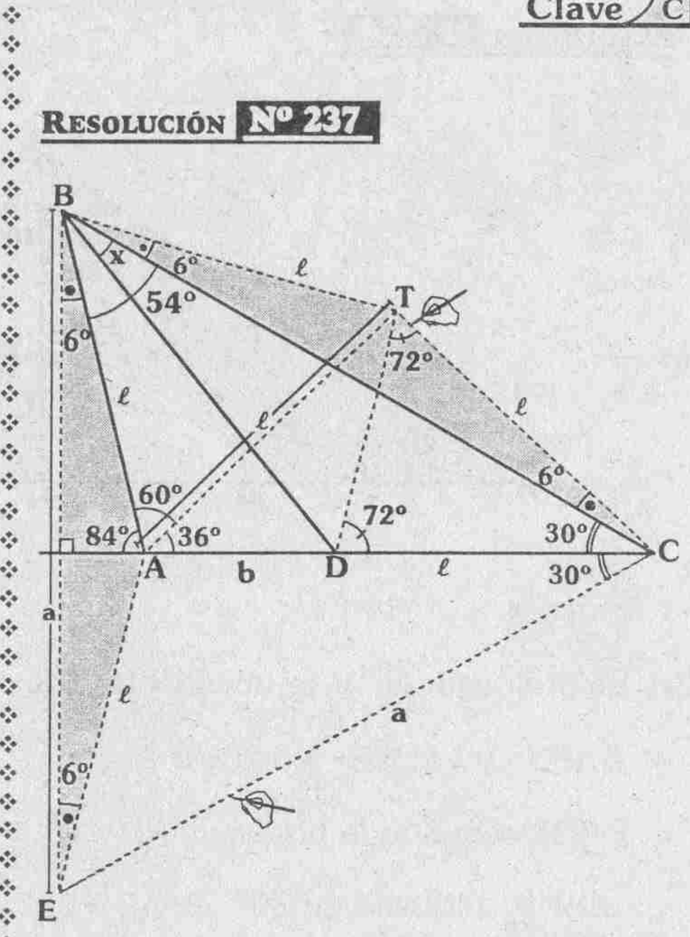
$$\Rightarrow m\measuredangle BTD = 48°$$

- $m\measuredangle TDB = 66° \Rightarrow m\measuredangle BDA = 30°$
- ΔBDC : $x + 24° = 30°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 6°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 237



- Nos piden **x**.

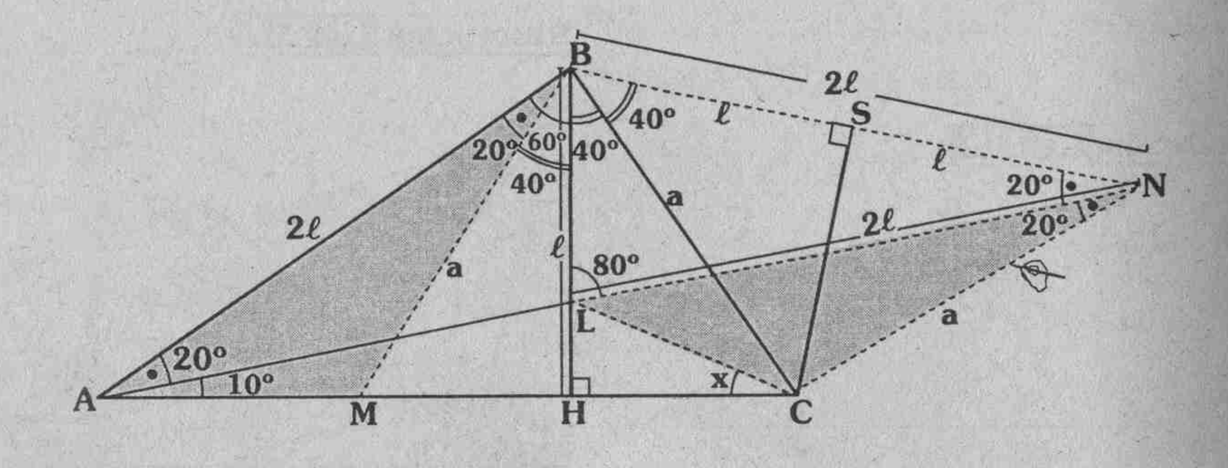
- Se traza $\overline{CE}$ tal que $CE = CB = a$ talque $m\measuredangle ACE = 30°$ $\Rightarrow$ ΔEBC: equilátero
- ΔEAB: isósceles
- Se traza $\Delta CTB \cong \Delta EAB$ $(BT = TC = AB = \ell)$
- ΔDTC: isósceles $\Rightarrow$ $m\measuredangle CDT = m\measuredangle DTC = 72°$
- ΔABT: equilátero $\Rightarrow$ $AT = \ell$
- ΔATD: isósceles $\Rightarrow$ $AD = DT$
- $\Delta ADB \cong \Delta TDB$ (LAL)

  $\Rightarrow$ $m\measuredangle ADB = m\measuredangle BDT = 54°$
- ΔDBC: $x + 30° = 54°$

  $\therefore$ **$x = 24°$**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 238



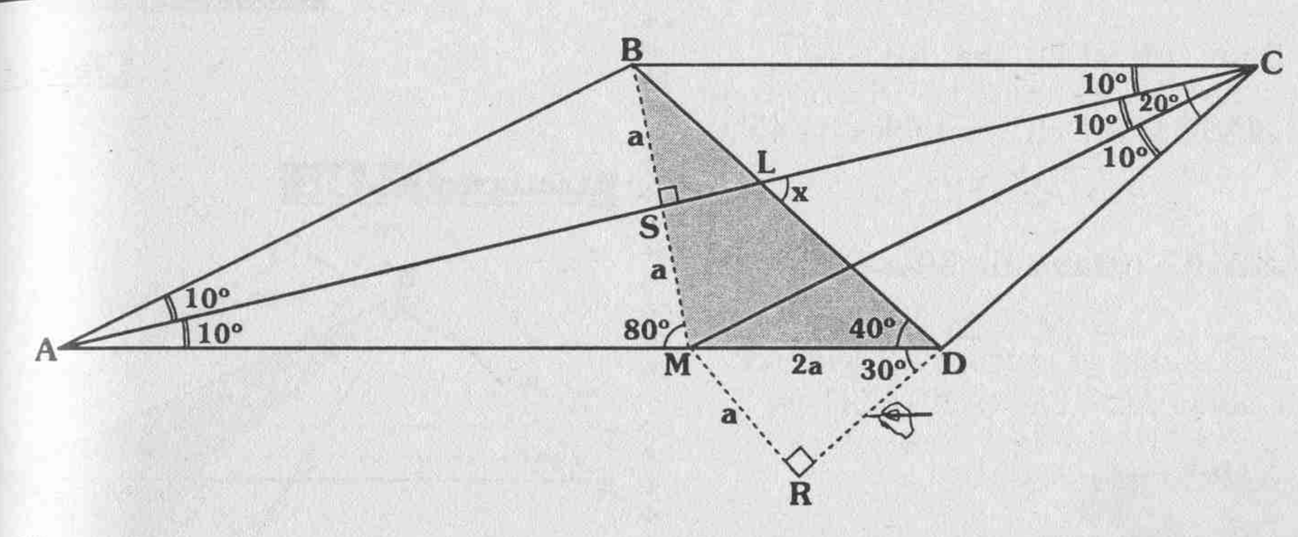
- Piden **x**.
- Se prolonga $\overline{AL}$ y se ubica N tal que $AB = BN$.
- ΔABN y ΔLNB: isósceles
- Por teorema de la bisectriz: $BH = BS = \ell$
- ⊿AHB: notable de 30° $\Rightarrow$ $AB = 2\ell$
- Como $AB = BN = 2\ell$ $\Rightarrow$ ΔBNC: isósceles

- Se traza M en $\overline{AH}$ tal que $m\measuredangle HBM = 40°$ $\Rightarrow$ ΔMBC: isósceles $\Rightarrow$ $MB=BC=a$
- $\Delta ABM \cong \Delta LNC$ (LAL) $\Rightarrow$ $m\measuredangle CLN = 30°$
- ΔALC: $x + 10° = 30°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 20°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 239

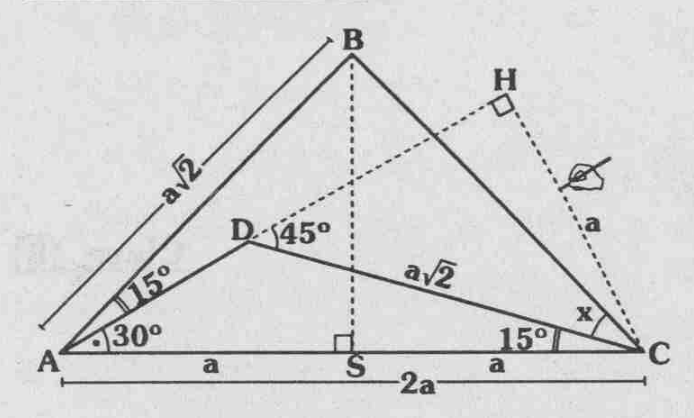


- Nos piden **x**.
- Se traza $\overline{BM} \perp \overline{AC}$ (M en $\overline{AD}$)
- ΔABM y ΔBCM isósceles y congruentes $(BS = SM)$.
- Por teorema de la bisectriz $MS = MR = a$
- ⊿RMD: notable de 30 ° $\Rightarrow$ $MD = 2a$
- ΔBMD: isósceles
- Como: $m\measuredangle BMA = 80°$ $\Rightarrow$ $m\measuredangle BDM = 40°$
- En ΔALD: $x = 40° + 10°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 50°}$$

Clave D

Resolución N° 240



- Nos piden **x**.
- Dato: $AB = CD$, sea $AB = a\sqrt{2}$
- ⊿ASB y ⊿DHC: notables de 45°

  $\Rightarrow AS = HC = a$
- ⊿AHC: notable de 30°

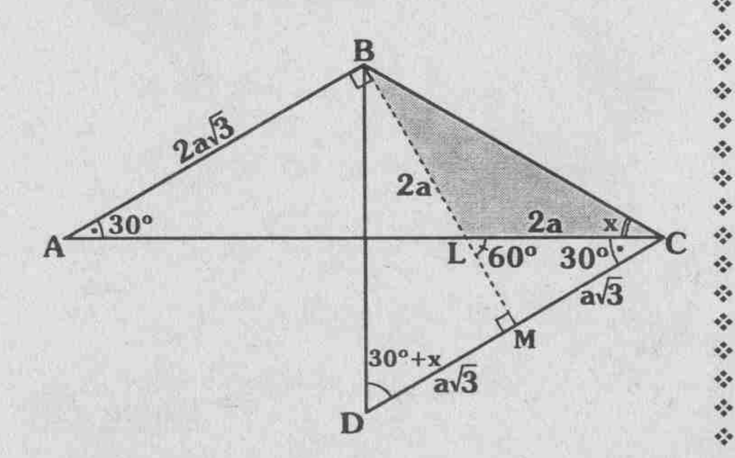
  $\Rightarrow AC = 2a$
- Como: $AC = 2a \Rightarrow AS = SC = a$
- ΔABC : isósceles

  $45° = x + 15°$

  $\therefore \mathbf{x = 30°}$

Clave C

Resolución N° 241



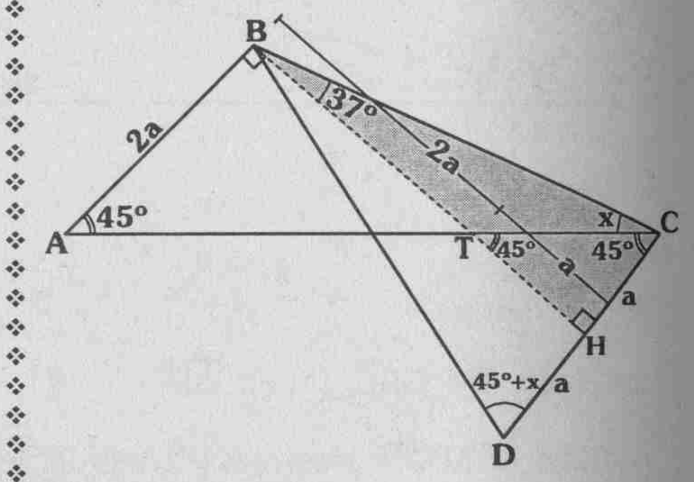
- Nos piden **x**.
- Dato: $AB = CD$, sea $AB = 2a\sqrt{3}$
- Se traza $BM \perp CD$
- ΔDBC : isósceles $\Rightarrow DM = MC$
- ⊿ABL y ⊿LMC: notables de 30°

  $\Rightarrow BL = LC = 2a$
- ΔBLC : isósceles $x + x = 60°$

  $\therefore \mathbf{x = 30°}$

Clave B

Resolución N° 242



- Nos piden **x**.
- Dato: $AB = CD = 2a$
- Se traza $BH \perp CD$
- ΔDBC : isósceles $\Rightarrow DH = HC = a$
- ⊿ABT: notable de 45°

  $\Rightarrow AB = BT = 2a$
- ⊿THC: notable de 45° $\Rightarrow TH = a$
- ⊿BHC: notable de 37°/2

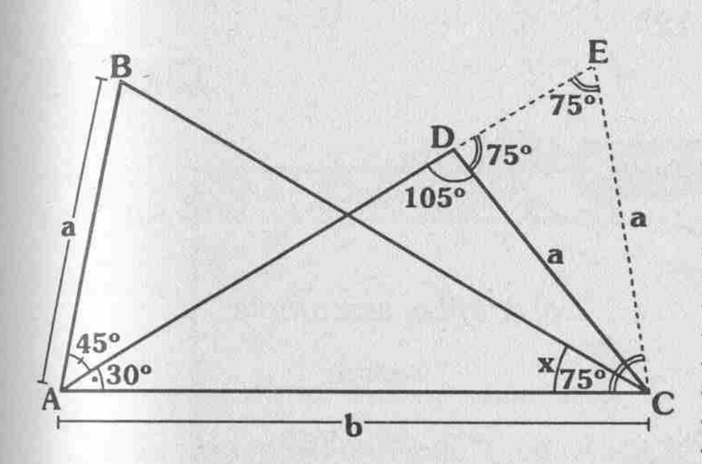
- En:

$$x + \frac{37°}{2} = 45°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \frac{53°}{2} = 26,5°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 243



- Se pide **x**.
- Se prolonga $\overline{AD}$ y se ubica E tal que:

$$m\measuredangle CED = 75°$$

- ΔDEC y ΔAEC : isósceles

$$\Rightarrow\ CD = CE \quad y$$

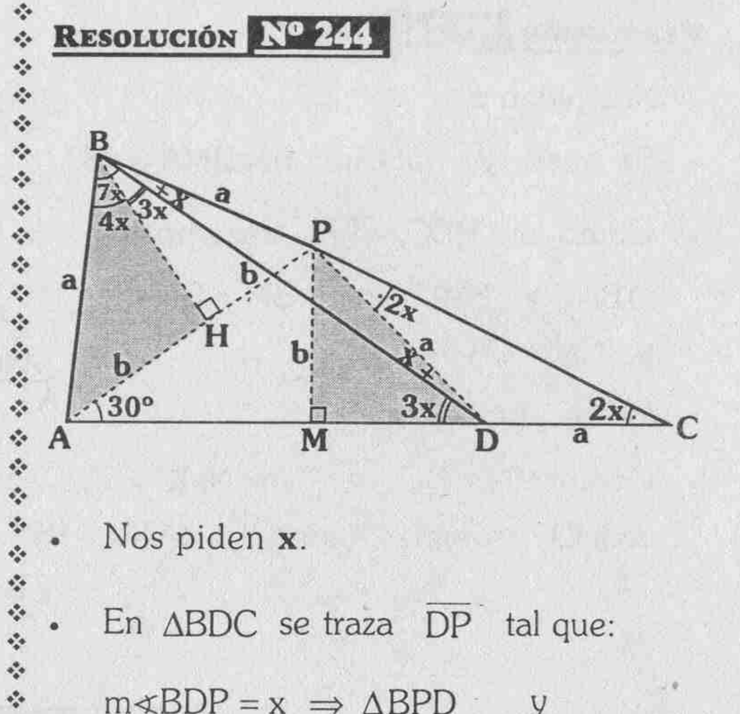
$$AC = AE$$

- $\Delta ABC \cong \Delta ECA$ (LAL)

$$\therefore\ \mathbf{x = 30°}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 244



- Nos piden **x**.
- En ΔBDC se traza $\overline{DP}$ tal que:

$m\measuredangle BDP = x \Rightarrow \Delta BPD$ y

ΔPCD : isósceles $(BP = PD = DC = a)$

- En ΔABP, se traza la altura $\overline{BH}$

$$\Rightarrow\ AH = HP = b$$

- En ΔAPD, se traza la altura $\overline{PM}$
- $⊿ AHB \cong ⊿ PMD$

$$\Rightarrow\ AH = PM$$

- $⊿AMP$: notable de 30°
- En $\measuredangle ADBH$:

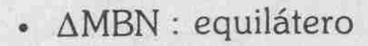
$$3x + 3x + 30° = 90°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 10°}$$

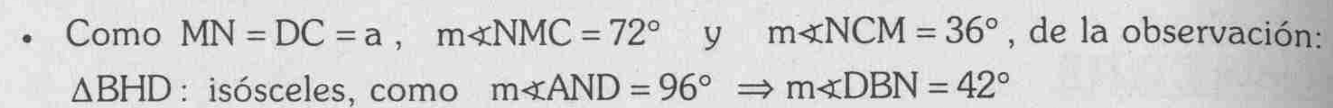
Clave A

RESOLUCIÓN Nº 245

- Nos piden **x**.
- Se traza $\overline{BM}$ tal que: $m\measuredangle BMA = 48°$
- Como $m\measuredangle MBC = 30°$, trazamos $\Delta BNC \cong \Delta BMC$, con $BM = BN$ y $CM = CN$.



- ΔMBN : equilátero

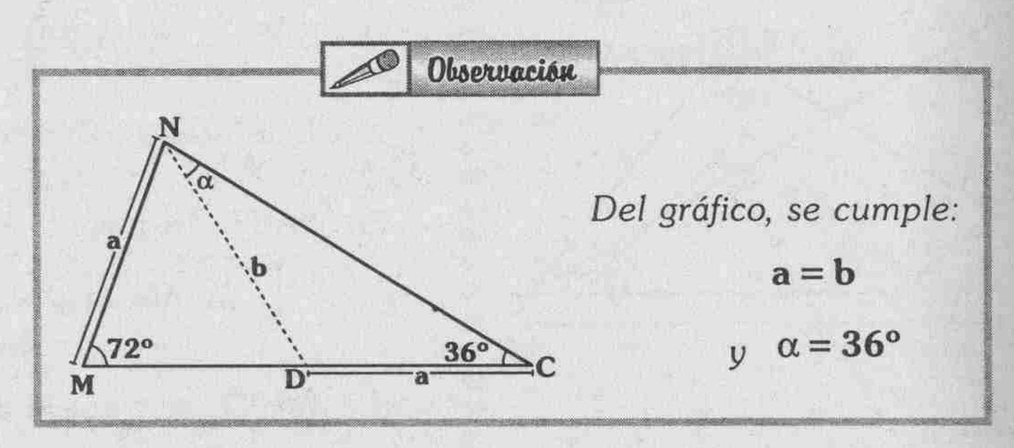


- Como $MN = DC = a$, $m\measuredangle NMC = 72°$ y $m\measuredangle NCM = 36°$, de la observación: ΔBHD : isósceles, como $m\measuredangle AND = 96° \Rightarrow m\measuredangle DBN = 42°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 12°}$$

Clave E

Observación



Del gráfico, se cumple:

$$\mathbf{a = b}$$

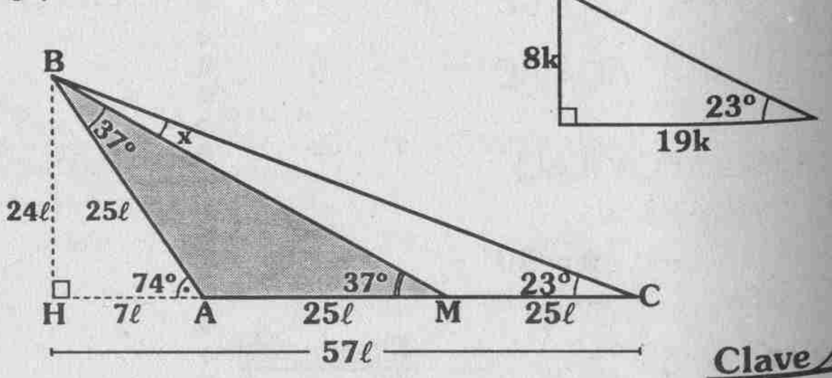
$$y\ \ \alpha = \mathbf{36°}$$

RESOLUCIÓN Nº 246

- El cálculo de "x", dados los valores, es aproximado, hay diversas formas de hallar "x", optemos, por el uso del ⊿ notable de 23°.
- Piden **x**.
- ⊿AHB: notable de 16° y 74°.
- ⊿BHC: como $HB = 24\ell$
  $\Rightarrow HC = 57\ell$
- ΔABM : isósceles

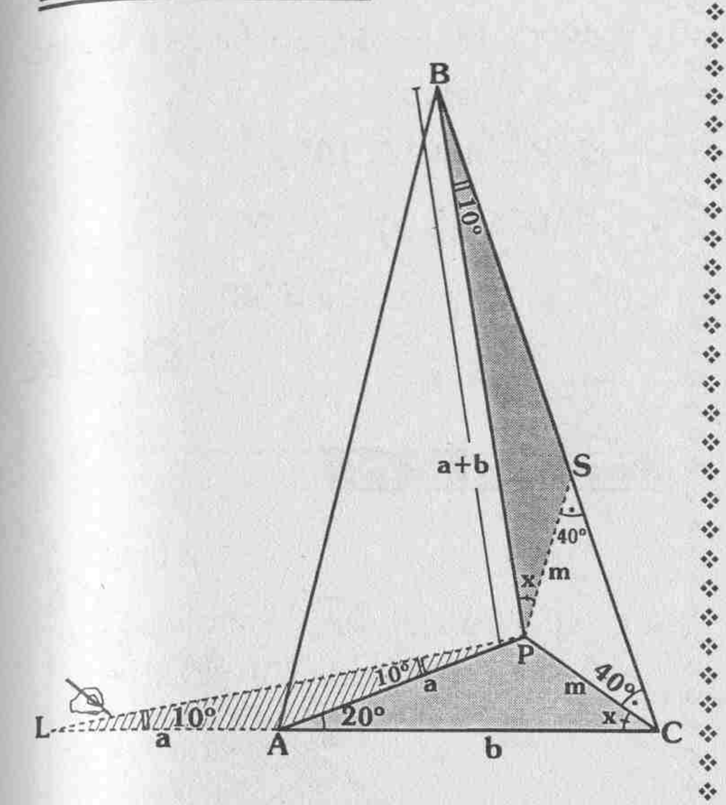
$$x + 23° = 37°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 14°}$$



Clave D

RESOLUCIÓN Nº 247



- Piden **x**.
- En la prolongación de $\overline{CA}$ se ubica el punto L tal que :

$$LA = AP$$

- Trazamos $\overline{PS}$, tal que: $m\sphericalangle BPS = x$
- $\Delta BSP \cong \Delta LPC$ (ALA)

$$\Rightarrow \quad SP = PC$$

$$m\sphericalangle PSC = 40°$$

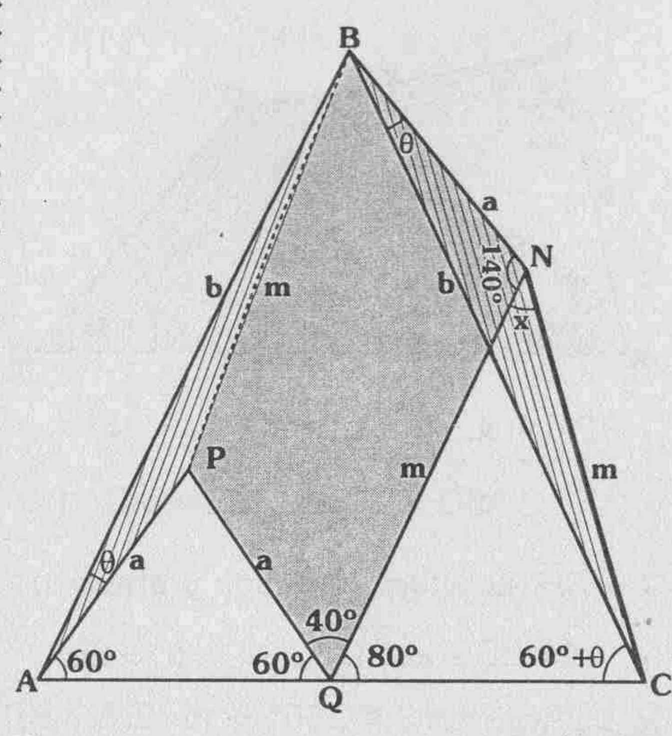
- ΔBSP :

$$x + 10° = 40°$$

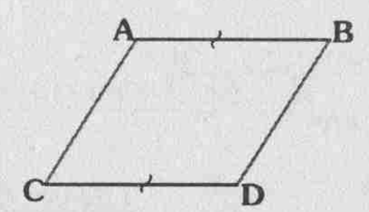
$$\therefore \ \mathbf{x = 30°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 248



Usemos:



Si : $AB=CD$
y $\overline{AB} // \overline{CD}$
$\Rightarrow AC=BD$

- Piden **x**.
- $\Delta ABP \cong \Delta BNC$ (LAL)

$$\Rightarrow BP = NC$$

- Como $BN = PQ$ y

$$m\sphericalangle BNQ + m\sphericalangle PQN = 180°$$

$$(\overline{BN} // \overline{PQ})$$

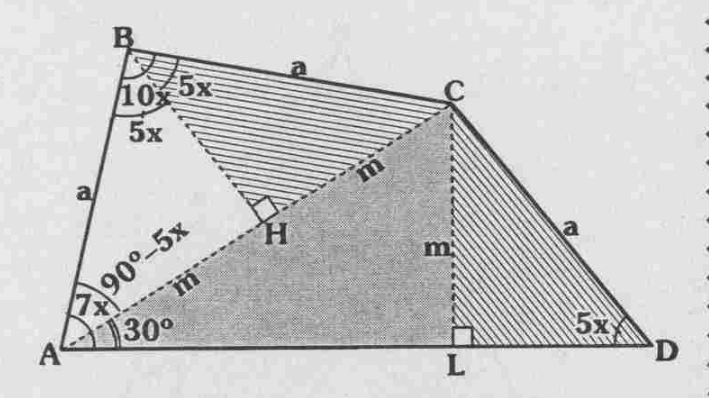
$$\Rightarrow BP=NQ$$

- ΔQNC : isósceles

$$\mathbf{x = 20°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 249



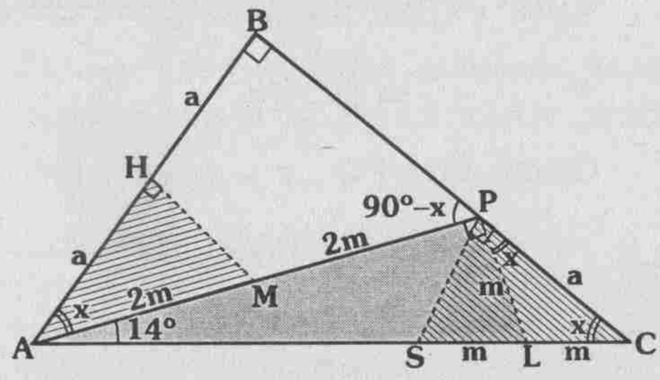
- Piden **x**.
- En ΔABC : isósceles $(AB = BC)$
- ($\overline{BH}$ es altura, mediana y bisectriz)
- $⊿BHC \cong ⊿CLD \Rightarrow HC = CL$
- $⊿ACL$: not 30° y 60° $\Rightarrow m\sphericalangle CAL = 30°$
- Entonces en "A":

$$7x = 90° - 5x + 30°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 10°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 250



- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{MH} \perp \overline{AB}$ tal que $AH = HB$
- Luego se traza $\overline{PS}$ tal que:

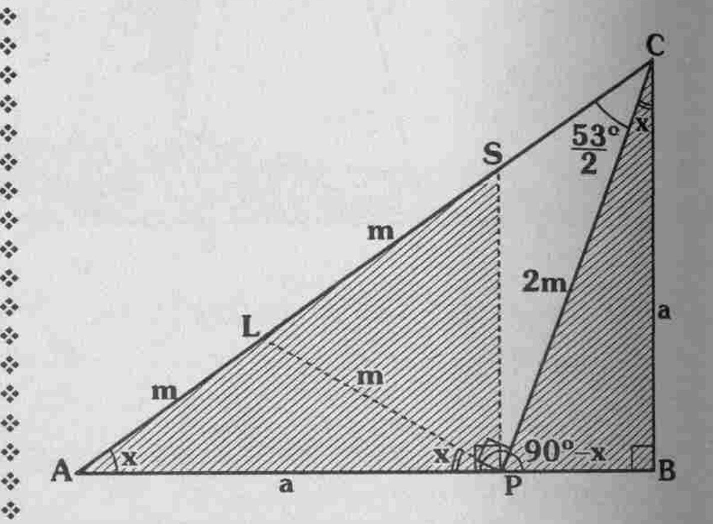
$$m\sphericalangle SPC = 90°$$

- $⊿AHM \cong ⊿SPC \Rightarrow AM = SC$
- $⊿SPC$: $\overline{PL}$ mediana relativa a la hipotenusa.
- $⊿APL$: notable 14° y 76°
- $⊿ABC$: $x + 14° + x = 90°$

$$\therefore\ \mathbf{x = 38°}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 251

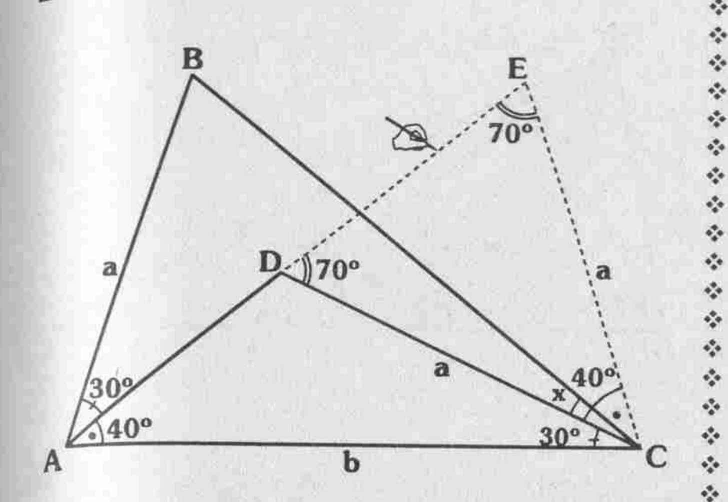


- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{PS}$ tal que: $m\sphericalangle APS = 90°$
- $⊿APS \cong ⊿PBC \Rightarrow AS = PC$
- $⊿ASP$: $\overline{PL}$ mediana relativa a la hipotenusa.
- $⊿LPC$: notable de 53°/2.
- $⊿ABC$: $x + \dfrac{53°}{2} + x = 90°$

$$\therefore\ \mathbf{x = \frac{127°}{4}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 252



- Piden **x**.
- Al prolongar $\overline{AD}$ hasta E tal que $m\measuredangle DEC = 40°$, tenemos:

  ΔDCE y ΔEDC:

  isósceles $\Rightarrow CD = CE = a$

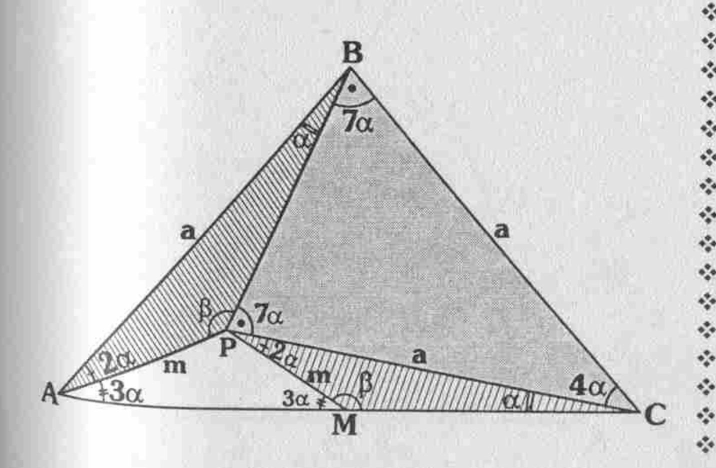
- $\Delta BAC \cong \Delta ECA$ (LAL)

$$\Rightarrow x + 30° = 40°$$

$$\therefore \mathbf{x = 10°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 253



- Piden α.
- Trazamos $\overline{PM}$ tal que:

$$m\measuredangle MPC = 2\alpha$$

$$\Rightarrow m\measuredangle APB = m\measuredangle PMC$$

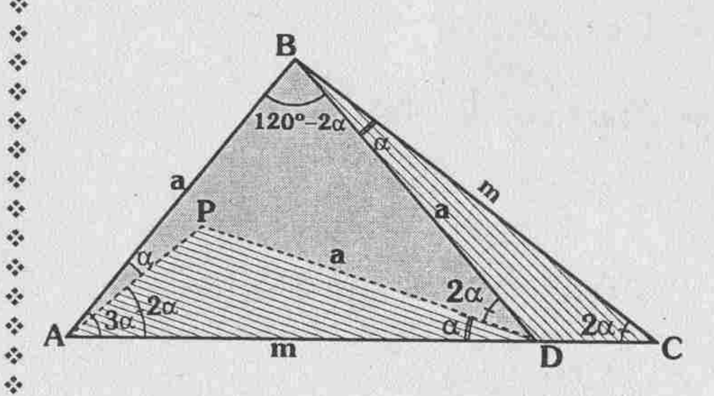
  y ΔAPM: isósceles (AP = PM)

- $\Delta APB \cong \Delta PMC$ (ALA) $\Rightarrow PC = AB$
- ΔPCB: isósceles
- En ∡ABPC: $m\measuredangle BPC = 7\alpha$
- ΔBPC: $7\alpha + 7\alpha + 4\alpha = 180°$

$$\therefore \alpha = \mathbf{10°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 254



- Piden α.
- Se constituye el ΔAPD tal que:

$$m\measuredangle PAD = 2\alpha \quad y$$

$$m\measuredangle PDA = \alpha$$

- $\Delta APD \cong \Delta BDC$ (ALA) $\Rightarrow PD = BD$
- ∡BDPL: se sabe $m\measuredangle ABD = 120° - 2\alpha$

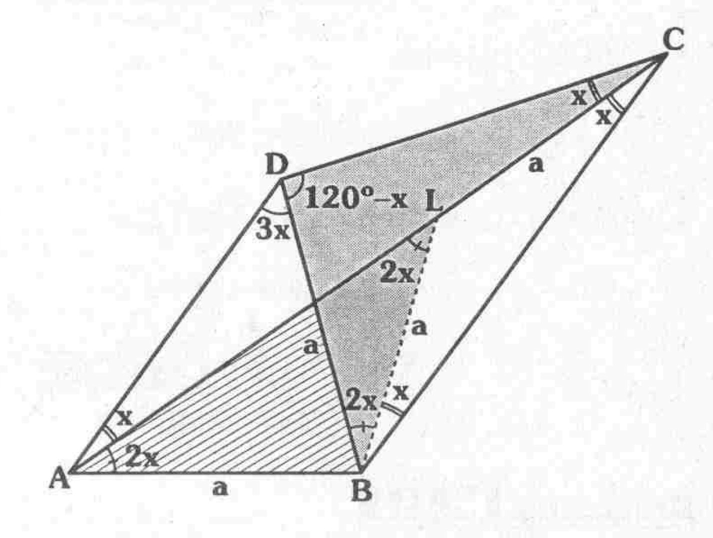
- $\Delta ABC: 3\alpha + 120° - 2\alpha + \alpha + 2\alpha = 180°$

$$\Rightarrow \quad 4\alpha = 60°$$

$$\therefore \quad \alpha = 15°$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 255



- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{BL}$ tal que:

$$m\sphericalangle CBL = x \Rightarrow AB = BL = LC$$

- ΔABD: isósceles $(AB = BD)$
- ABDCL: se sabe:

$$m\sphericalangle BDC = 120° - x$$

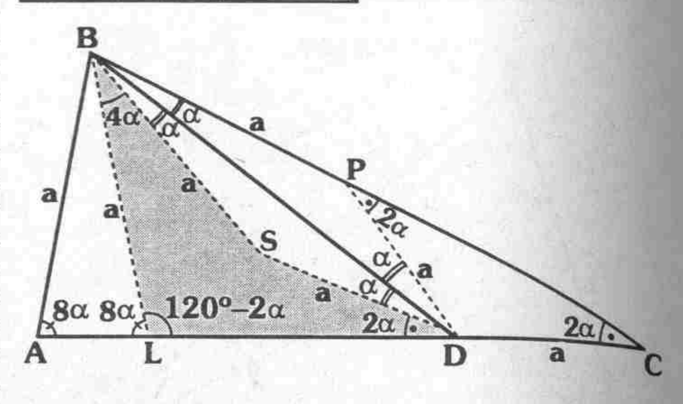
- ΔBDC:

$$3x + 120° - x + 2x = 180°$$

$$\therefore \quad x = 15°$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 256



- Piden α.
- ΔBDC: trazamos $\overline{DP}$ tal que:

$$BP = PD = DC$$

- Se construye $\Delta BSD \cong \Delta BPD$
- ΔABC: trazamos $\overline{BL}$ tal que $AB = BL$
- LBSD: se sabe que :

$$m\sphericalangle BLD = 120° - 2\alpha$$

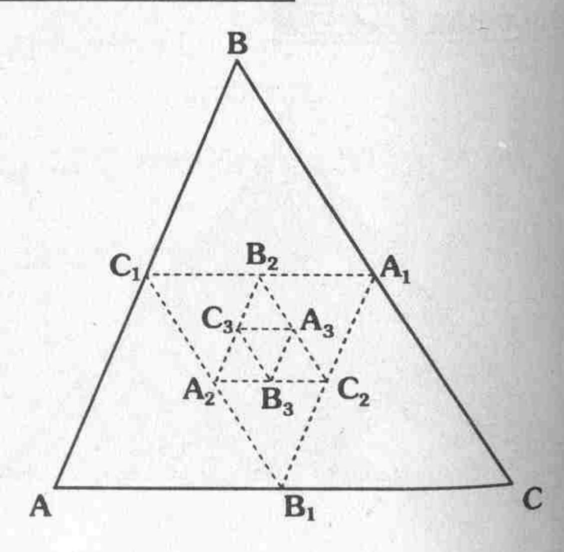
- En el punto "L":

$$8\alpha + 120° - 2\alpha = 180°$$

$$\therefore \quad \alpha = 10°$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 257



- Inicialmente ubicamos A_1, B_1 y C_1 puntos medios de $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente.
- Por base media: $AB=2(A_1B_1)$, $BC=2(B_1C_1)$ y $AC=2(A_1C_1)$
- Sea: $\text{Perím}_{\Delta ABC}=M \Rightarrow \text{Perím}_{\Delta A_1B_1C_1}=\dfrac{M}{2}$ y asi sucesivamente:

$$\text{Perím}_{\Delta A_2B_2C_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{M}{2}\right)=\frac{M}{2^2}$$

$$\text{Perím}_{\Delta A_3B_3C_3}=\frac{1}{2}\left(\frac{M}{2^2}\right)=\frac{M}{2^3}$$

$$\vdots$$

$$\text{Perím}_{\Delta A_nB_nC_n}=\frac{M}{2^n} \quad \Rightarrow \quad N=\frac{M}{2^n} \quad \therefore \ \mathbf{\frac{N}{M}=2^{-n}}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 258

- Nos piden **x**.
- Prolongamos $\overline{AB}$ hasta L tal que:

  $m\sphericalangle CBL=m\sphericalangle BLC=72°+4x$

  $\Rightarrow AC=AL=m$

- Prolonguemos $\overline{CB}$ hasta "S" tal que:

  $CS=CA=m$

- $\Delta CAP \cong \Delta SCL$ (LAL)

  $\Rightarrow m\sphericalangle CSL=5x$

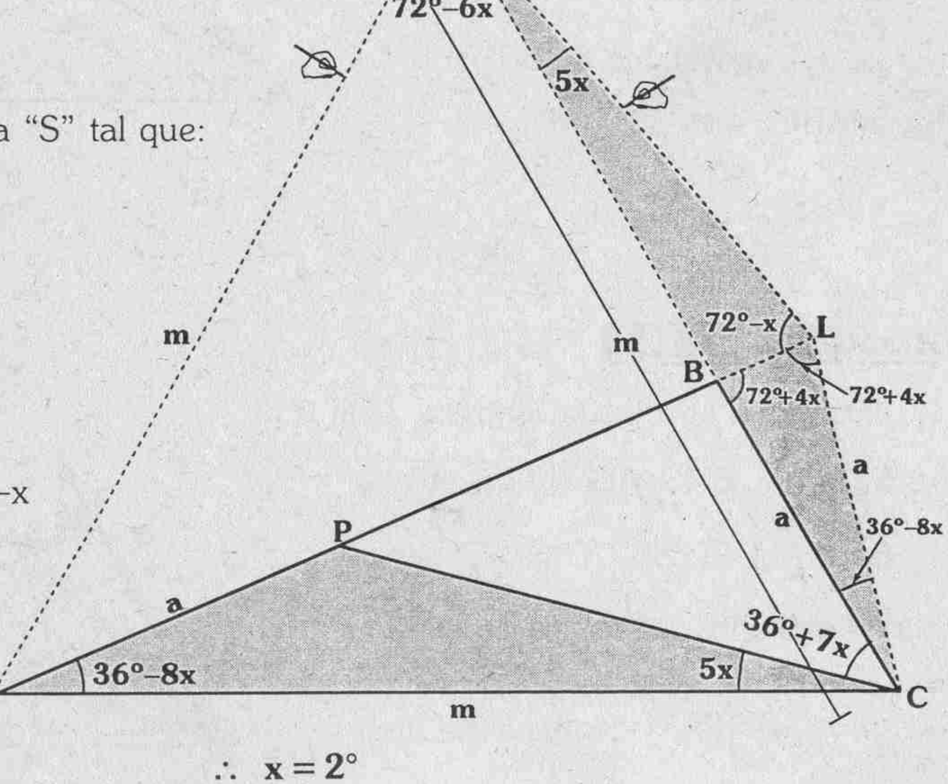
- Como:

  $m\sphericalangle ASL=m\sphericalangle ALS=72°-x$

  $\Rightarrow AL=AS=m$

- ΔASC : equilátero

  $72°-6x=60°$



$\therefore \ \mathbf{x=2°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 259

Paso 1

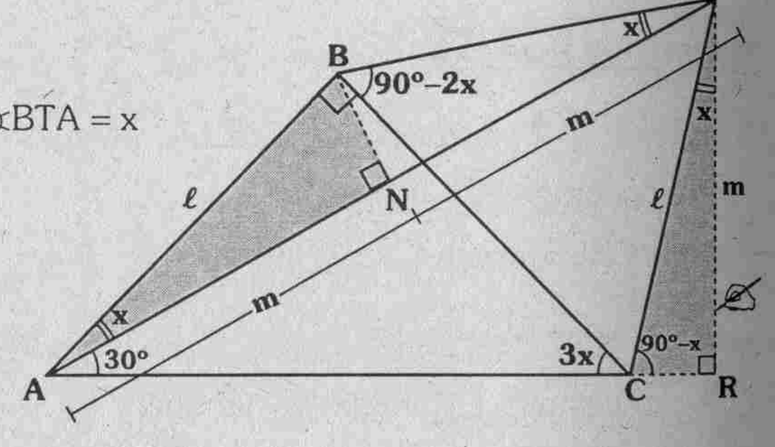
- Nos piden **x**.
- Prolongamos $\overline{AP}$ hasta S tal que: $m\measuredangle PBS = x$
- $\triangle ABS$: isósceles $\Rightarrow AP = PS$
- Se traza: $\overline{SQ} \perp \overline{AB} \Rightarrow SQ = 2(PH) = 2a$
- Se traza: $\overline{MT} \perp \overline{BC}$, donde $BM = MC = 2a$ y $m\measuredangle MTC = 2x$
- $⊿ SQB \cong ⊿ CMT \Rightarrow AB = CT = BT = \ell$

Paso 2

- $\triangle ABT$: isósceles, como:

$m\measuredangle ABT = 180° - 2x \Rightarrow m\measuredangle BAT = m\measuredangle BTA = x$

- Se traza $\overline{TR} \perp \overrightarrow{AC}$
- $⊿ CRT \cong ⊿ BNA \Rightarrow AN = TR$
- $⊿ ART$ es notable de 30°
- $⊿ ABC$: $4x + 30° = 90°$



$\therefore$ **x = 15°**

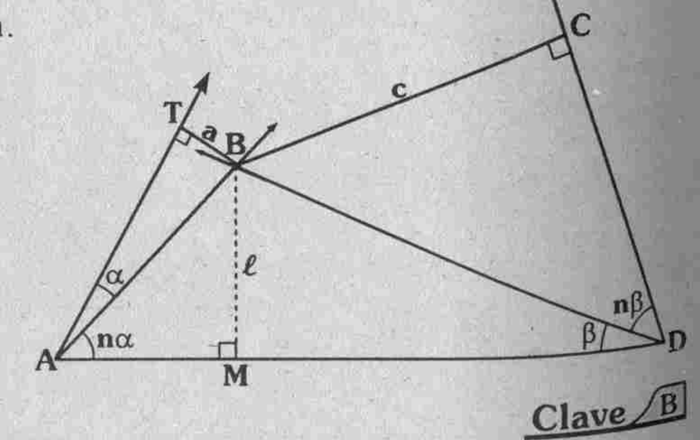
Clave B

RESOLUCIÓN Nº 260

- Nos piden la relación entre a, c, m y n.
- Se traza: $\overline{BM} \perp \overline{AD}$ (M en $\overline{AD}$)
- Sea: $BM = \ell$
- Por teorema: $\cdot\ \ell < na$

  $\cdot\ c < m\ell$

  $\Rightarrow c < mna$



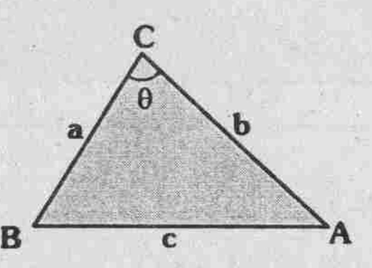
Clave B

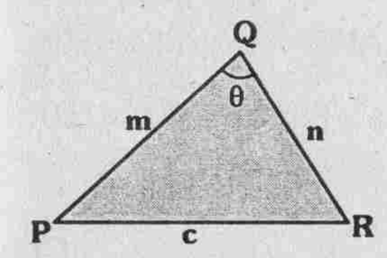
Solucionario

Ciclo Repaso

RESOLUCIÓN Nº 261

I)





- De los datos:

$$a+b=m+n \qquad \text{... (I)}$$

- Por teorema de cosenos:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta \qquad \text{... (II)}$$

$$c^2=m^2+n^2-2mn\cos\theta \qquad \text{... (III)}$$

- De (I), (II) y (III):

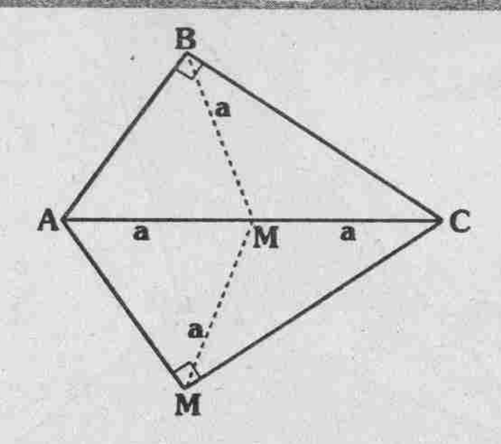
$$(a=n \quad y \quad b=m) \quad ó$$

$$(a=m \quad y \quad b=n)$$

- En cualquier de los dos casos, los triángulos son congruentes.

Verdadero

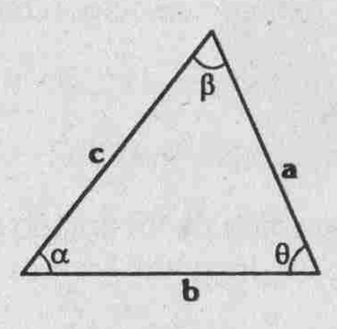
II)

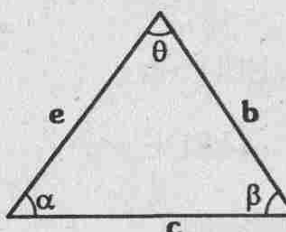


- En el gráfico los triángulos ABC y AMC cumplen la condición, sin embargo $\triangle ABC \not\cong \triangle AMC$.

Falso

III) Sea $a \neq b$, $b \neq c$ y $c \neq a$

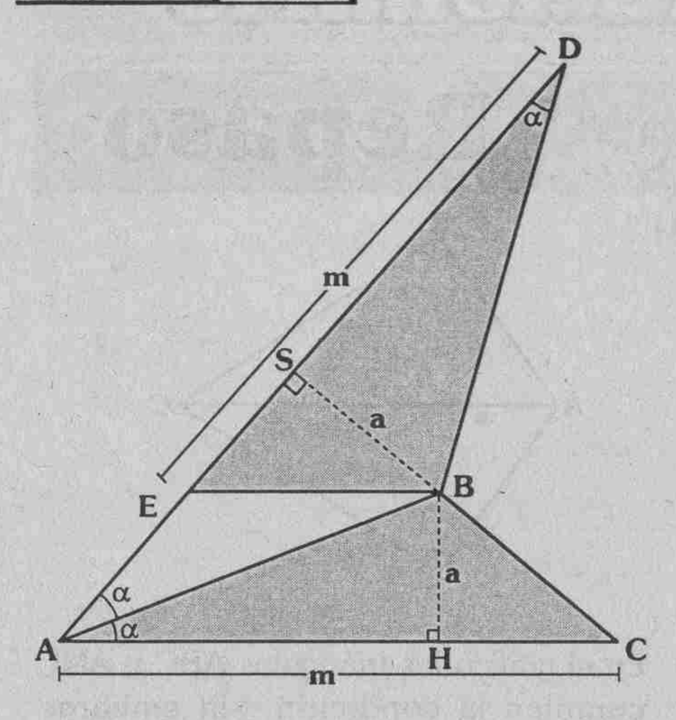




- Los triángulos cumplen la condición (que repiten α, β, θ, b y c), sin embargo no necesariamente son congruentes.

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 262



- Piden $\dfrac{AB}{BD}$
- Como: $\Delta EBD \cong \Delta CBA$ y $ED = AC$

  $BS = BH$ (alturas homólogas congruentes)
- Además se deduce:

  $$m\measuredangle EAB = m\measuredangle BAC$$
- Como la medida de un ángulo adyacente al lado de longitud "m" es α en el ΔABC.
- ΔAEB : $m\measuredangle BED > \alpha$

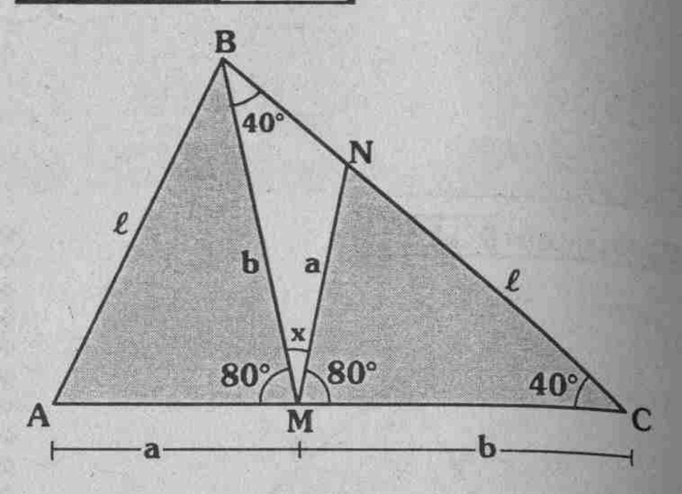
  $$\Rightarrow m\measuredangle BDE = \alpha$$
- ΔABD : isósceles

  $$\Rightarrow AB = BD$$

  $$\therefore \ \mathbf{\frac{AB}{BD} = 1}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 263



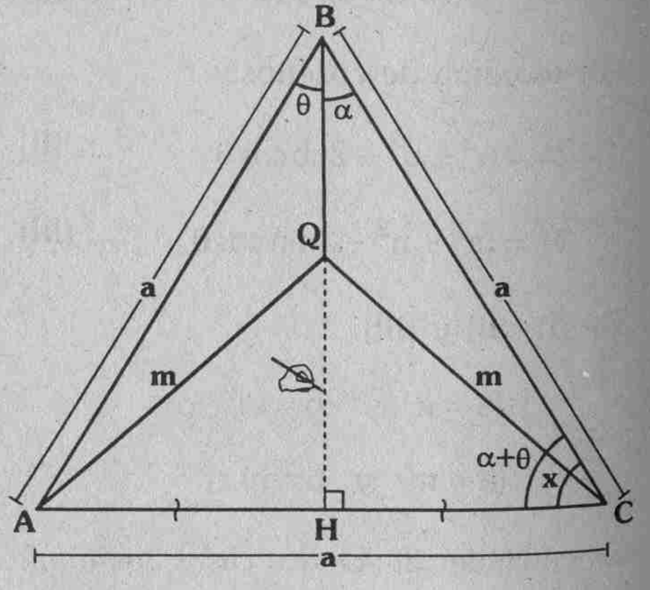
- Piden **x**.
- $\Delta ABM \cong \Delta NCM$ (LLL)

  $\Rightarrow \ m\measuredangle AMB = m\measuredangle NMC = 80°$
- En "M": $80° + x + 80° = 160°$

  $$\therefore \ \mathbf{x = 20°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 264



- Piden **x**.
- Dato: $\theta + 2\alpha = 90°$; $AB = AC$ y $AQ = QC$

- Al prolongar $\overline{BQ}$, como: $\theta + 2\alpha = 90° \Rightarrow \overline{BQ} \perp \overline{AC}$
- Como: $AQ = QC \Rightarrow \overleftrightarrow{QH}$ es mediatriz de $\overline{AC}$ entonces $AB = BC$.
- Como: $AB = AC = BC \Rightarrow \triangle ABC$: equilátero

$$\therefore\ \mathbf{x = 60°}$$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 265

- Piden **x**.
- Por teorema de la bisectriz:

$$BM = BH$$

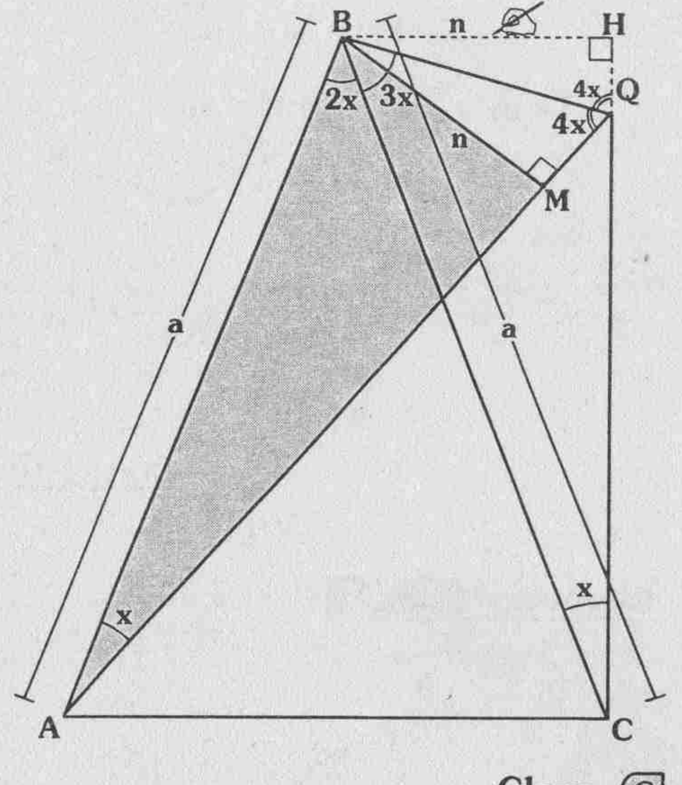
- $⊿ AMB \cong ⊿ BHC$

$$\Rightarrow\ m\measuredangle BCQ = m\measuredangle BAM = x$$

- $\triangle AQB$:

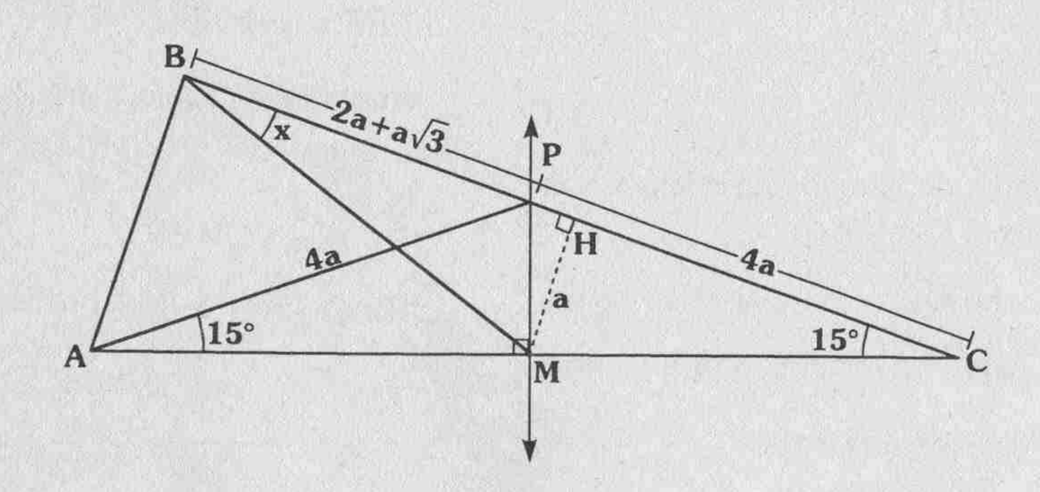
$$x + 5x + 4x = 180°$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 18°}$$



Clave C

RESOLUCIÓN Nº 266

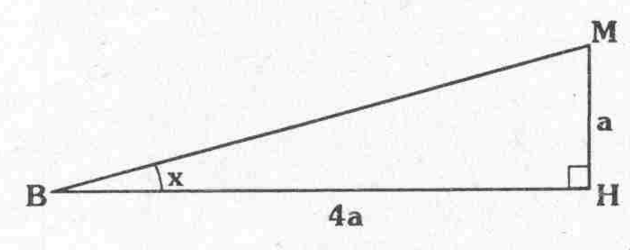


- Nos piden **x**.
- Por teorema de la mediatriz PA = PC
- En ⊿PMC:

  notable de 15° ⇒ PC = 4(MH)
- En ⊿BHC, como:

  $HM = a \Rightarrow HC = 2a + a\sqrt{3}$

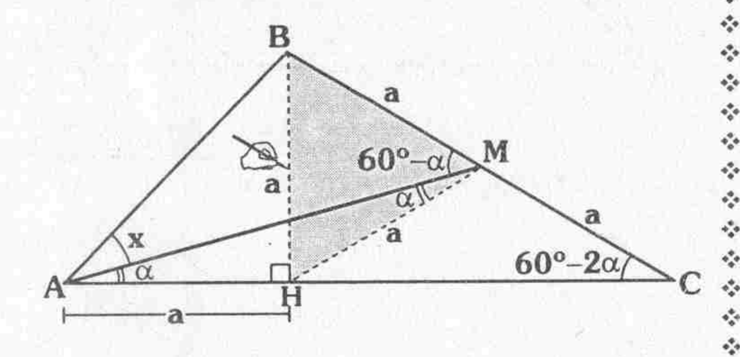
  $\Rightarrow PH = 2a - a\sqrt{3}$
- BH = BP + PH ⇒ BH = 4a



$\therefore$ **x = 14°**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 267



- Piden **x**.
- Por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa: HM = a
- ΔAHM : isósceles ⇒ m∢AMH = α
- Como MB = MH y m∢BMH = 60°

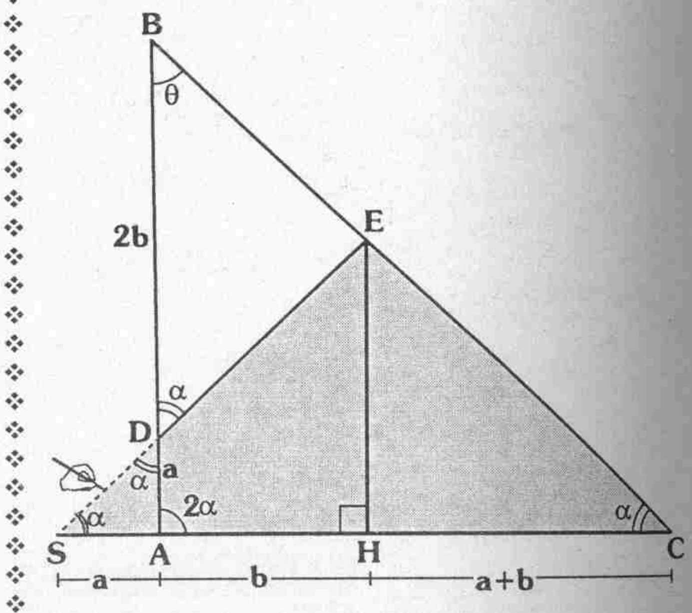
  ⇒ ΔBMH : equilátero
- ⊿BHC: notable de 30°

  ⇒ 60° − 2α = 30° ⇒ α = 15°
- ⊿AHB: isósceles x + α = 45°

$\therefore$ **x = 30°**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 268

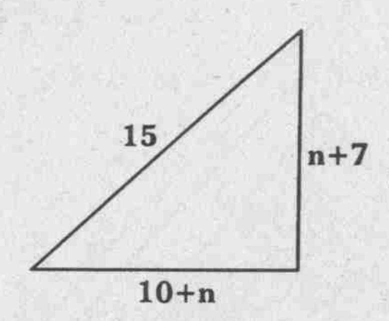


- Piden θ
- Al prolongar $\overline{ED}$ y $\overline{CA}$, se cortan en S.
- Por ángulo exterior, en el ΔASD: m∢DSA = α.
- ΔSEC = isósceles
- Como $\overline{EH}$ es altura, también es mediana, entonces: SH = HC = a + b.
- AB = AC ⇒ α = θ
- ⊿BAC: 2α + α + θ = 180° ⇒ α = 45°

$\therefore$ **θ = 45°**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 269



- Analicemos el triángulo.
- Dato: "n" es menor valor entero y $n \neq \{0\,;1\}$

$10+n>0 \Rightarrow n>-10 \quad \ldots(\alpha)$

$7+n>0 \Rightarrow n>-7 \quad \ldots(\beta)$

$10+n-(n+1)<15<10+n+n+7$

$\Rightarrow \quad 3<\underbrace{15<17+2n}$

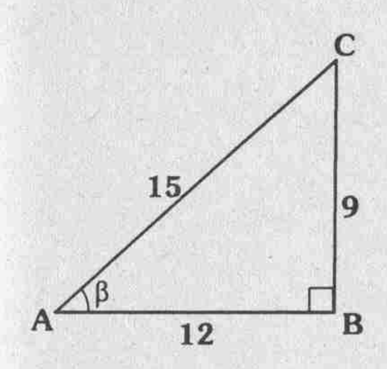
$-1<n \quad \ldots(\theta)$

- De (α), (β), (θ):

$n>-1$

$\Rightarrow n=\{0\,;1\,;2\,;3\,;\ldots\}$

- Como "n" es el menor entero y $n \neq \{0\,;1\} \Rightarrow n=2$
- Luego; el triángulo quedaría asi:

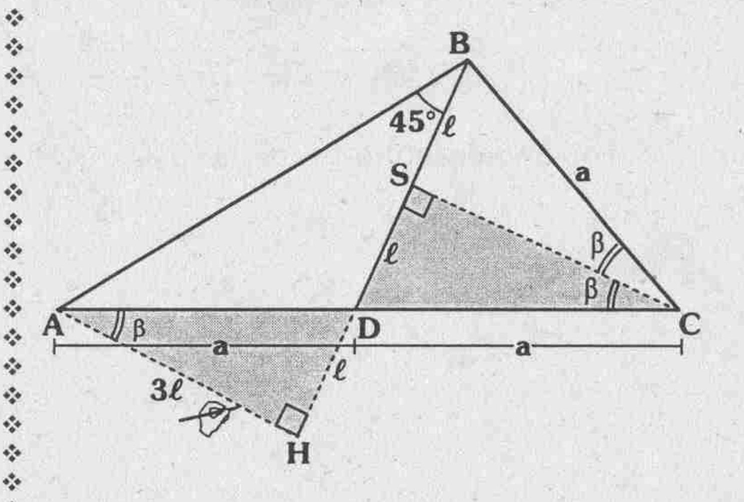


- El triángulo es notable de 37° y 53° nos piden β (menor ángulo).

$\therefore \ \beta = 37°$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 270



- Piden m∢ACB.
- Al prolongar la mediana $\overline{BD}$ y trazar $\overline{AH} \perp \overline{BD}$ y trazar la altura $\overline{CS}$ tenemos:

⊿AHD ≅ ⊿CSD

$\Rightarrow DH = DS = \ell$

- ⊿AHB: notable de 45°

$\Rightarrow HB = AH = 3\ell$

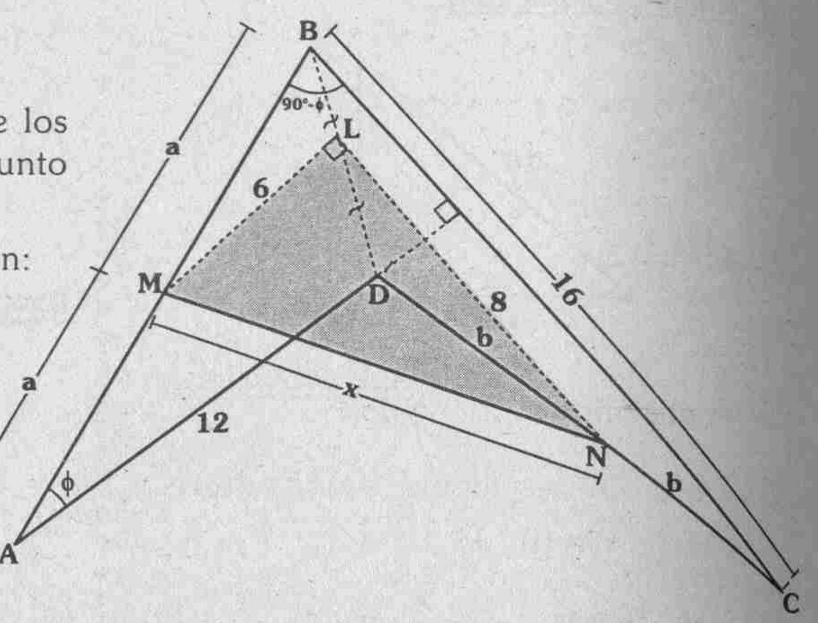
- ⊿AHD: notable

$\Rightarrow \beta = \frac{37°}{2}$

$\therefore$ **m∢ACB = 37°**

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 271



- Piden **x**.
- Para aprovechar la presencia de los puntos medios, ubiquemos L, punto medio de $\overline{BD}$.
- Por teorema de la base media en:

  – $\Delta ADC: ML=6$ y $\overline{ML}//\overline{AD}$

  – $\Delta ABC: LN=8$ y $\overline{LN}//\overline{BD}$
- Por ángulo entre paralelas:

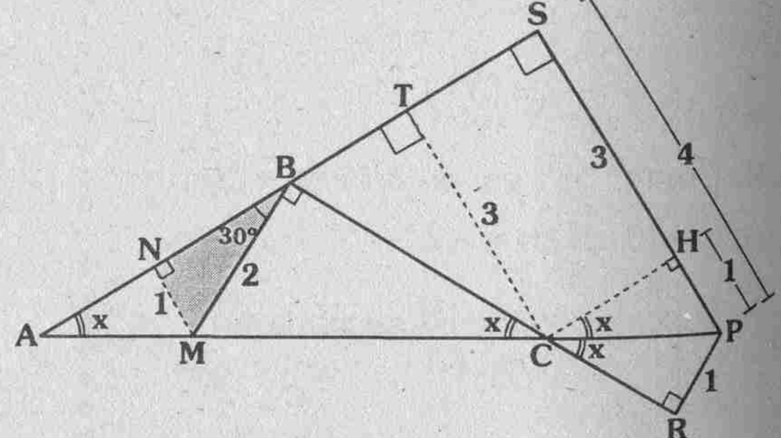
$$m\measuredangle MLN=90°$$

- En ⊿MLN: $x^2=6^2+8^2$

$$\therefore\ \mathbf{x=10}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 272



- Piden **x**.
- Como ΔABC y isósceles, por teorema:

$$CT=MB+MN$$

- Por teorema de la bisectriz:

$$PR=PH=1$$
$$\Rightarrow HS=CT=3$$

- Como: $MB=2$

$$\Rightarrow MN=1$$

- ⊿NBM: notable de 30° $\Rightarrow x+x+120°=180°$

$$\therefore\ \mathbf{x=30°}$$

Clave C

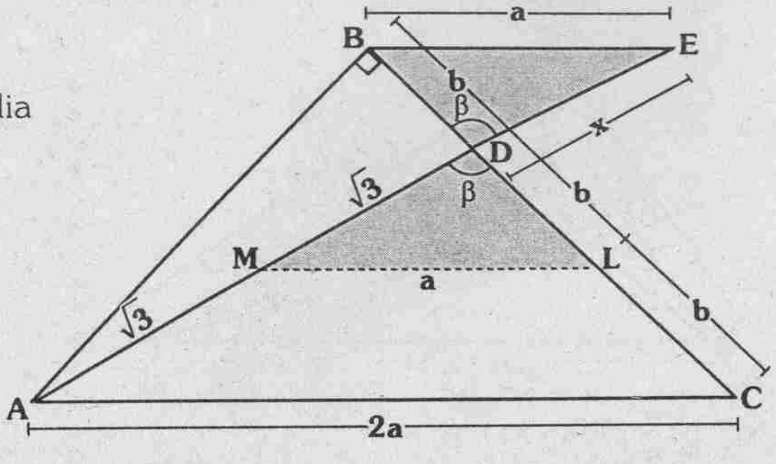
RESOLUCIÓN Nº 273

- Piden **x**.
- En el ΔADC, se traza la base media $\overline{ML}$

$$ML = \frac{AC}{2} = a \quad y \quad \overline{ML} // \overline{AC}$$

- Notemos: $ML = BE$, $BD = DL$, $m\measuredangle MDL = m\measuredangle BDE$ y $a > b$

$\Rightarrow \Delta MLD \cong \Delta EBD$ (4^to^ caso)



$\therefore$ $\mathbf{x = \sqrt{3}}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 274

- Nos piden: θ
- Como:

$AB = BC \Rightarrow m\measuredangle ACB = 45°$

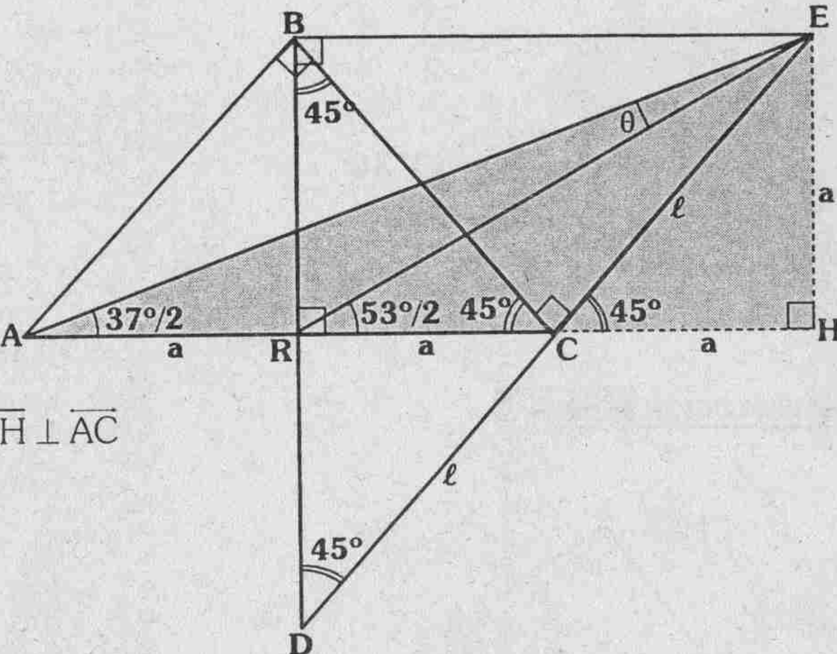
- $DC = CE \Rightarrow DBE$: isósceles

$\Rightarrow m\measuredangle CDB = m\measuredangle DBC = 45°$

- Luego:

$BR \perp AC \Rightarrow DR = RC = a$

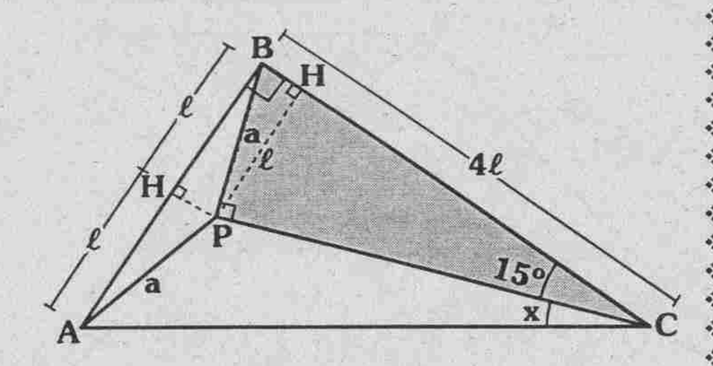
- Se prolonga $\overleftrightarrow{AC}$ y se traza $\overline{EH} \perp \overleftrightarrow{AC}$
- ⊿RHE: notable de 53°/2
- ⊿AHE: notable de 37°/2
- ΔAER: $\theta + \frac{37°}{2} = \frac{53°}{2}$



$\therefore$ $\mathbf{\theta = 8°}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 275



- Nos piden **x**.
- En ⊿BPC, se traza $\overline{PH} \perp \overline{BC}$ por teorema:

$$BC = 4(PH) = 4\ell$$

- ΔABP, es isósceles, entonces al trazar la altura $\overline{PH}$

$$\Rightarrow \quad HA = HB = \ell$$

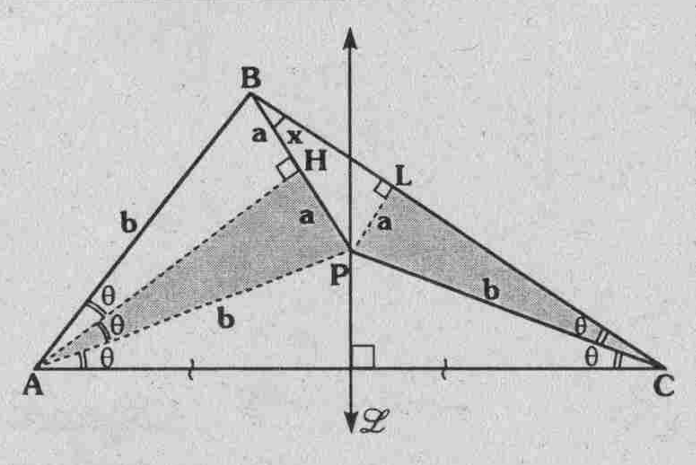
- ⊿ABC: notable:

$$x + 15° = \frac{53°}{2}$$

$$\therefore\ \mathbf{x = \frac{23°}{2} = 11°30'}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 276



- Piden **x**.
- Por teorema de la mediatriz:

$$PA = PC \Rightarrow m\sphericalangle PAC = \theta$$

- Como $AB = PC \Rightarrow \Delta ABP$: isósceles, es este triángulo tracemos la altura:

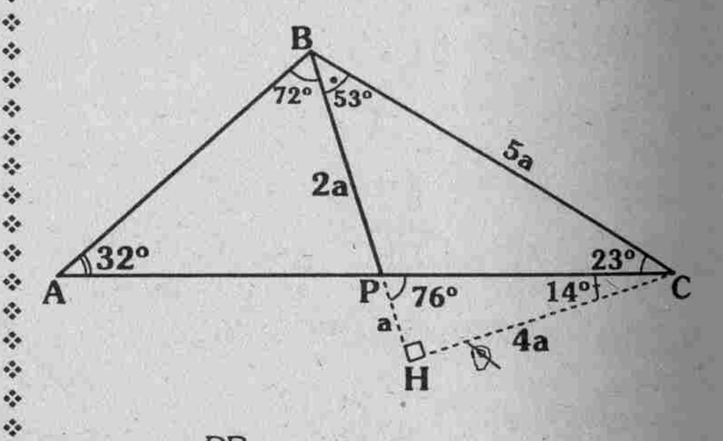
$$\overline{AH} \Rightarrow BH = HP$$

- Se traza $\overline{PL} \perp \overline{BC}$
- ⊿AHP ≅ ⊿CLP (ALA) ⇒ HP = PL
- ⊿BLP: notable

$$\therefore\ \mathbf{x = 30°}$$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 277



- Piden $\dfrac{PB}{BC}$.
- Completemos "ángulos", tenemos $m\sphericalangle CBP = 53°$.
- Ahora prolonguemos $\overline{BP}$ y tracemos $\overline{CH} \perp \overline{BP}$, notemos $m\sphericalangle PCH = 14°$
- ⊿PHC: notable de 14°

$$\Rightarrow HC = 4a \quad y \quad PH = a$$

- ⊿BHC: notable de 53°

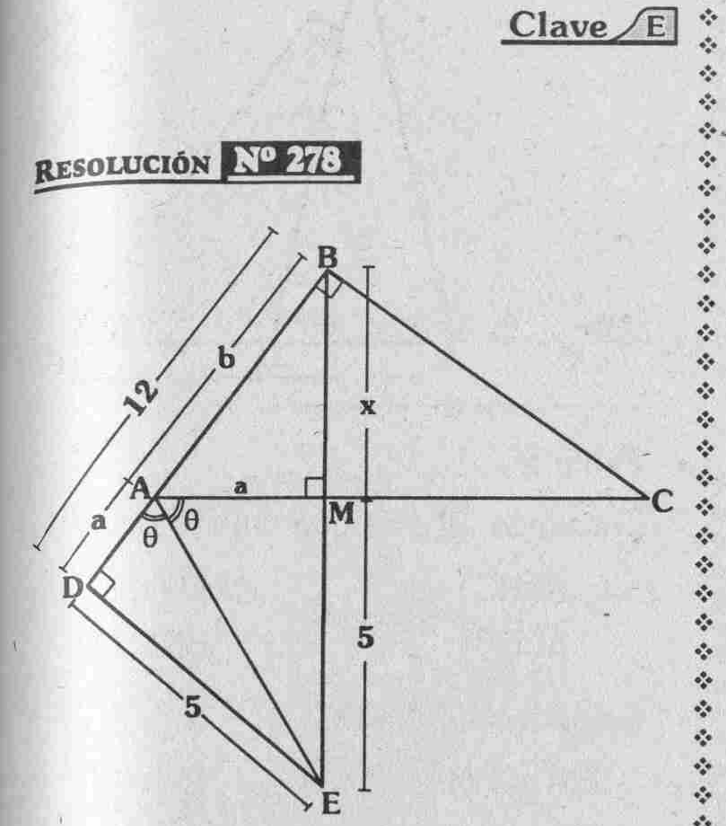
$$\Rightarrow BC = 5a \ \ y \ \ BH = 3a \Rightarrow PB = 2a$$

- Finalmente:

$$\frac{PB}{BC}=\frac{2}{5}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 278



- Piden **x**.
- Por teorema de la bisectriz:

$AD=AM=a$ y

$ED=EM=5$

- Como:

$a+b=12 \Rightarrow DB=12$

- ⊿BDE:

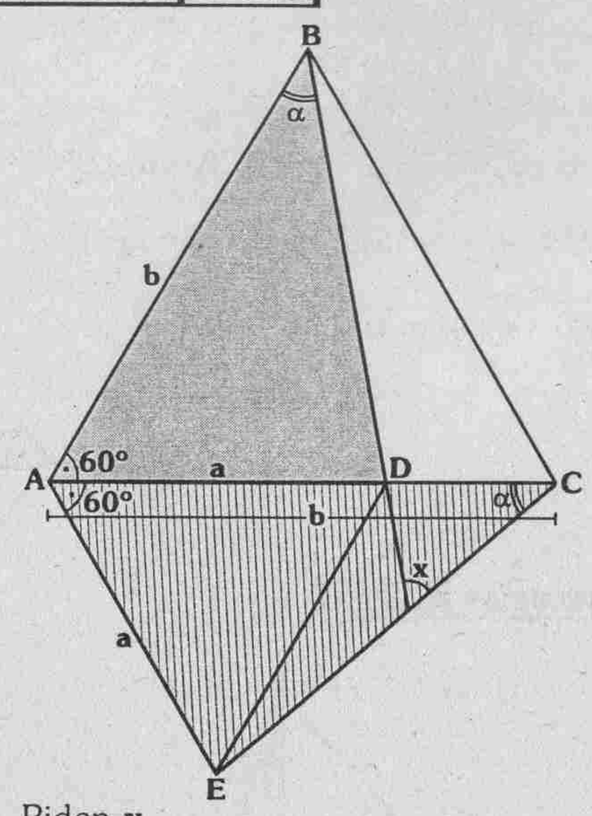
Pitagórico $\Rightarrow EB=13$

$x+5=13$

$\therefore$ **x = 8**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 279



- Piden **x**.
- $\Delta ABD \cong \Delta ACE$ (LAL)

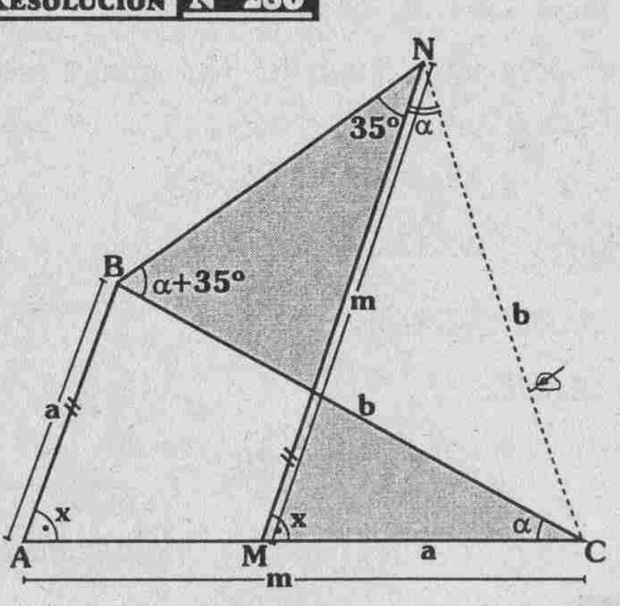
$\Rightarrow m\measuredangle ABD = m\measuredangle ACE$

- En ⋈: $x+\alpha=60°+\alpha$

$\therefore$ **x = 60°**

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 280



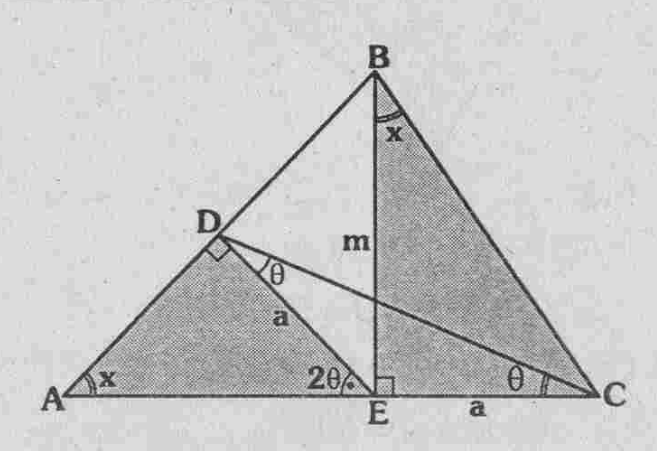
- Piden **x**.
- Como $\overline{AB} // \overline{MN} \Rightarrow m\measuredangle NMC = x$
- $\Delta ABC \cong \Delta CMN$ (LAL)

  $\Rightarrow BC = NC$ y $m\measuredangle BCA = m\measuredangle BNC$
- ΔBCN : isósceles $m\measuredangle CBN = m\measuredangle BNC$
- $\bowtie$: $x + \not{\alpha} = \not{\alpha} + 35° + 35°$

  $\therefore$ $\mathbf{x = 70°}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 281



- Nos piden **x** en función de θ.
- Dato: $\triangle ADE \cong \triangle BEC$
- Averiguemos que lados son iguales sea $ED = a$ entonces como:

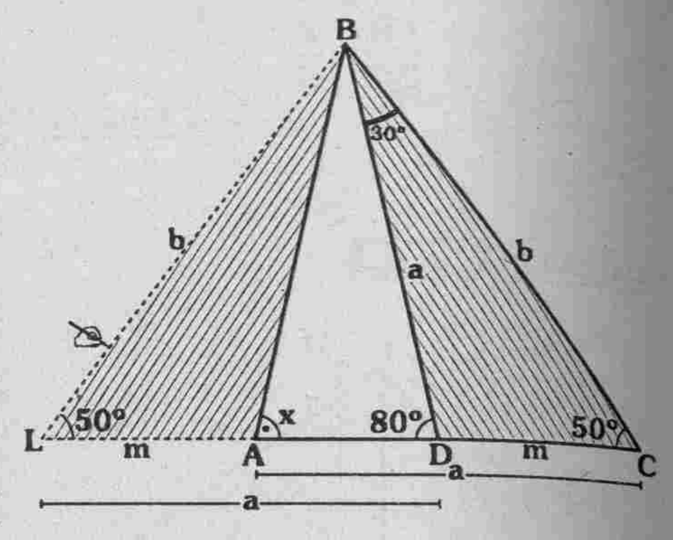
  $BE > ED \Rightarrow EC = a$

  luego : $m\measuredangle DAE = x$
- ΔEDC : isósceles
- $\triangle ADE$:

  $\mathbf{x = 90° - 2\theta}$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 282



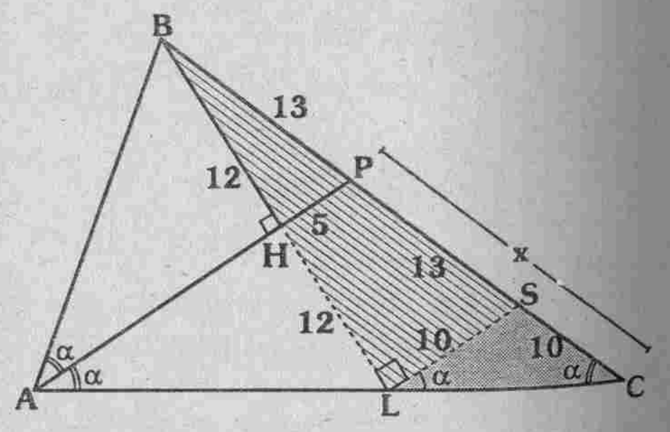
- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{BL}$ tal que: $m\measuredangle BLD = 50°$

  $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\Delta LBC \\ \Delta LDB\end{array}\right\}$ isósceles $\begin{array}{l}\Rightarrow LB = BC \\ BD = LD\end{array}$
- Se deduce: $LA = DC$
- $\Delta LBA \cong \Delta DBC$ (LAL) $\Rightarrow BA = BD$

  $\therefore$ $\mathbf{x = 80°}$

Clave A

RESOLUCIÓN Nº 283



- Piden **x**.
- Prolongamos $\overline{BH}$ hasta que corte a $\overline{AC}$ en L.

  $\Rightarrow \Delta BAL$: isósceles ($BH = HL$)

- Trazamos $\overline{LS} // \overline{HP}$

ΔLBS : $\overline{PH}$ base media

$\Rightarrow LS = 10$ y $PS = 13$

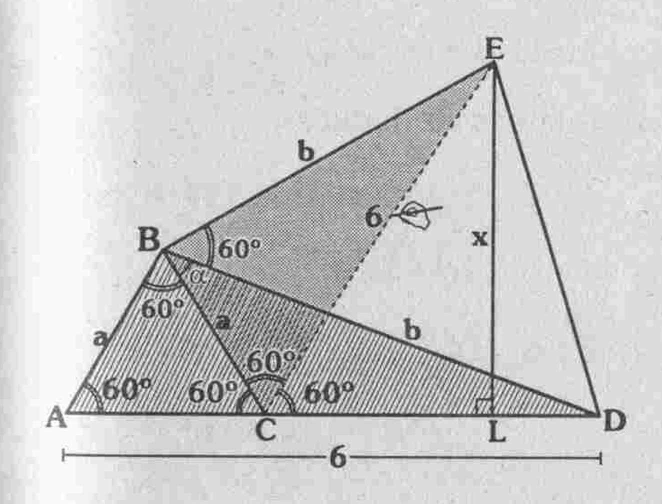
- Además ΔLSC : isósceles :

$LS = SC = 10$

$\therefore$ **x = 23**

Clave B

Resolución Nº 284



- Piden: $EL = x$

$\Delta ABD \cong \Delta CBE$ (LAL) $\Rightarrow EC = AD$

$m\sphericalangle BCE = m\sphericalangle BAD$

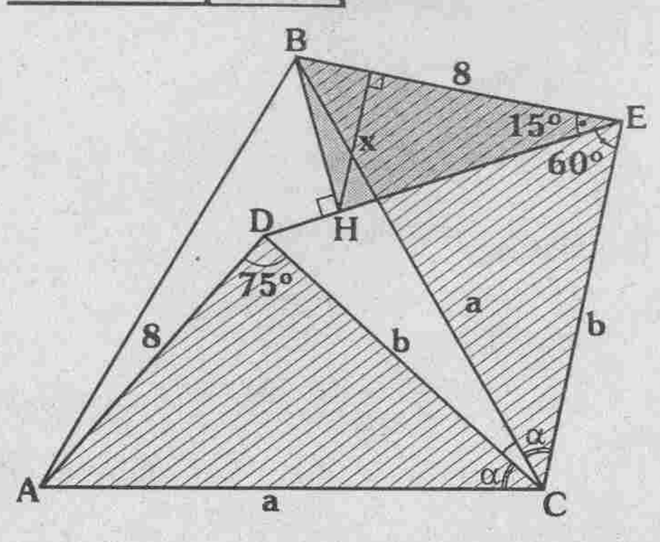
- Además:

$\measuredangle CEL$: notable de 30° y 60°

$\therefore$ **x = $3\sqrt{3}$**

Clave C

Resolución Nº 285



- Piden **x**.
- $\Delta ADC \cong \Delta BEC$ (LAL)

$BE = AD$ y $m\sphericalangle BEC = m\sphericalangle ADC = 75°$

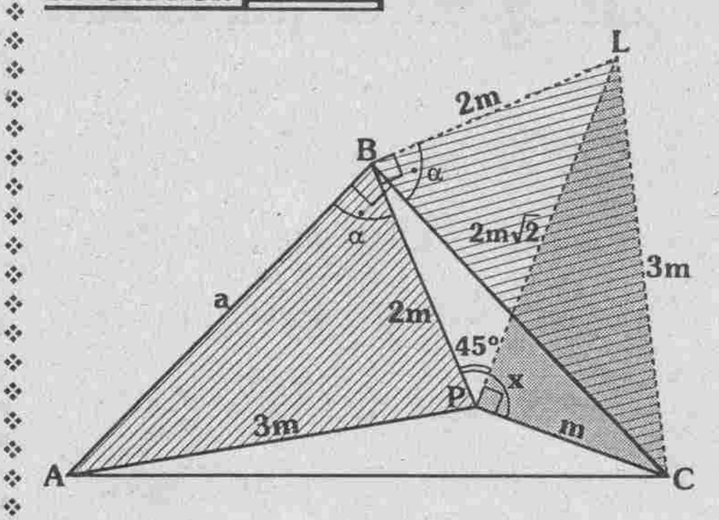
- Además se deduce:

$\measuredangle BHE$: not 15° y 75°, por propiedad:

$\therefore$ **x = 2**

Clave D

Resolución Nº 286



- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{BL}$ tal que $BL = BP$ y $m\sphericalangle LBC = m\sphericalangle ABP$

$\Rightarrow \Delta ABP \cong \Delta LBC$ (LAL) $\Rightarrow LC = AP$

- $\measuredangle$PBL: rectángulo isósceles
- Además:

$\Delta LPC : (LC)^2 = (PL)^2 + (PC)^2$

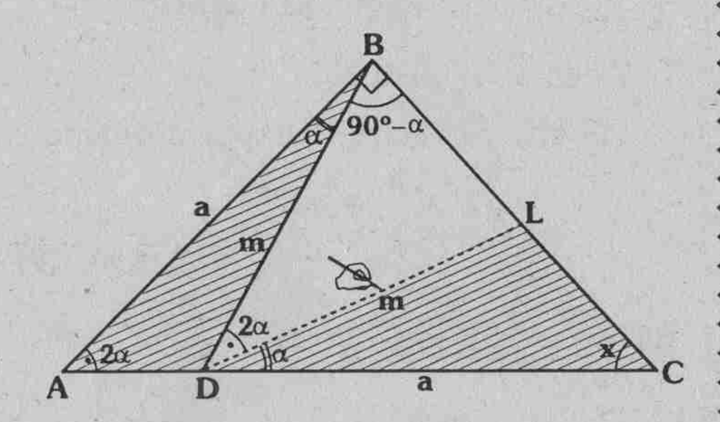
$\Rightarrow \; m\sphericalangle LPC = 90°$

$x = 90° + 45°$

$\therefore \; \mathbf{x = 135°}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 287



- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{DL}$ tal que $m\sphericalangle BDL = 2\alpha$

$\Rightarrow \; \Delta BDL$: isósceles (BD = DL)

- $\Delta ABD \cong \Delta DLC$ (LAL)

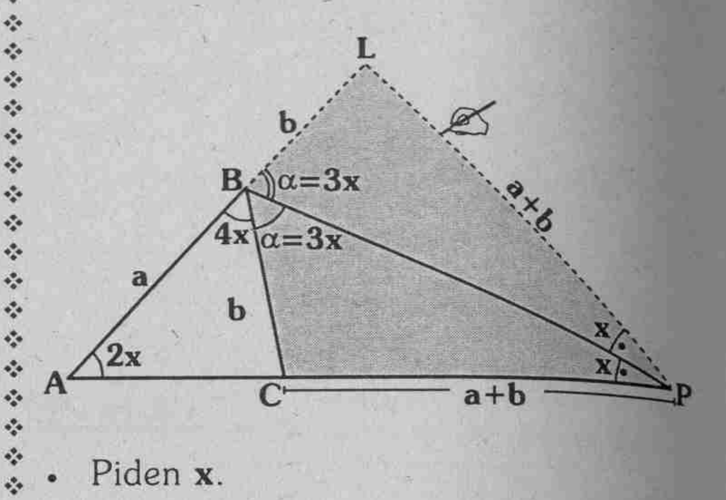
$\Rightarrow \; m\sphericalangle LCD = x = 2\alpha$

- $\measuredangle$ABC: isósceles

$\therefore \; \mathbf{x = 45°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 288



- Piden **x**.
- Prolongamos $\overline{AB}$ tal que BL = BC

$\Delta CBP \cong \Delta LBP$ (LAL) $\Rightarrow$ LP = CP ;

$m\sphericalangle LPB = m\sphericalangle BPC$

- Además se deduce:

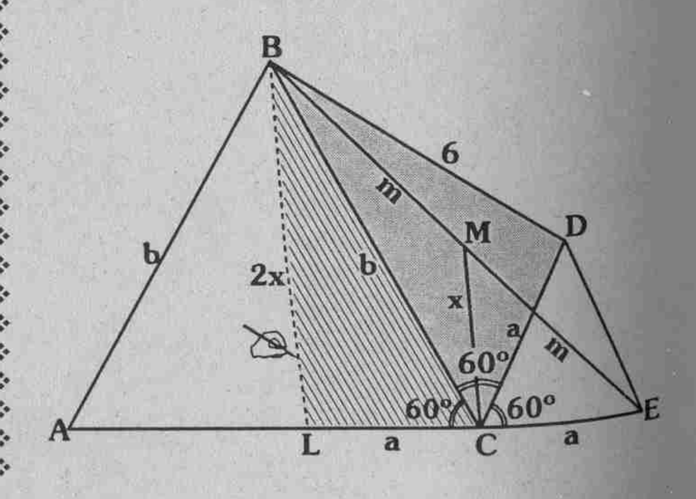
ΔALP : isósceles $\Rightarrow m\sphericalangle LAP = 2x$

- ΔABP : $\alpha = 3x$
- En B: $4x + 3x + 3x = 180°$

$\therefore \; \mathbf{x = 18°}$

Clave B

RESOLUCIÓN Nº 289



- Piden: $CM = x$
- Trazamos: $\overline{BL} // \overline{MC}$
- $\triangle BEL : \overline{MC}$: base media

$\Rightarrow BL = 2x$ y

$LC = CE$

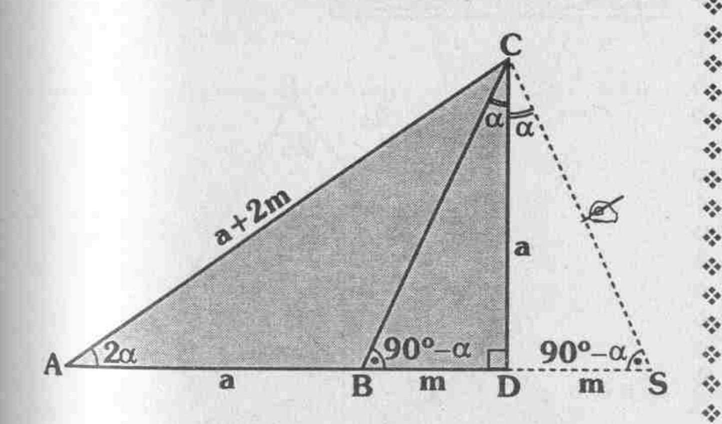
- $\triangle LBC \cong \triangle CBD$ (LAL)

$2x = 6$

$\therefore \mathbf{x = 3}$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 290



- Piden α.
- Trazamos $\overline{CS}$ tal que :

$m\measuredangle CSA = 90° - \alpha$

- $\triangle BCS$: isósceles $\Rightarrow BD = DS$
- $\triangle CAS$: isósceles $\Rightarrow AC = AS$

- $\triangle ADC$: $(a+2m)^2 = (a+m)^2 + a^2$

$\Rightarrow a=3m$

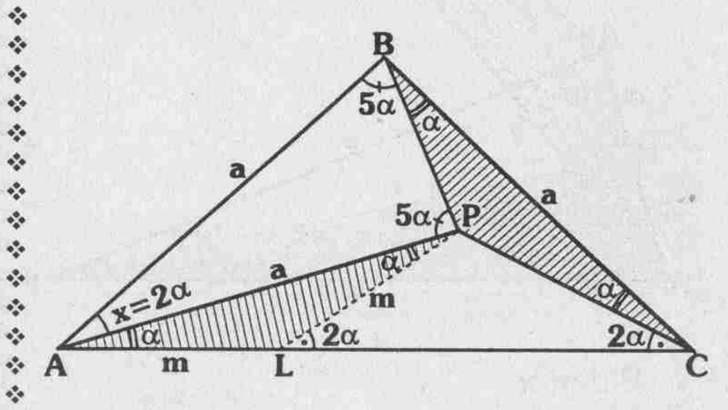
- $\triangle ADC$: notable de 37° y 53°

$2\alpha = 37°$

$\alpha = \mathbf{\dfrac{37°}{2}}$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 291



- Piden **x**.
- Trazamos $\overline{PL}$ tal que $m\measuredangle APL = \alpha$
- $\triangle APL \cong \triangle BPC$ (ALA)

$\Rightarrow AL = LP = BP = PC$

- $\triangle LPC$: isósceles
- BCAP: $m\measuredangle BPA = 5\alpha$
- $\triangle BAP$: isósceles y

$\triangle ABC$: isósceles $\Rightarrow x = 2\alpha$

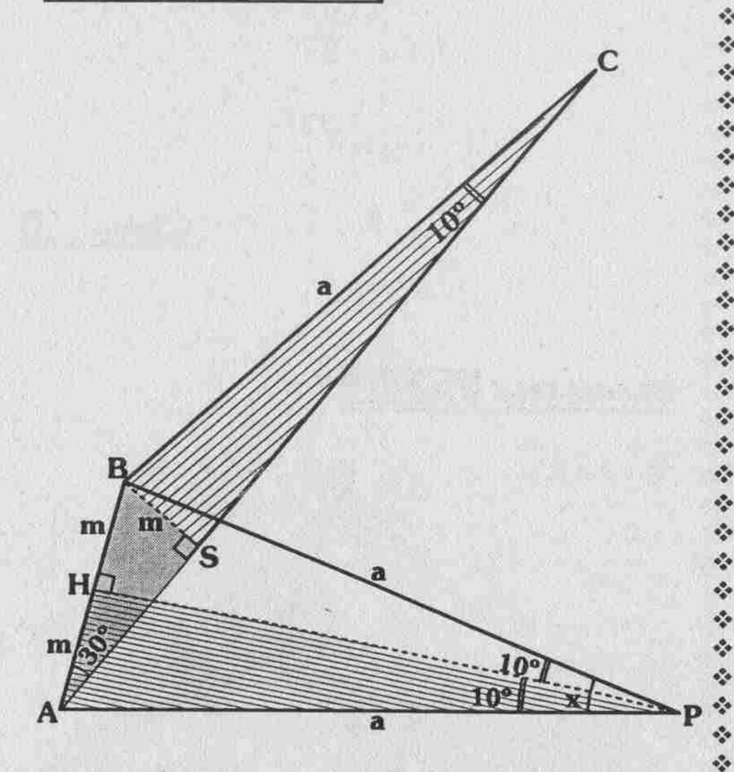
- $\triangle BAP$:

$2\alpha + 5\alpha + 5\alpha = 180°$

$\therefore \mathbf{2\alpha = 30°}$

Clave A

Resolución Nº 292



- Piden **x**.
- ΔABP : isósceles (AP = BP)

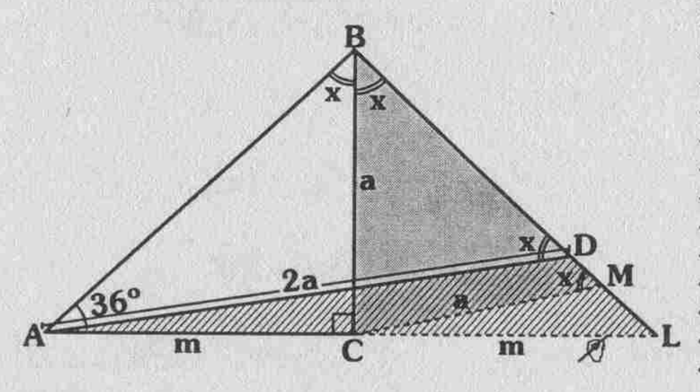
  $\Rightarrow \overline{PH}$ altura, mediana, bisectriz

  AH = HB y $m\sphericalangle APH = m\sphericalangle BPH$
- $⊿ABS$: notable de 30° y 60°
- $⊿BSC \cong ⊿AHP \Rightarrow m\sphericalangle APH = 10°$

  $\therefore$ **x = 20°**

Clave E

Resolución Nº 293



- Piden **x**.
- ΔABL : isósceles
- $\overline{BC}$: altura, mediana, bisectriz
- ΔADL : trazamos $\overline{CM} // \overline{AD}$

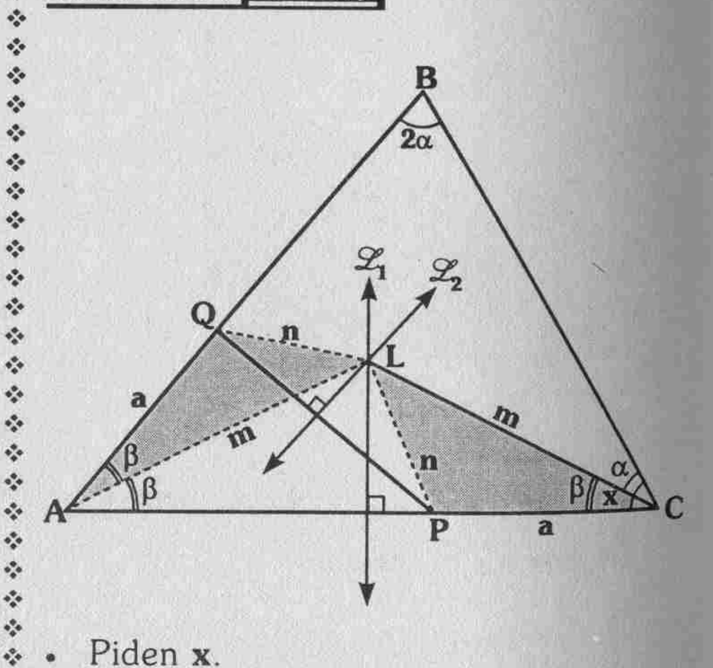
  $\Rightarrow \overline{CM}$: base media (CM = a)
- ΔBCM : isósceles

  $\Rightarrow m\sphericalangle CMB = x$ y $m\sphericalangle ADB = x$
- ΔABD : $36° + 2x + x = 180°$

  $\therefore$ **x = 48°**

Clave D

Resolución Nº 294



- Piden **x**.
- Por teorema de la mediatriz:

  $\overline{\mathscr{L}_1}$: mediatriz de $\overline{AC} \Rightarrow AL = LC$

  $\overline{\mathscr{L}_2}$: mediatriz de $\overline{QP} \Rightarrow QL = LP$
- $\Delta AQL \cong \Delta CPL$ (LLL)

  $\Rightarrow m\sphericalangle QAL = m\sphericalangle LCP$

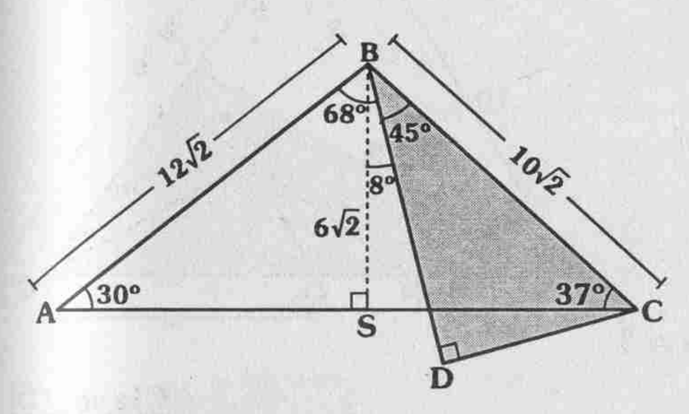
- Se observa: $x = \alpha + \beta$
- $\Delta ABC: 2\alpha + 2\beta + \alpha + \beta = 180°$

$$\alpha + \beta = 60°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 60°}$$

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 295



- Piden: BD
- Tracemos: $\overline{BS} \perp \overline{AC}$
- ⊿ASB: notable de 30°

$$\Rightarrow BS = 6\sqrt{2}$$

- ⊿BSC: notable de 37°

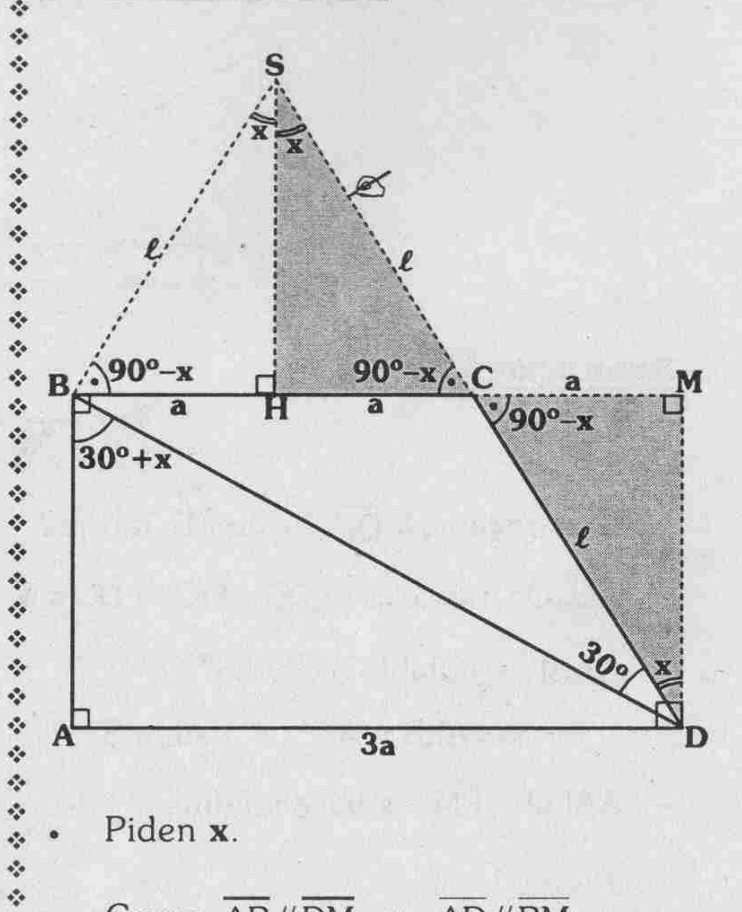
$$\Rightarrow BC = 10\sqrt{2}$$

- ⊿BDC: notable de 45°

$$\mathbf{BD = 10}$$

Clave C

RESOLUCIÓN Nº 296



- Piden **x**.
- Como $\overline{AB} // \overline{DM}$ y $\overline{AD} // \overline{BM}$

$$\Rightarrow BM = 3a \Rightarrow CM = a$$

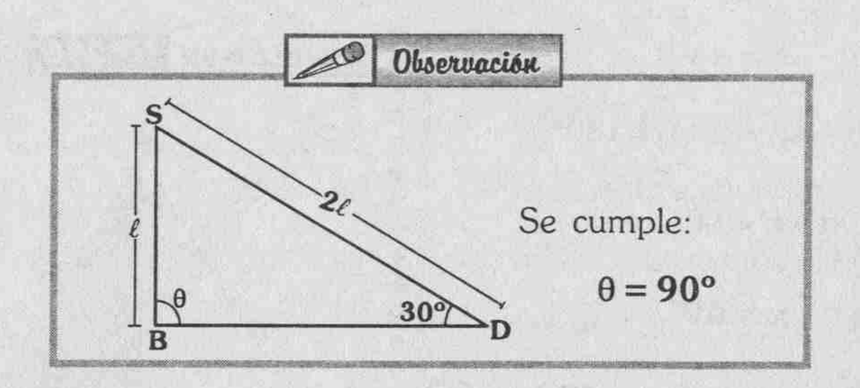
- Tracemos la mediatriz de $\overline{BC}$, la cual corta a la prolongación de $\overline{DC}$ en M.
- Por teorema de la mediatriz: $SB = SC$.
- ⊿CHS ≅ ⊿CMD (ALA) $\Rightarrow CD = \ell$
- De la observación:

$$m\sphericalangle SBC = 90°$$

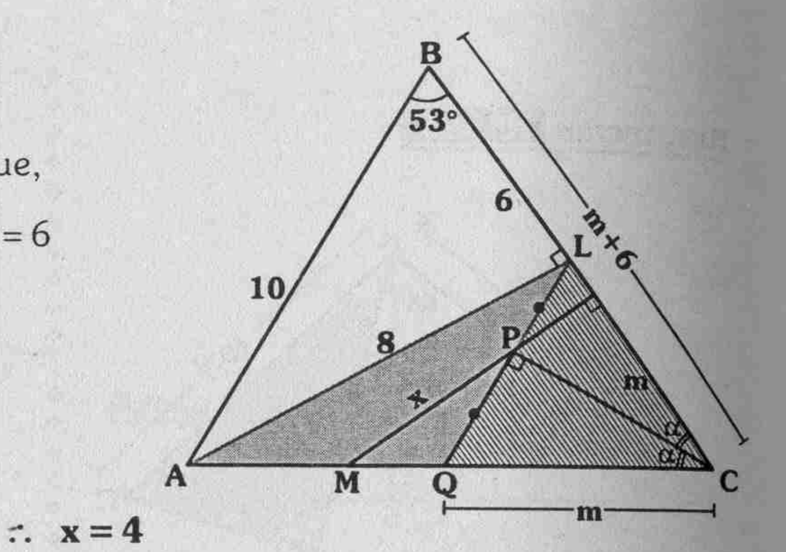
$$2x = 60°$$

$$\therefore \ \mathbf{x = 30°}$$

Clave C



RESOLUCIÓN Nº 297



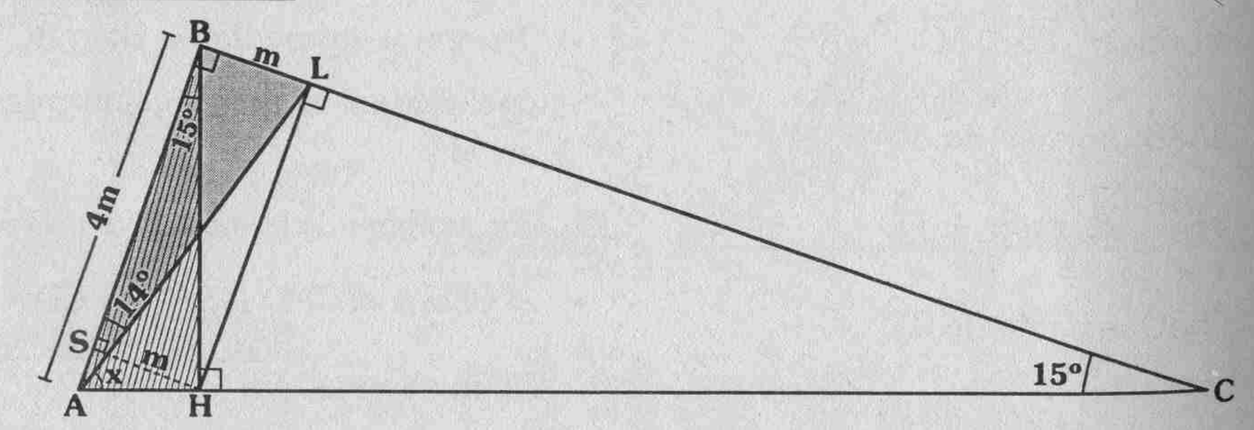
- Piden x.
- Prolongamos $\overline{QP}$ hasta "L" tal que,
- ΔLCQ : isósceles $\Rightarrow$ LC = QC $\Rightarrow$ BL = 6
- ΔABL : notable 37° y 53°

  $\Rightarrow$ m∢ALB = 90° y AL = 8
- ΔALQ : $\overline{PM}$ es base media

$\therefore$ **x = 4**

Clave D

RESOLUCIÓN Nº 298

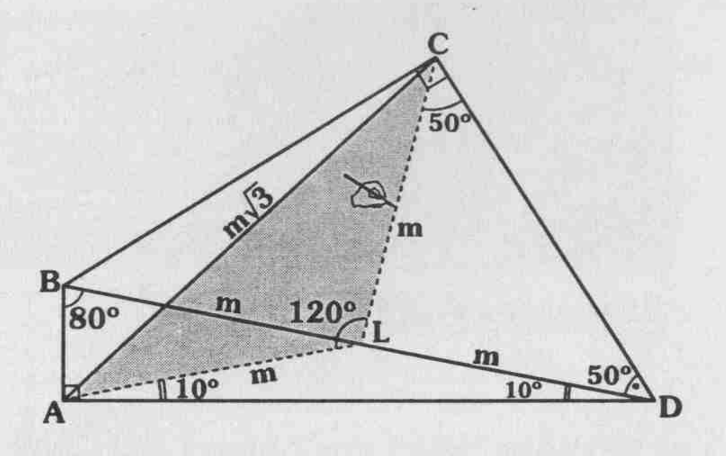


- Piden **x**.
- ⊿ABH: notable de 15° y 75° $\Rightarrow$ AB = 4(HS) ; además SH = BL
- ⊿ABL: notable 14° y 76° $\Rightarrow$ m∢BAL = 14°
- ⊿ABH: x + 14° = 75°

$\therefore$ **x = 61°**

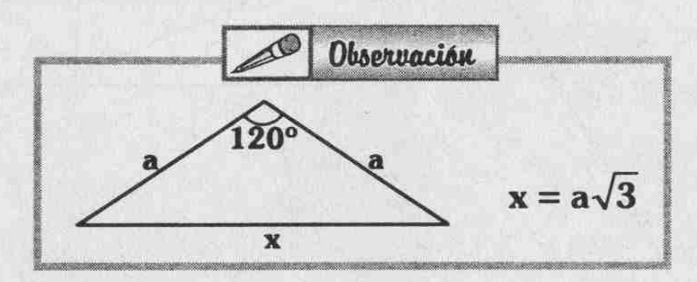
Clave C

RESOLUCIÓN Nº 299



- Piden $\dfrac{AC}{BD}$
- Por teorema mediana relativa a la hipotenusa

$$\Rightarrow AL = CL = \frac{BD}{2} = m$$

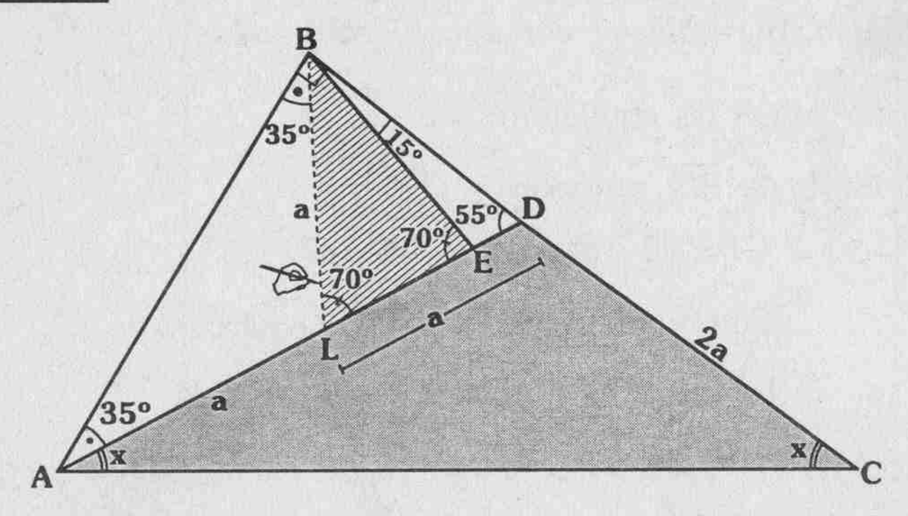


- En $\Delta ALC : AC = m\sqrt{3}$

$$\frac{AC}{BD} = \frac{m\sqrt{3}}{2m} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Clave E

RESOLUCIÓN Nº 300



- Piden **x**.
- $\measuredangle$ABD: Teorema de la mediana relativa a la hipotenusa entonces: BL=AL=LD.
- ΔLBE : isósceles (LB = BE)
- ΔADC : isósceles (AD = DC) : $2x = 55°$

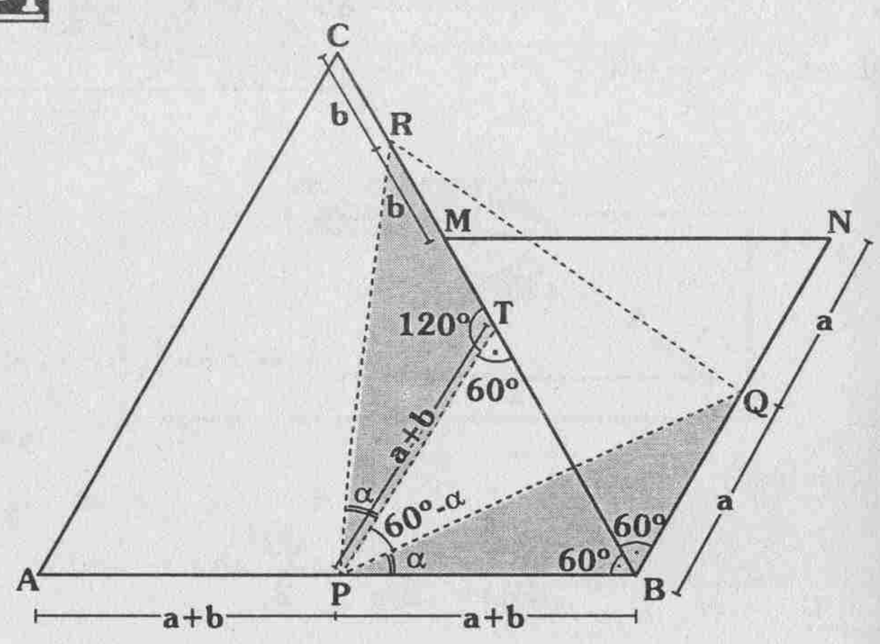
$$\therefore\ \mathbf{x = 27{,}5°}$$

Clave A

Solucionario

Problemas Olímpicos

RESOLUCIÓN N° 1



- En el gráfico, ΔABC y ΔBMN son equiláteros, AP=PB, CR=RM y BQ=QN. (Sea CR=RM=b; BQ=QN=a; con ello AP=PB=a+b)

- Por demostrar: ΔPQR es equilátero.

- Sea T punto medio de $\overline{BC}$, entonces:

  - $CT = TB = a + b \Rightarrow RT = a$
  - Como: $PB = BT \Rightarrow$ ΔPBT : equilátero
  - Luego: $PT = a + b$ y $m\measuredangle PTR = 120°$

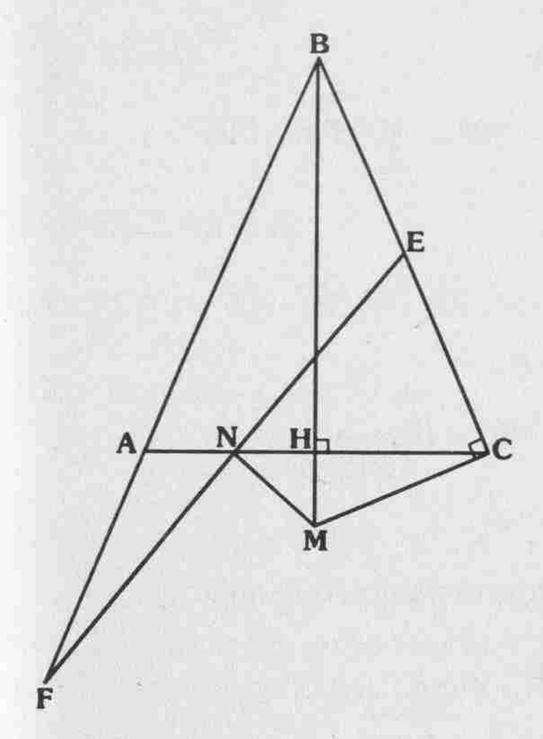
- $\Delta PTR \cong \Delta PBQ$ (LAL) $\Rightarrow PR = PQ$ y $m\measuredangle RPT = m\measuredangle QPB = \alpha$

- Como $PQ=PR$ y $m\measuredangle RPQ = 60°$

$\Rightarrow$ **ΔPRQ es equilátero**

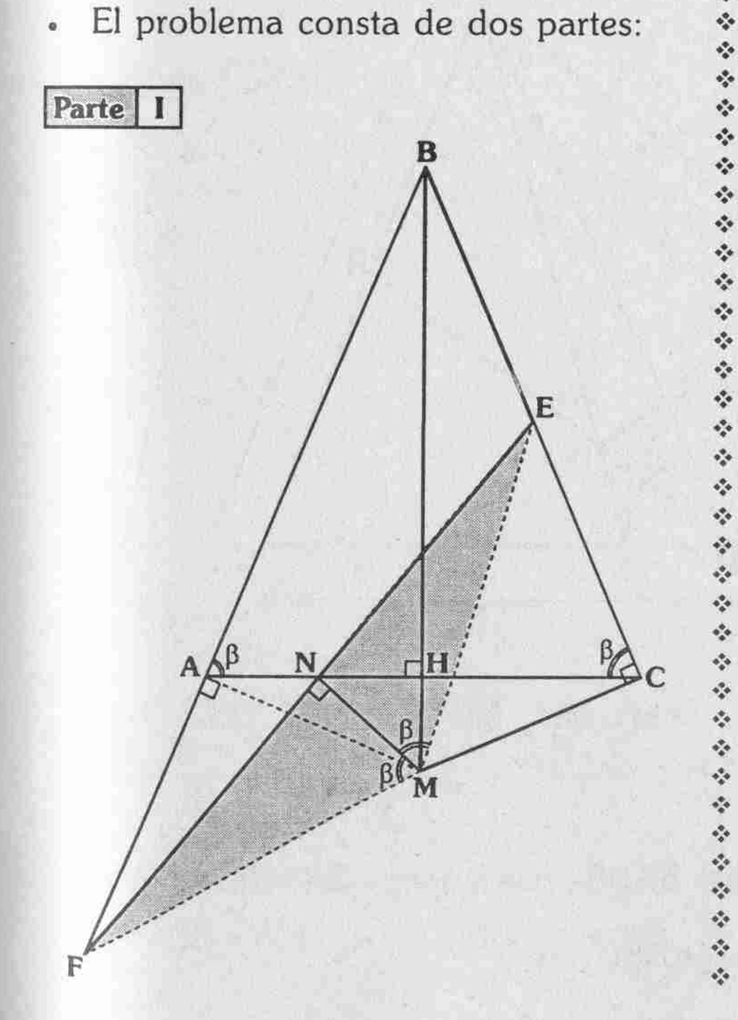
RESOLUCIÓN N° 2

- Consideremos el siguiente gráfico:



- Dato: $AB = BC$
- Por demostrar: $\overline{MN} \perp \overline{EF} \Rightarrow EN = NF$
- El problema consta de dos partes:

Parte I



- Demostremos: si $\overline{MN} \perp EP \Rightarrow EN = NP$
- Como $AB = BC \Rightarrow m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle ACB$ y $\overleftrightarrow{BH}$ es mediatriz de $\overline{AC}$, luego $MA = MC$, entonces:

$\Delta MAB \cong \Delta MCB$

$\Rightarrow m\sphericalangle MAB = m\sphericalangle MCB = 90°$

- Los cuadriláteros FANM y MNEC son inscriptibles, por teorema:

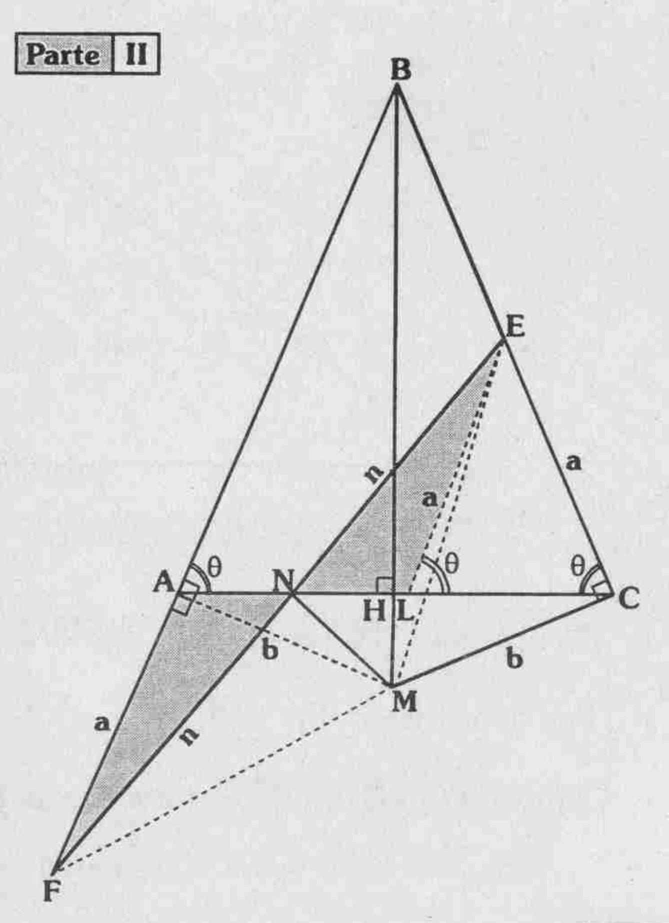
$m\sphericalangle BAN = m\sphericalangle FMN = \beta$

$m\sphericalangle NCE = m\sphericalangle NME = \beta$

- En ΔFME, como $\overline{MN}$ es altura y bisectriz, entonces ΔFME es triángulo isósceles, luego: $\overline{MN}$ también es mediana.

$\therefore$ **FN = NE**

Parte II



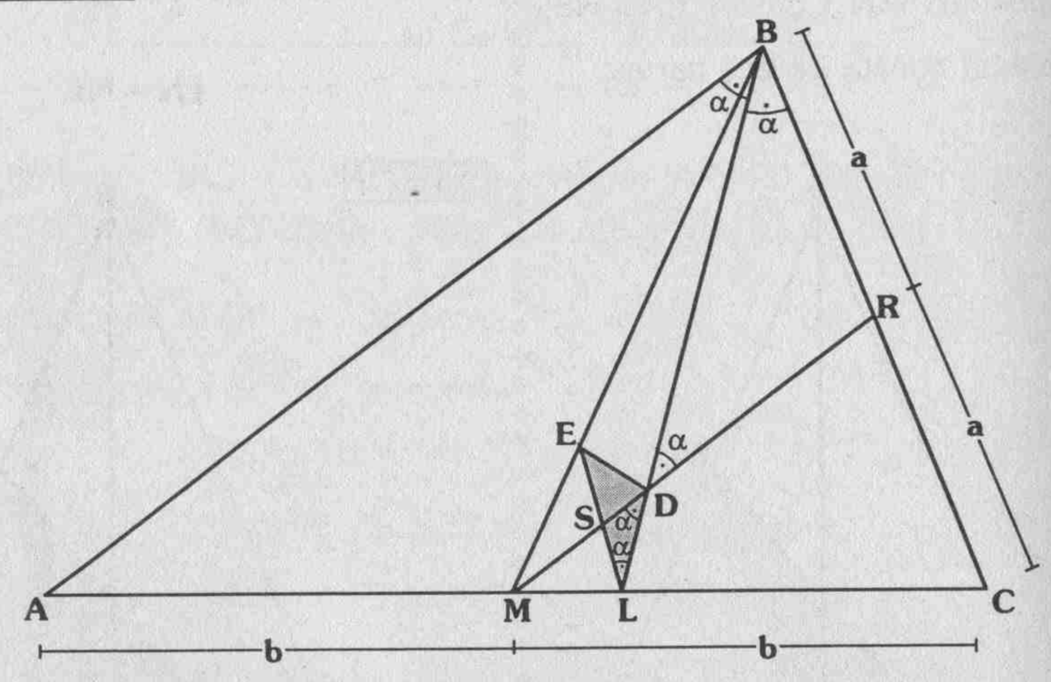
- Demostremos ahora si: $EN = NF \Rightarrow \overline{MN} \perp EF$
- $\triangle MAB \cong \triangle MCB \Rightarrow m\angle MCB = m\angle MAB = 90^\circ$ y $MA = MC$
- Se traza $\overline{EL} // \overline{AB}$ (L en $\overline{AC}$).
- $\Delta NAF \cong \Delta NLE \Rightarrow LE = FA = a$
- Como $\overline{EL} // \overline{AB} \Rightarrow m\angle ELC = m\angle BAC = \theta$

$\Rightarrow \Delta LEC$: isósceles $\Rightarrow EC = EL = a$

- $\triangle MAF \cong \triangle MCE \Rightarrow MF = ME$
- ΔFME : isósceles, como $\overline{MN}$ es mediana, entonces también es altura:

$$\therefore \overline{MN} \perp \overline{FE}$$

RESOLUCIÓN Nº 3



- En el gráfico, $\overline{BL}$ es bisectriz del $\angle ABC$, $AM = MC$, $\overline{MD} // \overline{AB}$ y $\overline{EL} // \overline{BC}$.
- Por demostrar: $\overline{ED} \perp \overline{BL}$
- Como $\overline{MD} // \overline{AB} \Rightarrow \overline{MR}$ es base media del ΔABC, por teorema $BR = RC$ también:

$$m\angle MDL = m\angle ABD = \alpha$$

- Como $\overline{LE} // \overline{BC}$

$$\Rightarrow m\measuredangle ELD = m\measuredangle DBC = \alpha$$

- En ΔMBC, tenemos:

$$BR = RC \quad y \quad \overline{EL} // \overline{BC} \Rightarrow ES = SL$$

- ΔSDL : isósceles, pues

$$m\measuredangle SDL = m\measuredangle SLD$$

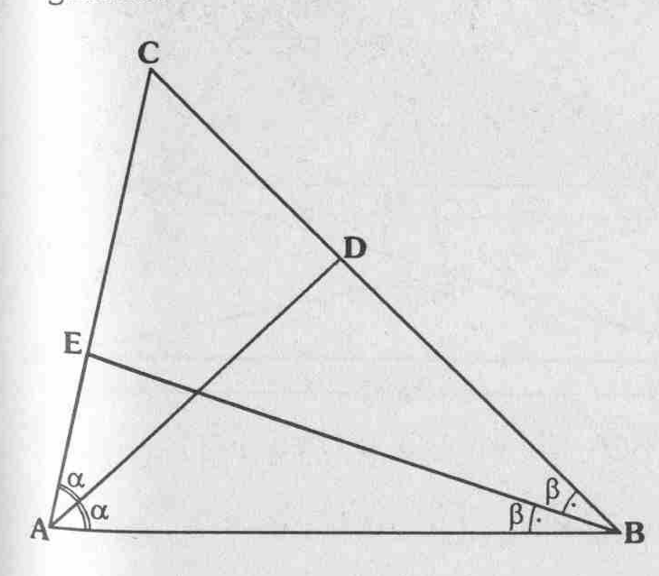
$$\Rightarrow \quad SL = SD$$

- Como $ES = SL = SL$ entonces el triángulo EDL es triángulo rectángulo (recto en D) .

$$\therefore \ \mathbf{\overline{ED} \perp \overline{BL}}$$

RESOLUCIÓN Nº 4

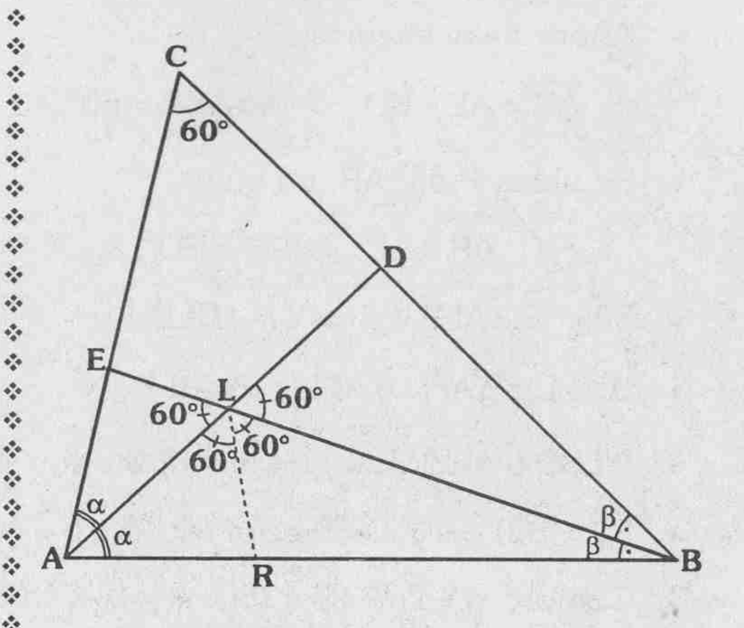
- Asi como el problema 2, consta de dos partes consideremos el siguiente gráfico:



- Por demostrar:

$$m\measuredangle ACB = 60° \Leftrightarrow AE + BD = AB$$

Parte I



- Demostremos:

$$\text{si } m\measuredangle BCA = 60° \Rightarrow AB = AE + BD$$

- En ΔABC :

$$2\alpha + 2\beta + 60° = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 60°$$

- En ΔALB :

$$m\measuredangle ALB = 120°$$

$$\Rightarrow m\measuredangle ALE = 60°$$

- Se traza $\overline{LR}$ (R en $\overline{AB}$) tal que:

$$m\measuredangle ALR = 60°$$

- $\Delta ALE \cong \Delta ALR \Rightarrow AE = AR$

- $\Delta BLD \cong \Delta BLR \Rightarrow BD = BR$

- Como:

$$AB = AR + BR$$

$$\therefore \ \mathbf{AB = AE + BD}$$

Parte II

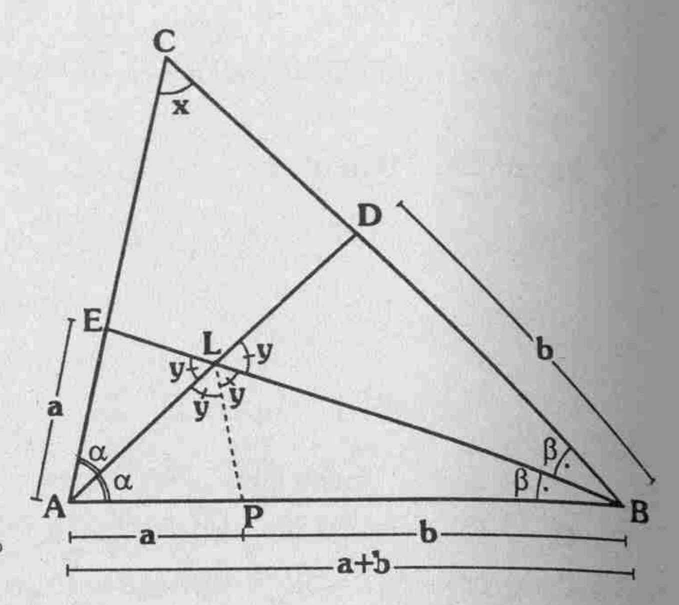
- Ahora demostremos:

  si $AB = AE + BD \Rightarrow m\measuredangle ACB = 60°$

- Se ubica P en $\overline{AB}$ tal que:

  $AP = AE \Rightarrow PB = BD$

- Sea: $m\measuredangle ALE = y \Rightarrow m\measuredangle DLB = y$
- $\Delta AEL \cong \Delta APL$ (LAL) $\Rightarrow m\measuredangle ALP = y$
- $\Delta LBD \cong \Delta LBP$(LAL) $\Rightarrow m\measuredangle PLB = y$
- $3y = 180° \Rightarrow y = 60°$, con ello $\alpha + \beta = 60°$
- Como: $x + 2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow x = 60°$



$\therefore$ **m∢ACB = 60°**

RESOLUCIÓN Nº 5

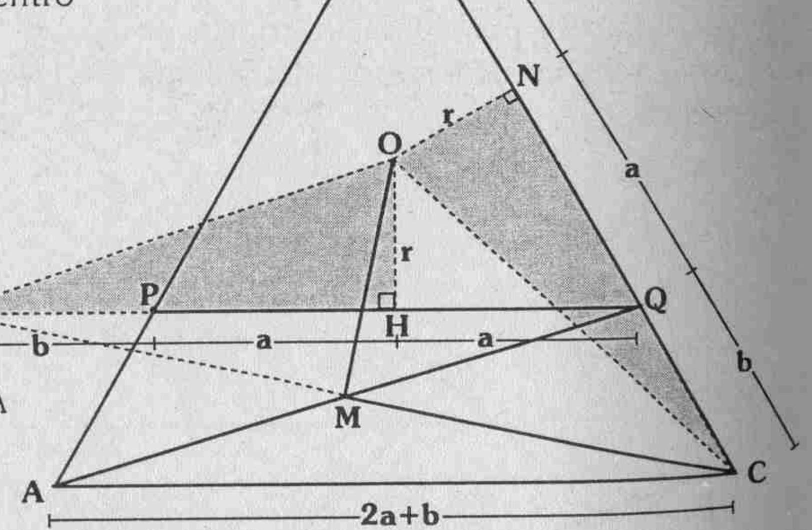
- En el gráfico: ΔABC equilátero, $\overline{PQ} // \overline{AC}$, $AM = MQ$ y O es centro del ΔPBQ.
- Por demostrar:

  $m\measuredangle OMC = 90°$

- $\overrightarrow{CM} \cap \overrightarrow{QP} = \{E\}$
- Como :

  $AM = MQ \Rightarrow \Delta EMQ \cong \Delta CMA$

  $\Rightarrow EQ = AC$ y $EM = MC$



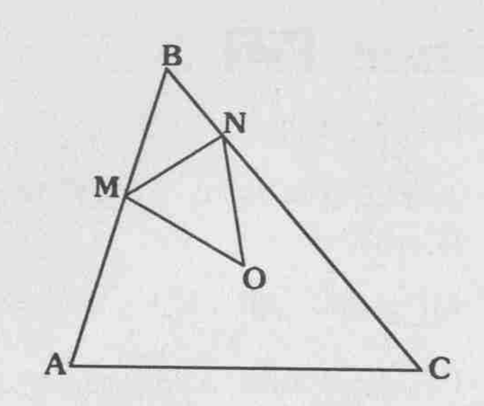
- Desde O se traza: $\overline{OH} \perp \overline{PQ}$ y $\overline{ON} \perp \overline{BQ}$ (H en $\overline{PQ}$ y N en $\overline{BQ}$)

  $\Rightarrow OH = ON;\ PH = HQ$ y $QN = NB$

- ⊿EHO ≅ ⊿CNO (LAL) $\Rightarrow OE = OC$
- ΔEOC : isósceles , como $EM = MC \Rightarrow \overline{OM} \perp \overline{EC}$

$\therefore$ **m∢OMC = 90°**

RESOLUCIÓN Nº 6



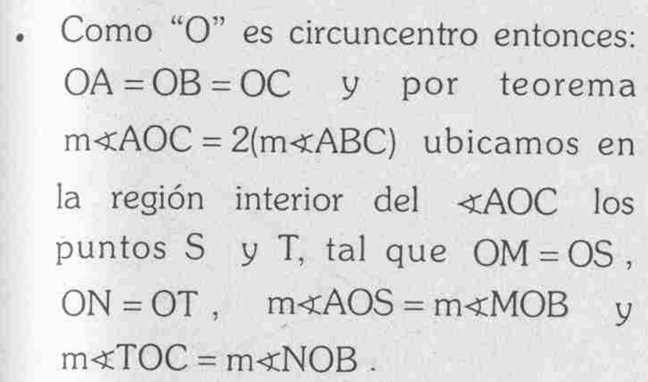
- Del gráfico:

  O es circuncentro del triángulo ABC

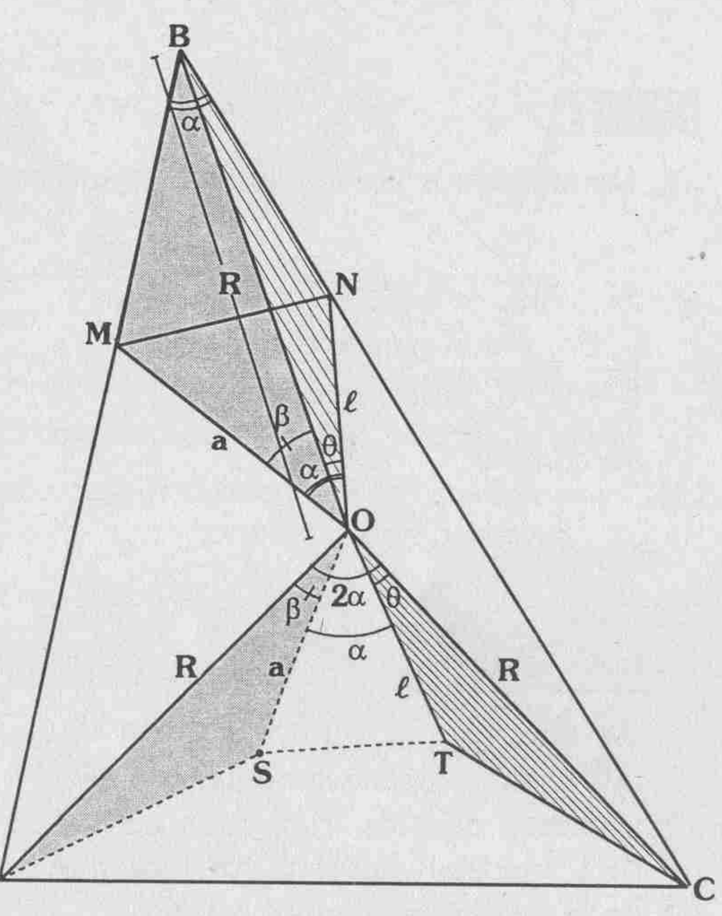
  y $\quad m\sphericalangle ABC = m\sphericalangle MON$

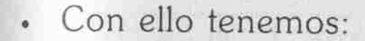
- Por demostrar:

$$AC \le MB + BN + MN$$



- Como "O" es circuncentro entonces: $OA = OB = OC$ y por teorema $m\sphericalangle AOC = 2(m\sphericalangle ABC)$ ubicamos en la región interior del $\sphericalangle AOC$ los puntos S y T, tal que $OM = OS$, $ON = OT$, $m\sphericalangle AOS = m\sphericalangle MOB$ y $m\sphericalangle TOC = m\sphericalangle NOB$.





- Con ello tenemos:

  $\Delta AOS \cong \Delta MOB$ (LAL) $\Rightarrow MB = AS$

  $\Delta CTO \cong \Delta BON$ (LAL) $\Rightarrow TC = BN$

- $\Delta SOT \cong \Delta MON$ (LAL)

  $\Rightarrow ST = MN$

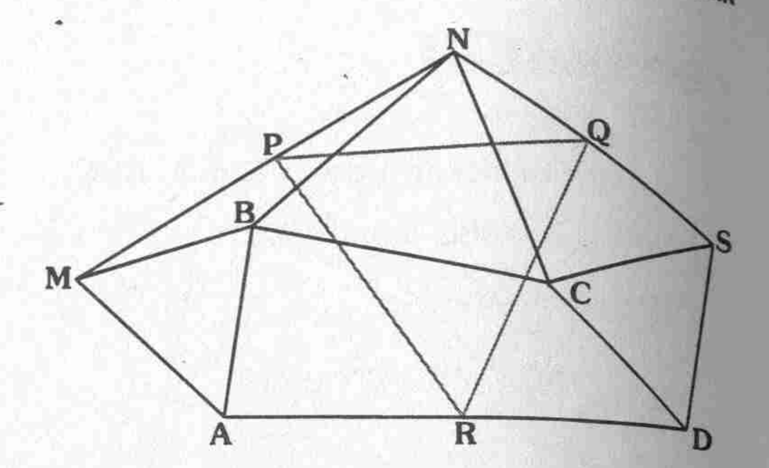
- Por teorema: $AC \le \underbrace{AS}_{MB} + \underbrace{ST}_{MN} + \underbrace{TC}_{BN}$

$$\therefore \ \mathbf{AC \le MB + MN + BN}$$

Nota

El estudiante puede verificar que si $AC = AD + ST + TC$ *o cuando* S *y* T *están sobre* $\overline{AC}$, *en cada caso se demuestra que el triángulo* ABC *es equilátero, lo cual queda como ejercicio para el lector.*

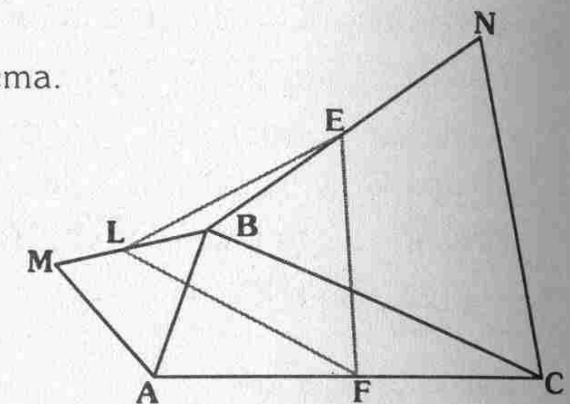
RESOLUCIÓN Nº 7



- En el gráfico.
- ΔAMB, ΔBCN y ΔLSD son equiláteros.
- $MP = PN$; $AR = RD$ y $NQ = QS$
- Por demostrar ΔPRQ es equilátero.

Paso 1

- Demostremos previamente el siguiente teorema.



- Si ΔABC y ΔBCN son equiláteros y L, E y F son puntos medios de $\overline{MB}$, $\overline{BN}$ y $\overline{AC}$ respectivamente
- Se cumple:

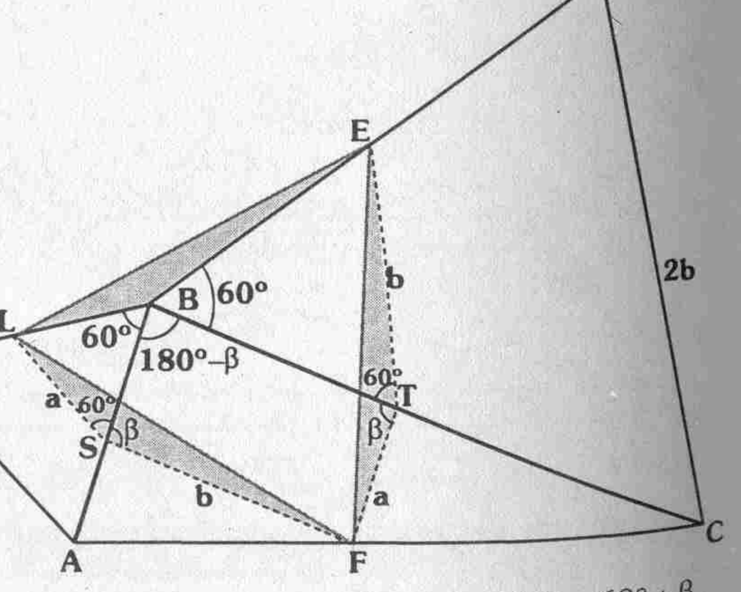
ΔLFE es equilátero.

Demostración:

- Se ubica S y T puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, con ello notamos que los triángulos LST y BET son equiláteros y por teorema de la base media en el ΔABC.

$$\overline{FT} // \overline{AB} \quad y \quad FT = \frac{AB}{2},$$

$$\overline{FS} // \overline{CB} \quad y \quad FS = \frac{BC}{2}$$

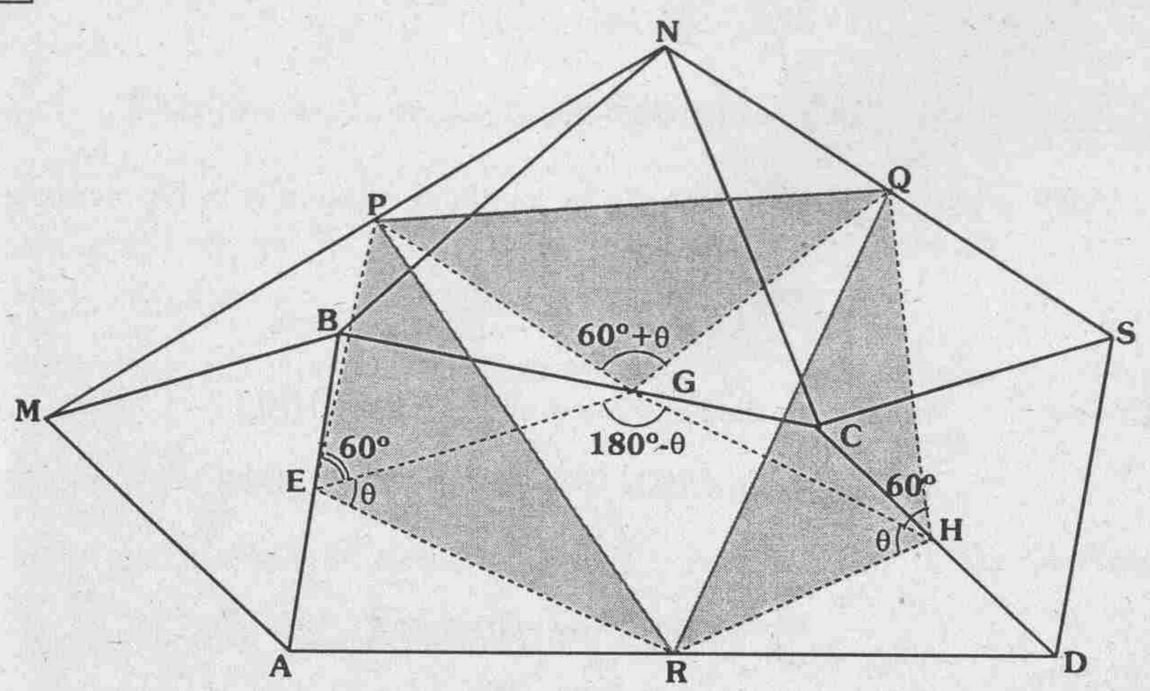


- Con ello SBTF: paralelogramo, sea $m\sphericalangle BSF = \beta \Rightarrow m\sphericalangle BTF = \beta$ y $m\sphericalangle LBE = 60° + \beta$.

$$\Delta LSF \cong \Delta FTE \cong \Delta LBE \text{ (LAL)} \Rightarrow LF = FE = LE$$

$$\therefore \ \mathbf{\Delta LFE} \text{ es equilátero.}$$

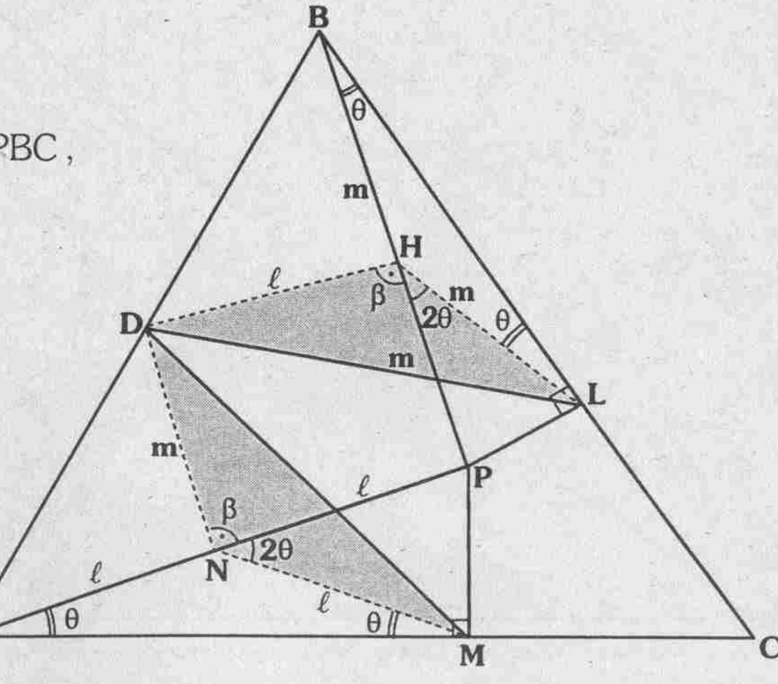
Paso 2



- Sean E, G y H puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente por el teorema anterior, para el ΔMNB y ΔNSC, los triángulos PEG y GQH son equiláteros.
- Por teorema como E, G, H y R son puntos medios de los lados del cuadrilátero ABCD, entonces EGHR es paralelogramo.
- Luego: $\Delta PER \cong \Delta RHQ \cong \Delta PGH$ (LAL) $\Rightarrow$ PR = RQ = PQ

$\therefore$ **ΔPRQ es equilátero.**

RESOLUCIÓN Nº 8



- Datos: AD = DB , m∢PAM = m∢PBC , $\overline{PM} \perp \overline{AC}$ y $\overline{PL} \perp \overline{BC}$.
- Por demostrar: DL = DM
- Ubiquemos H y N puntos medios de $\overline{BP}$ y $\overline{AP}$ respectivamente.
- En ΔAPB, por teorema de la base media:

$$\overline{DN}//\overline{BP}\ ;\quad \overline{DH}//\overline{AP}\ ;\quad DN=\frac{BP}{2}\ \text{ y }\ DH=\frac{AP}{2}$$

$$\Rightarrow\ \text{NDHP es paralelogramo}\ \Rightarrow\ m\measuredangle DNP = m\measuredangle DHP$$

- En ⊿AMP y ⊿BLP, por teorema de la mediana relativa a la hipotenusa:

$$LH=\frac{BP}{2}\qquad \text{y}\qquad MN=\frac{AP}{2}$$

- También: $m\measuredangle HLB = m\measuredangle LBH \Rightarrow m\measuredangle LHP = 2(m\measuredangle HBL)$

$$m\measuredangle MAN = m\measuredangle AMN \Rightarrow m\measuredangle MNP = 2(m\measuredangle MAN)$$

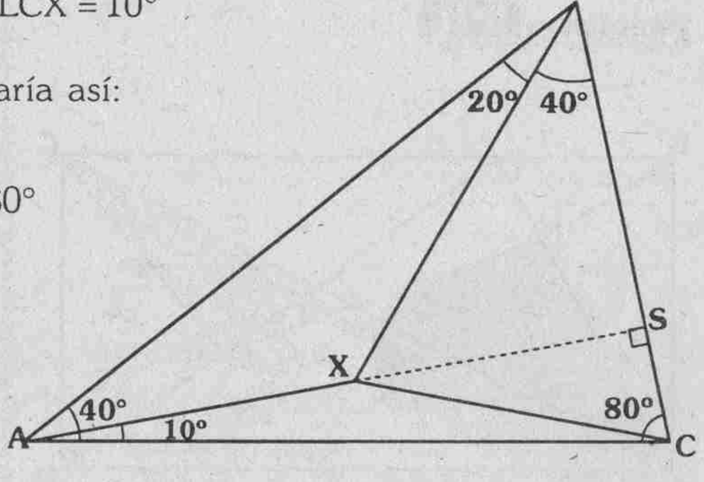
- Luego:

$$\Delta DNM \cong \Delta LHD \text{ (LAL)}$$

$$\therefore\ \mathbf{DM=DL}$$

RESOLUCIÓN Nº 9

- Datos: $m\sphericalangle BAC = 40°$, $m\sphericalangle ABC = 60°$, $m\sphericalangle XBA = 20°$ y $m\sphericalangle XCA = 10°$
- Por demostrar: $\overline{AX} \perp \overline{BC}$
- De los datos deducimos: $m\sphericalangle BCX = 70°$ y $m\sphericalangle XBC = 40°$ entonces el triángulo XBC es isósceles, con ello $XB = BC$, sea $BC = a$;
- Se traza $\overline{BP}$ (P en $\overline{AC}$) tal que : $m\sphericalangle ABP = 40° \Rightarrow m\sphericalangle BPC = 80°$ luego: $CB = PB = PA = a$
- Ubicamos L en $\overline{AB}$ tal que $BL = a$, como $BL = BC$, $m\sphericalangle CBL = 60°$ entonces: ΔCBL es equilátero:
- $\Delta ABX \cong \Delta XBP \cong \Delta PBC$ (LAL) $\Rightarrow$ $Lx = XP = PC$
- Notamos también: $m\sphericalangle LCX = 10°$, $m\sphericalangle XCP = m\sphericalangle PXC = 10°$ y $m\sphericalangle XPA = 20°$;
- $\Delta CLX \cong \Delta XPA$ (LAL) $\Rightarrow$ $m\sphericalangle XAP = m\sphericalangle LCX = 10°$
- Como $m\sphericalangle XAP = 10°$, el gráfico quedaría así:



- Como $m\sphericalangle CAX = 10°$ y $m\sphericalangle ACB = 80°$

$$\Rightarrow m\sphericalangle ASC = 90°$$

$$\therefore \overline{\mathbf{AX}} \perp \overline{\mathbf{BC}}$$

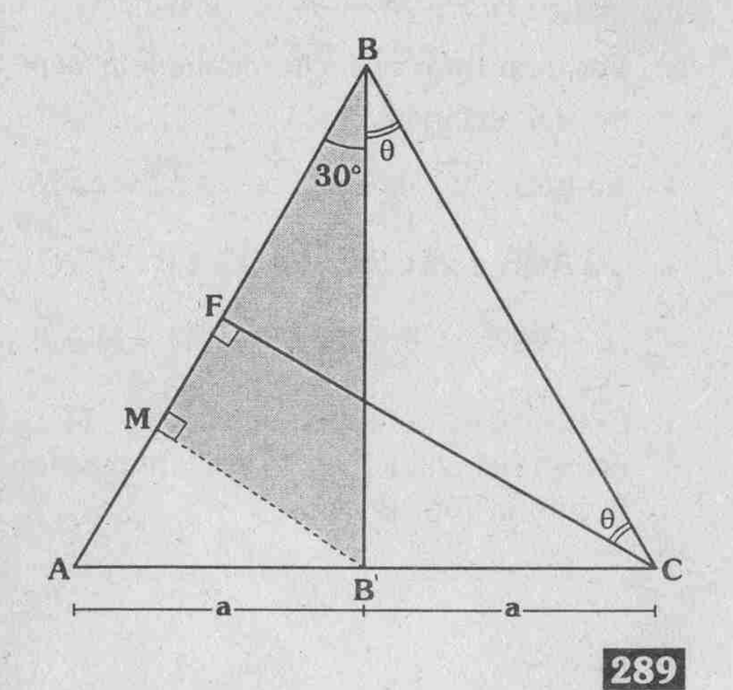
RESOLUCIÓN Nº 10

- Datos:

  $\overline{BB'}$ mediana y $\overline{CF}$ altura del ΔABC ,

  $\overline{BB'} \cong \overline{CP}$; $m\sphericalangle CBB' = m\sphericalangle FCB$

- Por demostrar ΔABC es equilátero.
- Se traza $\overline{B'M} \perp \overline{AB}$ (M en $\overline{AB}$), en el $⊿AFC$ tenemos que $\overline{B'M}$ es base media, por teorema $B'M = \dfrac{FC}{2}$, pero $BB' = FC$.



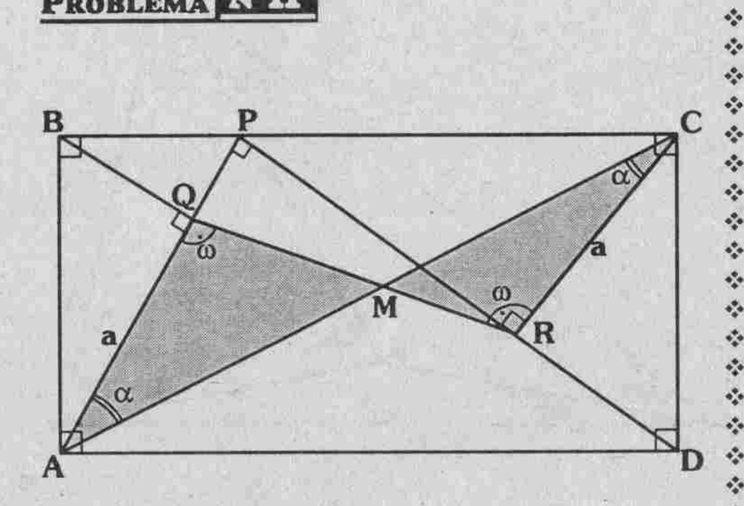
- $\measuredangle$ BMB' : notable $\Rightarrow m\measuredangle FBB' = 30°$
- Sea $m\measuredangle FCB = \theta$ en el $\measuredangle$FBC: $\theta = 30°$
- Como $AB' = B'C$ y

  $m\measuredangle ABB' = m\measuredangle B'BC = 30°$,

  es decir BB' es mediana y bisectriz entonces por teorema $AB = BC$;
- Finalmente tenemos $m\measuredangle ABC = 60°$ y $AB = BC$, por lo tanto:

ΔABC es equilátero.

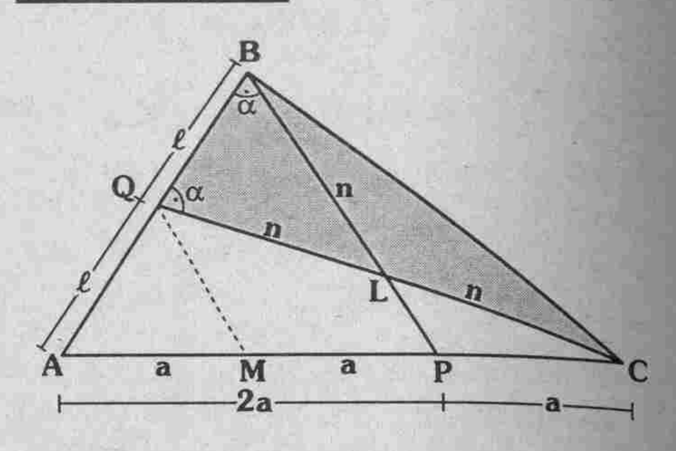
Problema Nº11



- Por demostrar que $\overline{QR}$ contiene al centro del rectángulo.
- Se traza $\overline{AC}$, la cual corta a $\overline{QR}$ en M.
- $\measuredangle AQB \cong \measuredangle CRD \Rightarrow AQ = CR$;
- $\Delta AQM \cong \Delta CRM$ (ALA) $\Rightarrow AM = MC$
- Como M es punto medio de $\overline{AC}$, M es centro del rectángulo, lo cual demuestra la afirmación, pues:

$$M \in \overline{QR}$$

Problema Nº12



- Datos: $\overline{CQ}$ es mediana; $AP = 2(PC)$ y

  $m\measuredangle BQC = m\measuredangle PBQ$
- Por demostrar:

$$m\measuredangle ABC = 90°$$

- Se ubica M punto medio de $\overline{AP}$;
- En ΔABP , $\overline{QM}$ es base media, por teorema $\overline{QM} // \overline{BP}$.
- En el ΔMQC , como $MP = PC$ y $\overline{PL} // \overline{MQ}$, entonces $\overline{PL}$ es base media, por teorema: $QL = LC$.
- ΔQBL isósceles $\Rightarrow QL = LB$
- Finalmente, tenemos:

$$QL = LB = LC$$

$$\Rightarrow \quad m\measuredangle QBC = 90°$$

$$\therefore \quad \mathbf{m\measuredangle ABC = 90°}$$

Resolución Nº 13

- Sean a, b y c las longitudes de tres segmentos, ellos serán las longitudes

de los lados de un triángulo, si:

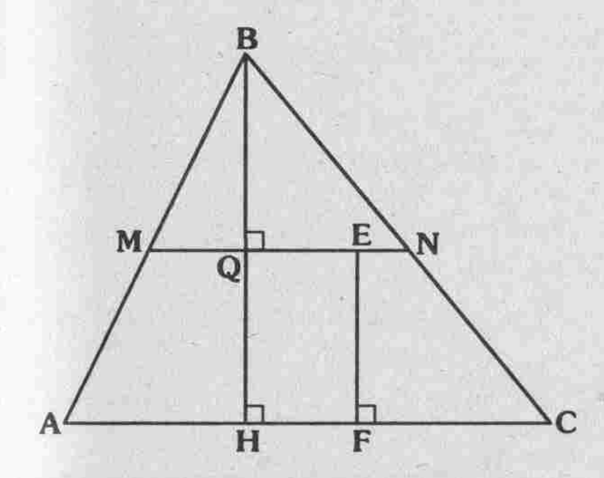
$a < b + c$; $b < a + c$; y $c < a + b$

(teorema de la desigualdad triangular)

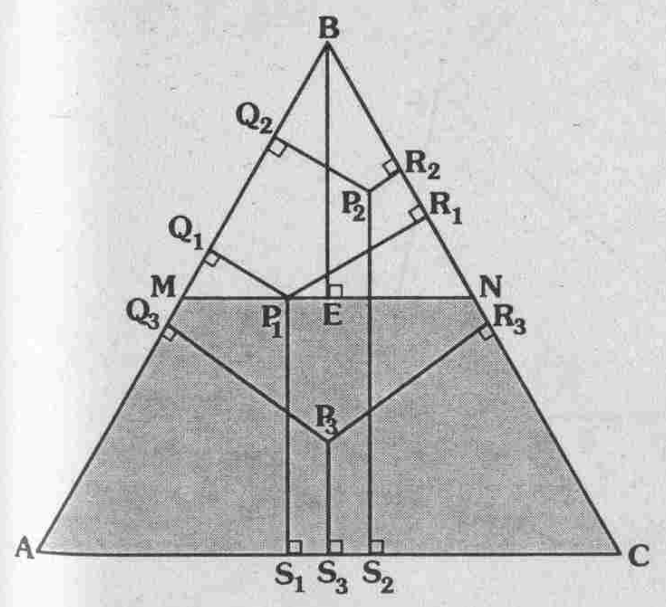
- Basta que no se cumpla cualquiera de las expresiones anteriores para que el triángulo no exista, por ejemplo:

$$a \geq b + c$$

- Usemos el siguiente teorema:



- Si M y N sean puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.
- Se cumple: $BQ = QH = EF$
- En el problema:



- Sea el triángulo ABC equilátero, M y N puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, del teorema anterior.
- Si $P_1 \in \overline{MN} \Rightarrow BE = P_1S_1$
- Como ΔMBN es equilátero

$$\Rightarrow P_1Q_1 + P_1R_1 = BE$$

$$\Rightarrow P_1Q_1 + P_1R_1 = P_1S_1$$

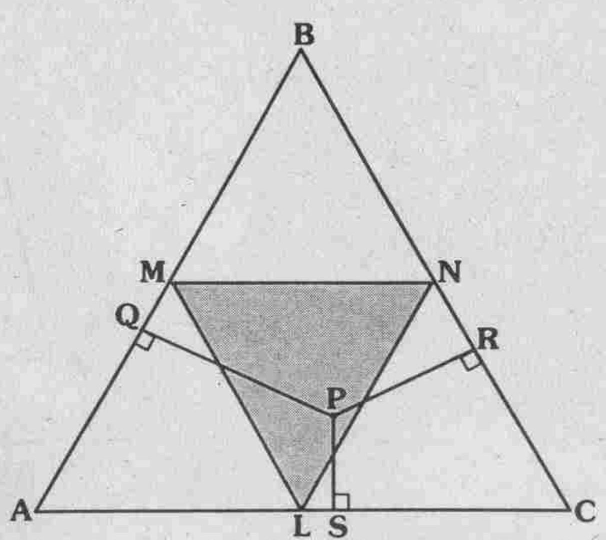
- Es decir, con $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_1R_1}$ y $\overline{P_1S_1}$ no se forma el triángulo.
- Si el punto está en la región interior del ΔMBN, por ejemplo P_2, entonces:

$$P_2S_2 > P_2Q_2 + P_2R_2$$

- Si el punto está en la región interior de AMNC, entonces:

$$P_3S_3 < P_3Q_3 + P_3R_3$$

- Vemos que para P_3 se cumple parte de la condición de existencias, analicemos para las tres bases medias entonces, la región donde se formará el triángulo es la intersección de las regiones, es decir:



- Sea M, N y L puntos medios de los lados, entonces deacuerdo a lo anterior, tendríamos.
- Si P está en la región interior del triángulo ΔMNL entonces:

$$PS < PQ + PR \quad ; \quad PQ < PR + PS$$

$$\text{y} \quad PR < PQ + PS$$

- Es decir existe el triángulo de lados:

$$\overline{PS}, \ \overline{PQ} \ \text{y} \ \overline{PS}$$

RESOLUCIÓN Nº 14

Parte I

- Por demostrar que:

$$x = a + b$$

- Se prolonga $\overline{BC}$ y $\overline{AE}$ hasta que se corten en M.
- En el ΔABM, $\overline{BE}$ es mediana y altura

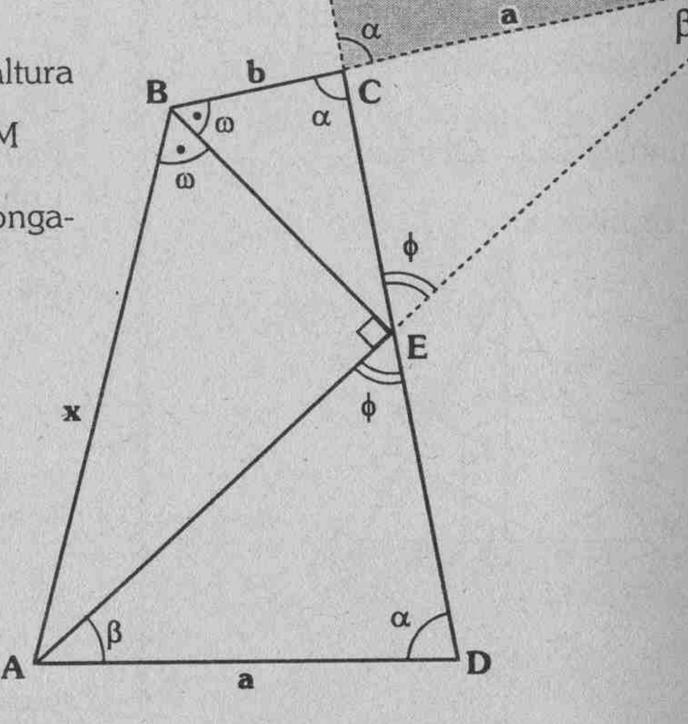
$$\Rightarrow AB = BM = x \quad y \quad AE = EM$$

- Se traza $\overline{MF} // \overline{AD}$, F en la prolongación de $\overline{DC}$.
- $\Delta AED \cong \Delta MEF$ (ALA)

$$\Rightarrow FM = AD = a$$

- ΔFCM: isósceles

$$\Rightarrow FM = MC = a$$



- Finalmente:

$$\underbrace{AB}_{x} = \underbrace{BM}_{a+b}$$

Parte II

- Ahora AB=a+b, demostremos:

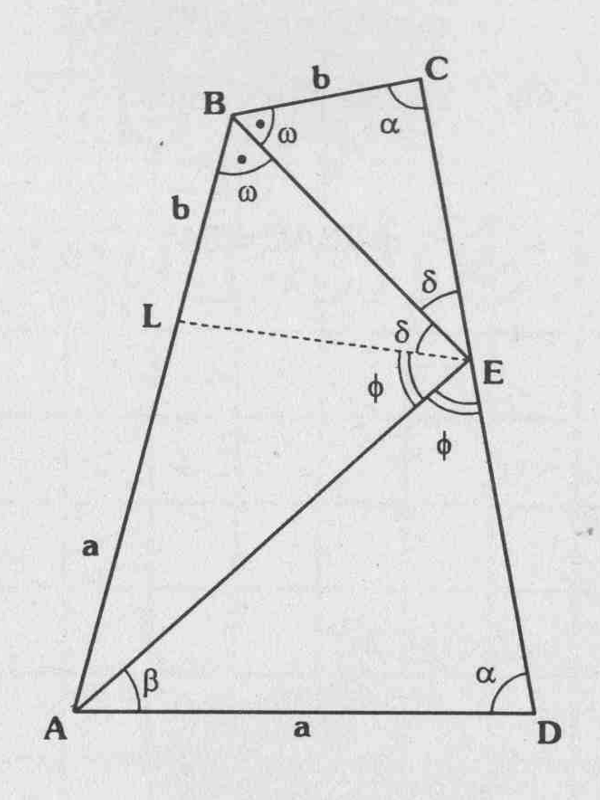
$$m\sphericalangle AEB = 90°$$

- Se traza $\overline{EL}$ tal que CB=BL=b

$\Rightarrow \quad \Delta AEB \cong \Delta ELB$ (LAL)

$\Rightarrow \quad m\sphericalangle CEB = m\sphericalangle BEL$ y

$m\sphericalangle BLE = m\sphericalangle BCE = \alpha$



- ⌂ALED inscriptible (o cíclico)

$\Rightarrow$ como AL=AD

$\Rightarrow \quad m\sphericalangle AEL = m\sphericalangle AED = \phi$

- Del gráfico: $2\alpha + 2\phi = 180°$

$$\alpha + \phi = 90°$$

$$\therefore \quad m\sphericalangle AEB = 90°$$

RESOLUCIÓN Nº 15

- Nos piden:

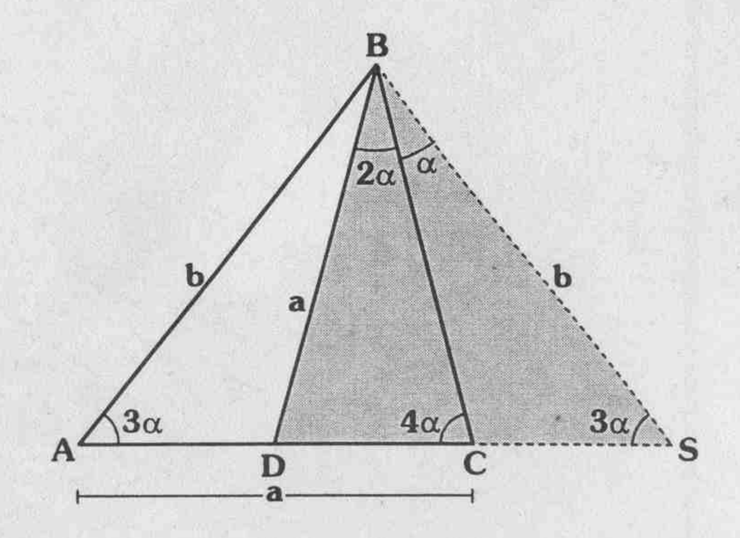
$$m\sphericalangle BAC$$

$$m\sphericalangle BAC = 3\alpha$$

- Se prolonga $\overline{AC}$ hasta S tal que:

$$m\sphericalangle ASB = 3\alpha$$

$$\Rightarrow \quad m\sphericalangle CBS = \alpha$$



- ΔABS : isósceles $\Rightarrow$ $AB=BS=b$
- $\Delta BAC \cong \Delta SBD$ (LAL)

  $\Rightarrow$ $m\sphericalangle BSD = m\sphericalangle ABC = 3\alpha$
- ΔABC : $3\alpha + 3\alpha + 4\alpha = 180°$

  $\Rightarrow$ $\alpha = 18°$

  $\therefore$ **$m\sphericalangle BAC = 54°$**



Enunciado de los Problemas Propuestos

Ciclos

- ANUAL
- CEPRE-UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO
- OLIMPIADAS

Congruencia de Triangulos

Geometría

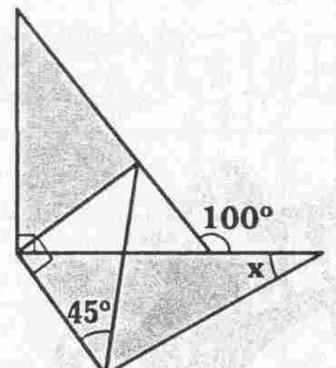


Problemas Propuestos

Ciclo Anual

PROBLEMA Nº 1

Las regiones sombreadas son congruentes, calcule x.



A) 10°

B) 12°

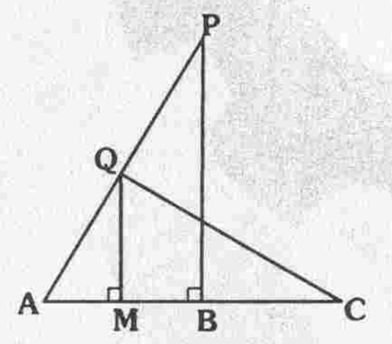
C) 15°

D) 20°

E) 25°

PROBLEMA Nº 2

En el gráfico, las regiones QMC y ABP son congruentes $AM = MB = 4$ calcule BC.



A) 20

B) 8

C) 16

D) 12

E) 8

PROBLEMA Nº 3

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes. Calcule x.

A) 70°

B) 40°

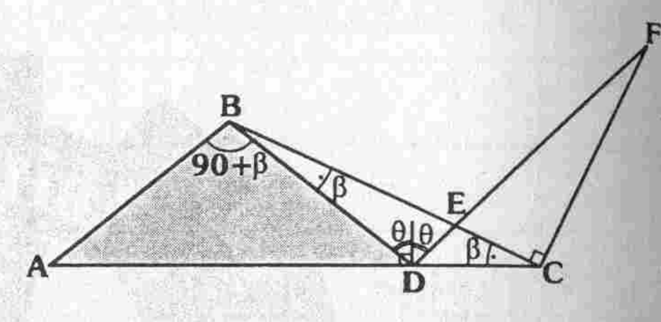
C) 35°

D) 80°

E) 50°

PROBLEMA Nº 4

En el gráfico, AC=10 y FC=6 calcule el perímetro de la región sombreada.

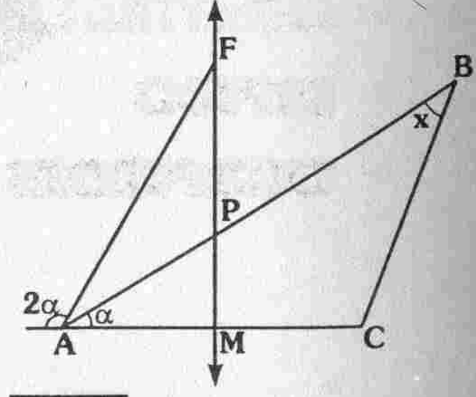


A) 8 B) 10 C) 12

D) 14 E) 16

PROBLEMA Nº 5

En el gráfico, $\overline{FM}$ es mediatriz de $\overline{AC}$, $\overline{AF} // \overline{BC}$ y $BP = 2(PM)$. Calcule x.



A) 10°

B) 20°

C) 30°

D) 25°

E) 15°

PROBLEMA Nº 6

En el triángulo ABC se traza la mediana BM, si $AB = 2$ y $BC = 8$. Calcule el valor entero de BM.

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 7

En el triángulo ABC, se ubica M punto medio de $\overline{AB}$ y P en $\overline{BC}$ es tal que:

$$PC = 3(BP) = 3(PM)$$

Calcule $m\sphericalangle BAC$.

A) 30° B) 60° C) 90°
D) 75° E) 120°

PROBLEMA Nº 8

En el gráfico, $AB = BC$, calcule α.

A) 15°
B) 18°30'
C) 26°30'
D) 22°30'
E) 16°

PROBLEMA Nº 9

En el gráfico, $AC = \sqrt{5}(AB) = \sqrt{5}(AD)$. Calcule x.

A) 30°
B) 45°
C) 53°
D) 37°
E) 60°

PROBLEMA Nº 10

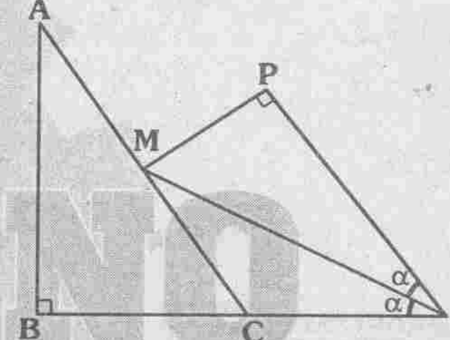
En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, si $AB = 8$ y $CD = 9$. Calcule EB.

A) 15
B) 17
C) 16
D) 14
E) 13

PROBLEMA Nº 11

En el gráfico, $AM = MC$ y $AB = 8$, calcule PM.

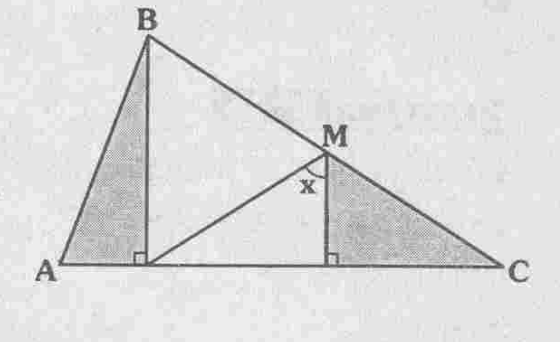
A) 8
B) 4
C) 2
D) 5
E) 6



PROBLEMA Nº 12

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes y $BM = MC$, calcule x.

A) 76°
B) 74°
C) 53°
D) $\frac{143°}{2}$
E) $\frac{127°}{2}$



PROBLEMA Nº 13

En el triángulo LMN se traza la perpendicular MP a la bisectriz interior MP a la bisectriz interior LQ. Si $2(LM) = LN$ y

$LP=9$, calcule PQ.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4,5 E) 5

PROBLEMA Nº 14

En el gráfico, $AQ=12$, $BD+PQ=15$ y $AB=AP$, calcule AB.

A) 10

B) 8

C) 7,5

D) 7,2

E) 6

PROBLEMA Nº 15

En el triángulo ABC, se traza la altura BH y la mediana CM, $MC=BC$ y $AH=HB$. Calcule $m\measuredangle MCB$.

A) 30° B) 37° C) 45°

D) 53° E) $\dfrac{53°}{2}$

PROBLEMA Nº 16

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, si $AQ=PC$, $AP=BC$ y $QP=PB$, calcule x.

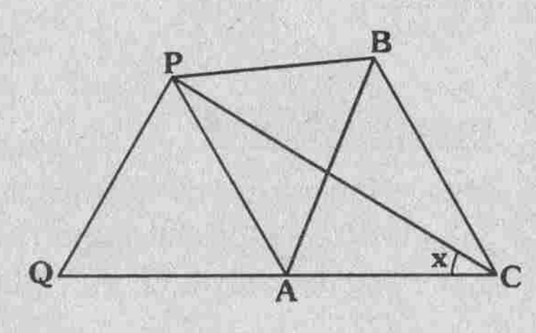
A) 10°

B) 15°

C) 20°

D) 30°

E) 40°



PROBLEMA Nº 17

En el gráfico, $\overline{AB}//\overline{CD}$, $AB=CE$ y $BC=6$, calcule ED.

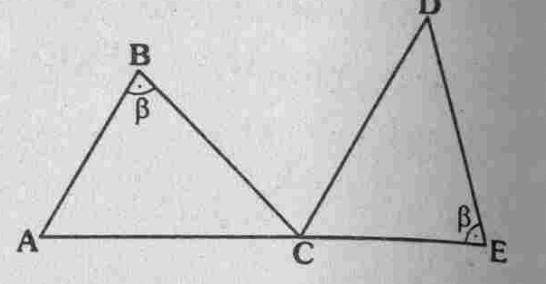
A) 3

B) 4,5

C) 6

D) 9

E) 8



PROBLEMA Nº 18

En el gráfico, $BC=5$ y $CD=4$. Calcule x.

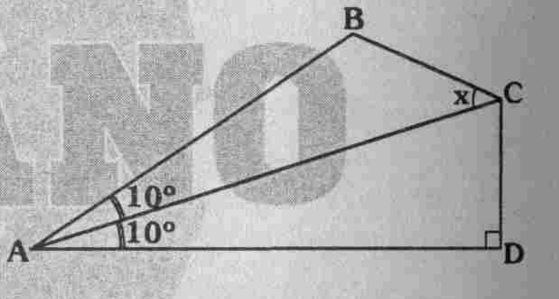
A) 37°

B) 27°

C) 33°

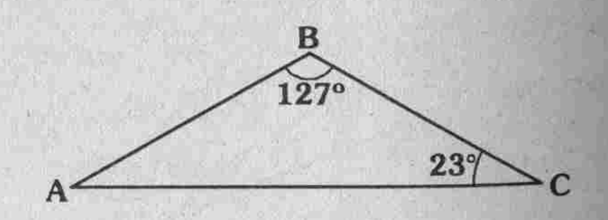
D) 43°

E) 47°



PROBLEMA Nº 19

En el gráfico $AC=16$, calcule $AB+BC$



A) $4(2\sqrt{3}+1)$ B) $3(\sqrt{3}+1)$

C) $2\sqrt{3}+1$ D) $2(4\sqrt{3}+5)$

E) $6+\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 20

En el gráfico, $AQ=QP$ y $QH=2,1$.

Calcule AC.

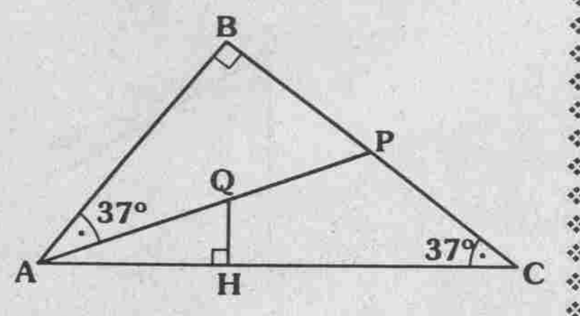
A) 25

B) 20

C) 35

D) 15

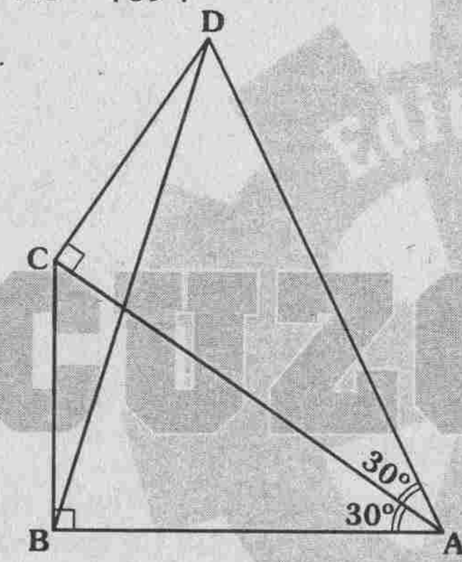
E) 7,5



PROBLEMA Nº 21

Del gráfico, $AB=\sqrt{39}$.

Calcule BD.



A) $13\sqrt{3}$

B) $6\sqrt{3}$

C) 13

D) $\frac{13}{3}\sqrt{3}$

E) $4\sqrt{13}$

PROBLEMA Nº 22

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior AD, tal que $CD=4(BD)$,

$m\sphericalangle ABC=127°, m\sphericalangle DAC=45°-m\sphericalangle BCA$.

Calcule $m\sphericalangle BCA$.

A) 16° B) 30° C) 15°

D) 37°/2 E) 53°/2

PROBLEMA Nº 23

En el gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AC}$ y $AB=PC$, calcule x.

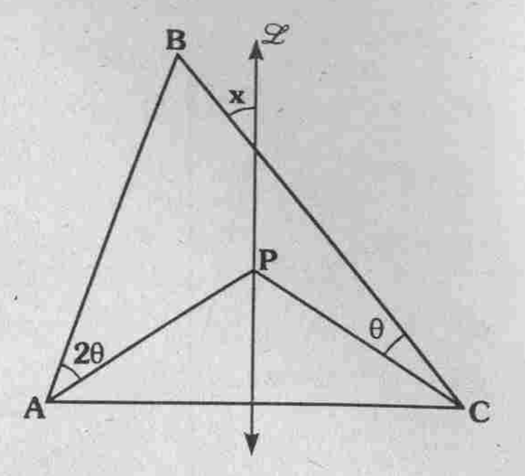
A) 30°

B) $\frac{45°}{2}$

C) 60°

D) $\frac{53°}{2}$

E) $\frac{37°}{2}$



PROBLEMA Nº 24

En el gráfico, $AM=MC$, $AB=4$ y $BC=6$. Calcule HM

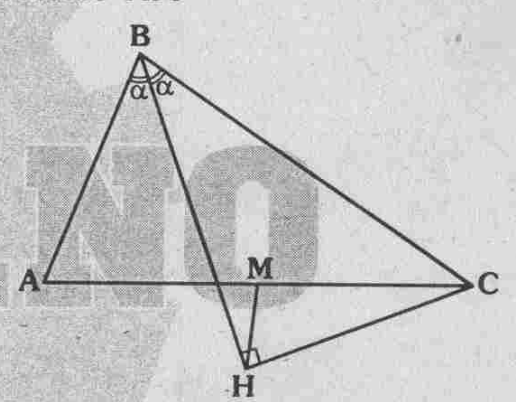
A) 1

B) 1,5

C) 2

D) 4

E) 3



PROBLEMA Nº 25

En el triángulo ABC, la mediatriz de $\overline{BC}$ iinterseca a $\overline{AC}$ en Q, tal que $AB=2(QC)$ y $m\sphericalangle ACB=45°$. Calcule $m\sphericalangle BAC$.

A) 37° B) $\frac{53°}{2}$ C) 16°

D) $\frac{37°}{2}$ E) 30°

PROBLEMA Nº 26

En el gráfico $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ respectivamente.

Si $AP=BC=PD$, calcule x.

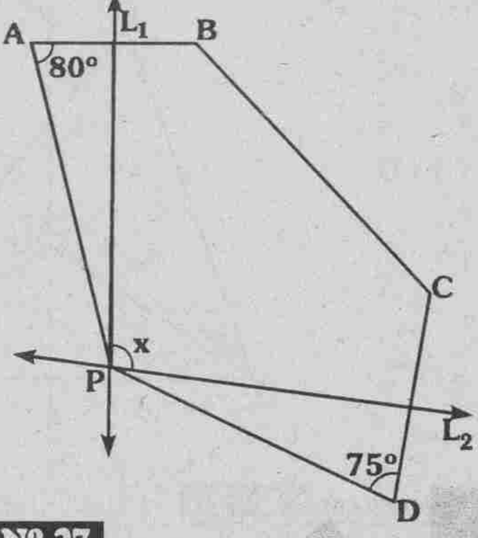
A) 90°

B) 85°

C) 95°

D) 105°

E) 115°



PROBLEMA Nº 27

En el gráfico, PC = 2(AP).

Calcule x.

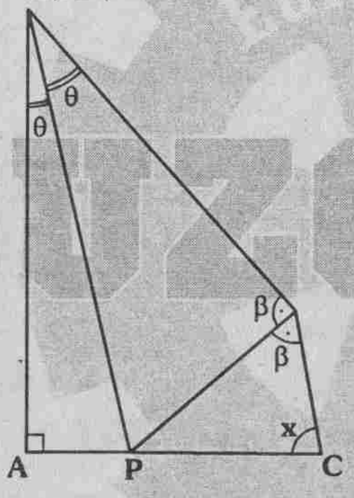
A) 53°

B) 60°

C) 54°

D) 73°

E) 30°



PROBLEMA Nº 28

En el triángulo ABC se traza la mediana AM y la altura $\overline{BH}$, $\overline{AM} \cap \overline{BH} = \{P\}$. Si AP = PM y m∢ABH = 37°.

Calcule m∢MAH.

A) $\frac{37°}{2}$ B) $\frac{53°}{2}$ C) 16°

D) 18° E) $\frac{45°}{2}$

PROBLEMA Nº 29

En el gráfico: BP = 3 y m∢MAC = 2(m∢BAM), Halle MN.

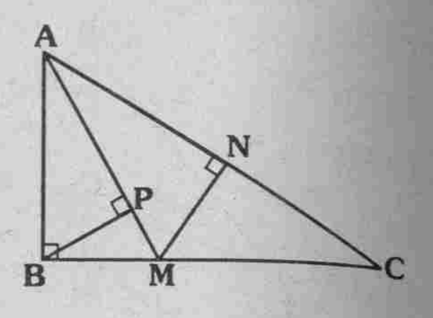
A) 1,5

B) 3

C) 6

D) 4,5

E) $3\sqrt{3}$



PROBLEMA Nº 30

En el gráfico, AD=BC. Calcule θ.

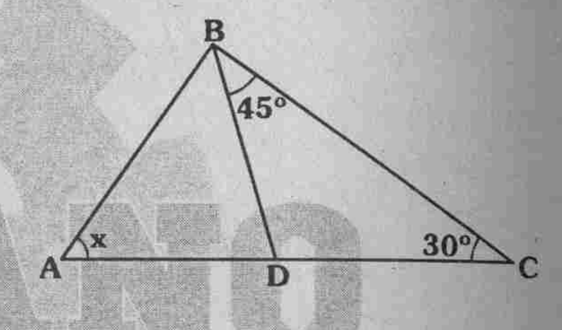
A) 30°

B) 45°

C) 50°

D) 60°

E) 40°



PROBLEMA Nº 31

Dos lados de un triángulo miden 2 y 10, calcule la longitud de la mediana relativa al tercer lado, si es entero.

A) 5 B) 4 C) 8

D) 10 E) 3

PROBLEMA Nº 32

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BD.

Si AB = CD y

m∢BAC = 2(m∢BCA) = 40°

Calcule m∢DBC.

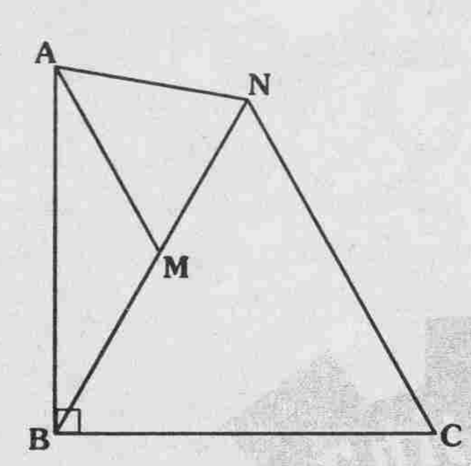
A) 10° B) 20° C) 30°

D) 40° E) 25°

PROBLEMA Nº 33

En el gráfico: $AB = BC = CN$; $BM = MN$; $AM = 5$ y $BM = 4$.

Calcule AN.



A) $\sqrt{19}$

B) $\sqrt{13}$

C) $\sqrt{14}$

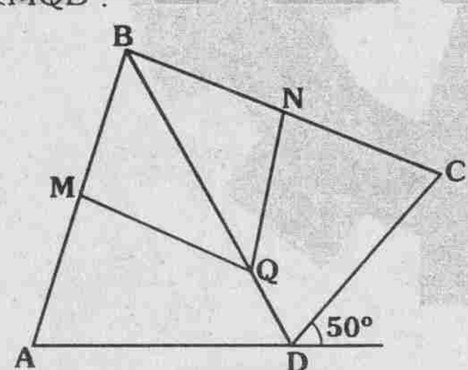
D) $\sqrt{21}$

E) $\sqrt{17}$

PROBLEMA Nº 34

En el gráfico, $AD = DC$; $BQ = CD + QD$; M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

Calcule $m\measuredangle MQB$.



A) 50°

B) 25°

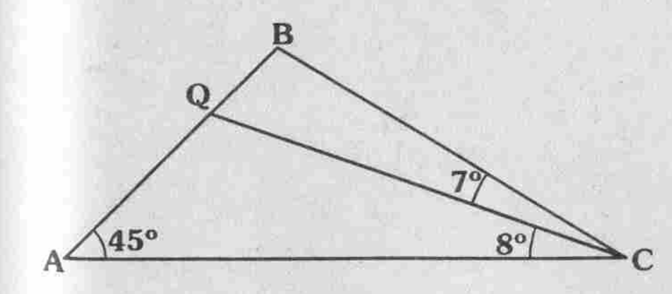
C) 60°

D) 65°

E) 55°

PROBLEMA Nº 35

En el gráfico, $AC = 12\sqrt{2}$, calcule QB.



A) $2-\sqrt{3}$

B) $8-3\sqrt{3}$

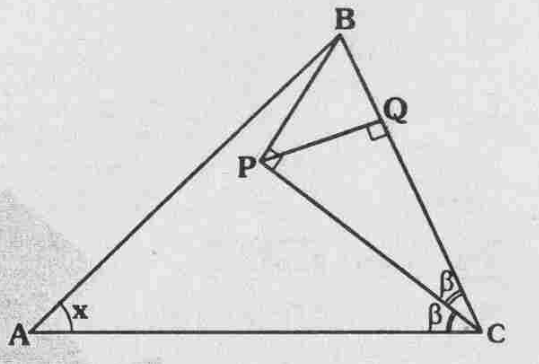
C) $9-4\sqrt{3}$

D) $3\sqrt{3}-4$

E) $4\sqrt{3}-5$

PROBLEMA Nº 36

En el gráfico, $AB = 4(PQ)$, calcule x.



A) 30°

B) 37°

C) 14°

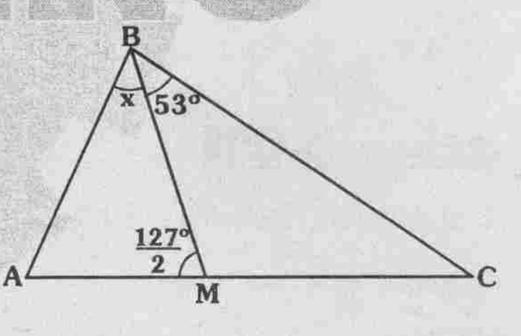
D) 53°

E) 28°

PROBLEMA Nº 37

En el gráfico, $AB = 1$ y $BC = 5$.

Calcule x.



A) 37°

B) 53°

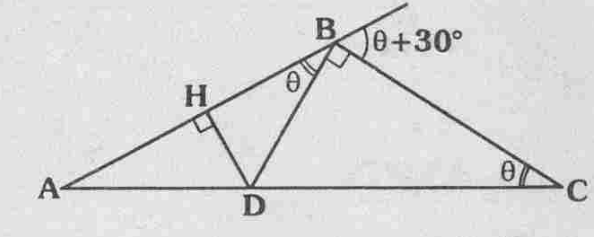
C) 30°

D) 39°/2

E) 127°/3

PROBLEMA Nº 38

En el gráfico, $BD = 4$, calcule $\dfrac{BA}{HC}$.



A) 1

B) 2

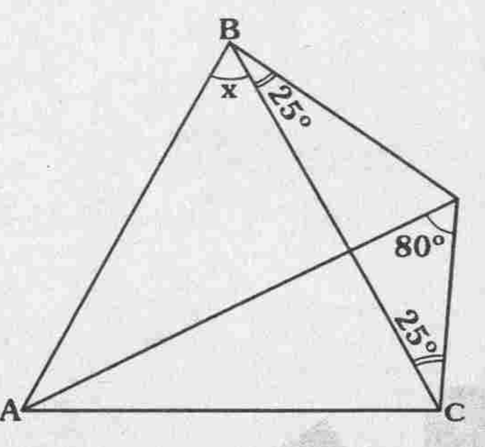
C) $2\sqrt{3}$

D) $3\sqrt{3}$

E) $2\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

PROBLEMA Nº 39

En el gráfico, $AB = BC$, calcule x.



A) 70°
B) 50°
C) 100°
D) 80°
E) 65°

PROBLEMA Nº 40

Se tiene el triángulo ABC, $AB = 10$ y $BC = 20$, se traza la bisectriz interior BD, si $m\measuredangle ABD = 53°$, calcule la distancia del punto medio de $\overline{AC}$ a $\overline{BD}$.

A) 3 B) 2 C) 5
D) 4 E) 1

PROBLEMA Nº 41

Del gráfico, BD=BC, DC=8 y AB=6. Calcule x.

A) 4°
B) 5°
C) 8°
D) 7°
E) 15°

PROBLEMA Nº 42

En el triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la ceviana interior $\overline{CN}$, tal que $AN = 3(NB)$ y $m\measuredangle CAB = 2(m\measuredangle NCB)$. Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 30° B) 26,5° C) 53°
D) 45° E) 37°

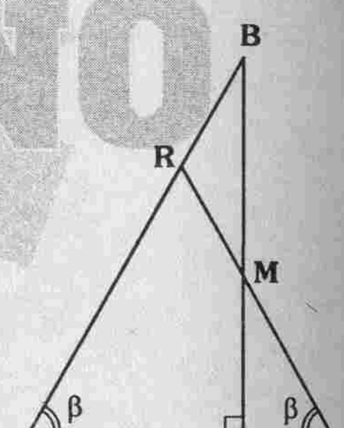
PROBLEMA Nº 43

En el triángulo ABC, se cumple que $AB + BC = 14$, M es punto medio de $\overline{AC}$ y H es el pie de la perpendicular trazada desde C a la bisectriz exterior por B. Calcule MH.

A) 7 B) 14 C) 3,5
D) 10 E) 5

PROBLEMA Nº 44

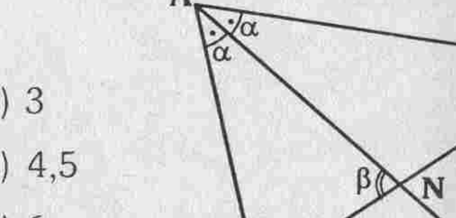
En el gráfico, BM=MH y $RM = 3$. Calcule AB.

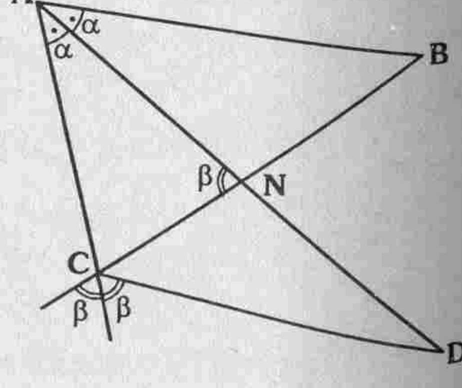


A) 9
B) 12
C) 10
D) 8
E) 6

PROBLEMA Nº 45

En el gráfico, $BN = 6$, calcule CD.



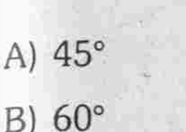


A) 3
B) 4,5
C) 6
D) 9
E) 12

PROBLEMA Nº 46

Según el gráfico, $BQ = AM = MC$ y $m\sphericalangle PBQ = 80°$.

Calcule x.



A) 45°
B) 60°
C) 40°
D) 25°
E) 35°

PROBLEMA Nº 47

En el gráfico, $BC = AD$ y $\alpha + \theta = 90°$. Calcule x.



A) 60°
B) 30°
C) 45°
D) 37°
E) 53°

PROBLEMA Nº 48

En el triángulo ABC, se cumple $m\sphericalangle ABC = 70°$, la mediatriz de $\overline{AC}$ interseca a $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ en M y N respectivamente, de modo que $AB = NC$, luego se traza la altura AH.

Calcule $m\sphericalangle HMN$.

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 35° E) 50°

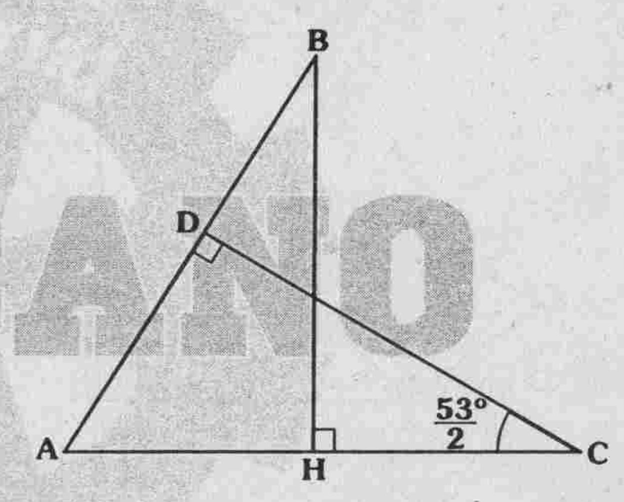
PROBLEMA Nº 49

En el triángulo ABC, se cumple $m\sphericalangle ABC = 100°$, en $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ se ubican M y N respectivamente, tal que $AM = MC$ y $AN = NB + BC$. Calcule $m\sphericalangle ANM$.

A) 40° B) 50° C) 80°
D) 100° E) 45°

PROBLEMA Nº 50

En el gráfico, $HC = 2(AH)$, calcule $\dfrac{BD}{AD}$.



A) 3/2 B) 2/3 C) 4/3
D) 3/4 E) 1

PROBLEMA Nº 51

Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, en la región exterior relativa a $\overline{AC}$ se ubica P, tal que $m\sphericalangle PAC = 90°$, $PA = AC$ y $5(AB) = 3(PB)$.

Calcule $m\sphericalangle APB$.

A) 37° B) $\dfrac{69°}{2}$ C) 30°
D) $\dfrac{53°}{2}$ E) $\dfrac{75°}{2}$

PROBLEMA Nº 52

En el triángulo ABC, se traza la mediana AM tal que $m\measuredangle MAB = 2(m\measuredangle CAM)$ y $m\measuredangle ABC = 90° + m\measuredangle MAC$.

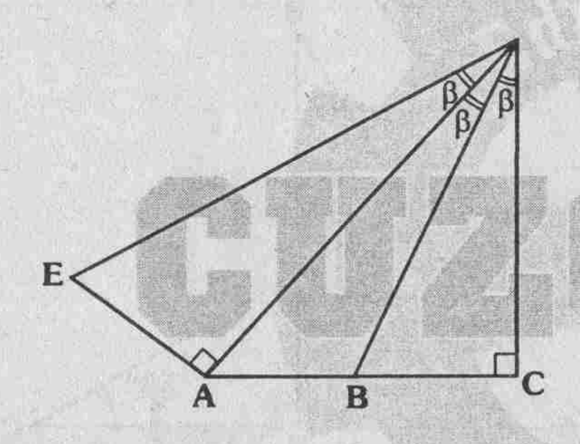
Calcule $m\measuredangle MAC$.

A) 15° B) 30° C) 37°

D) 18°30' E) 22°30'

PROBLEMA Nº 53

Según el gráfico, $AE = 8$, calcule AB.

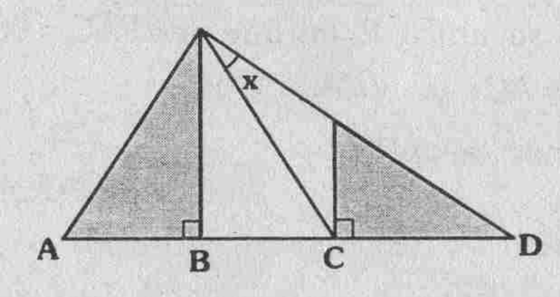


A) 4 B) 5 C) 6

D) 7 E) 8

PROBLEMA Nº 54

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes y $CD = 2(AB)$. Calcule x.

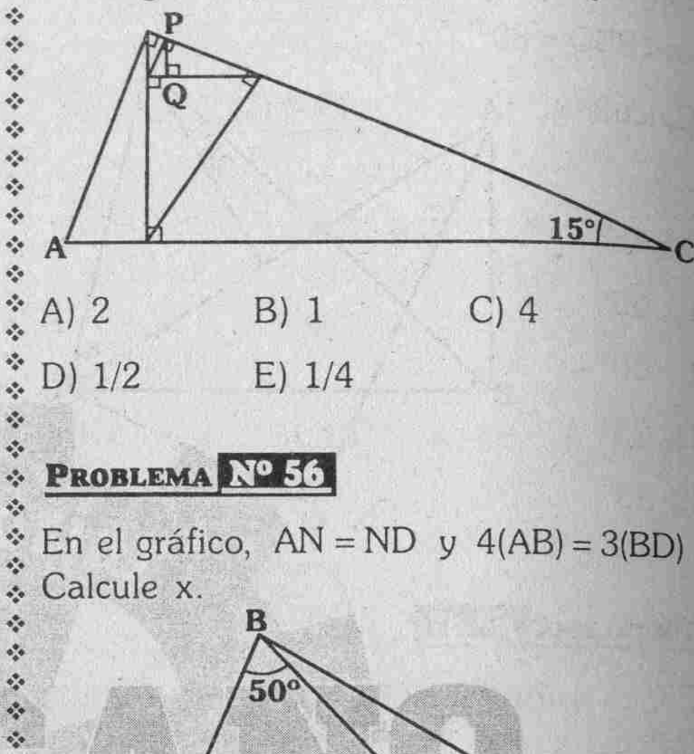


A) 8° B) 10° C) 15°

D) 18°30' E) 26°30'

PROBLEMA Nº 55

En el gráfico, AC=32, calcule PQ.

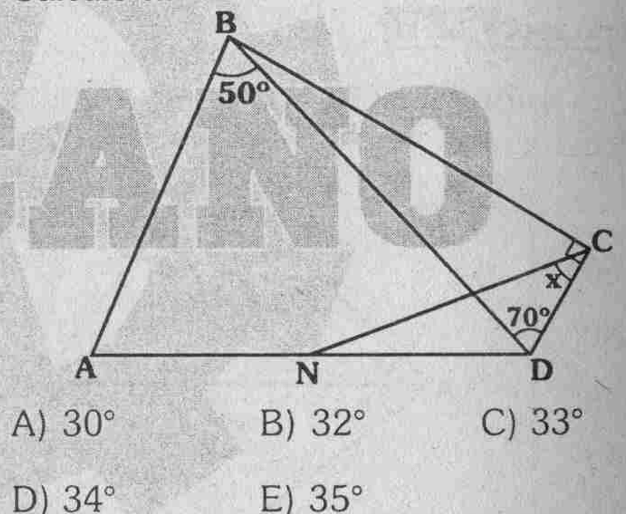


A) 2 B) 1 C) 4

D) 1/2 E) 1/4

PROBLEMA Nº 56

En el gráfico, $AN = ND$ y $4(AB) = 3(BD)$. Calcule x.



A) 30° B) 32° C) 33°

D) 34° E) 35°

PROBLEMA Nº 57

En el gráfico $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente.

Calcule x.

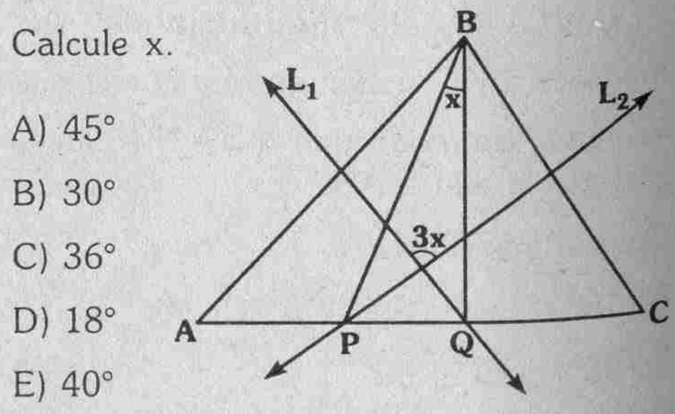
A) 45°

B) 30°

C) 36°

D) 18°

E) 40°



PROBLEMA Nº 58

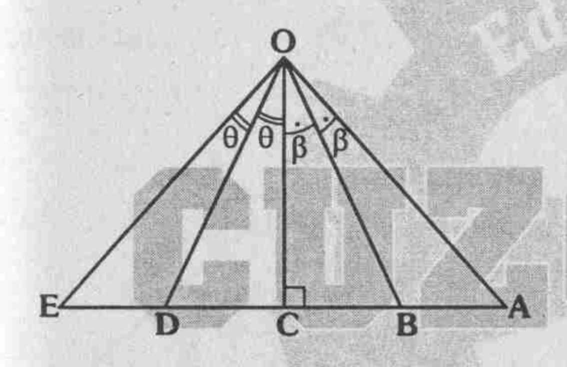
Se tiene el triángulo ABC, se ubica E punto medio de $\overline{AB}$ y D en la prolongación de $\overline{CB}$, tal que $m\measuredangle BDE = m\measuredangle ACB$. Si $AC = 10$. Calcule ED.

A) 2,5 B) 5 C) 7,5

D) 10 E) 20

PROBLEMA Nº 59

En el gráfico: $4(AB) = 5(BC)$ y $ED = \sqrt{2}(CD)$. Calcule $m\measuredangle BOD$



A) 30° B) 37° C) 40°

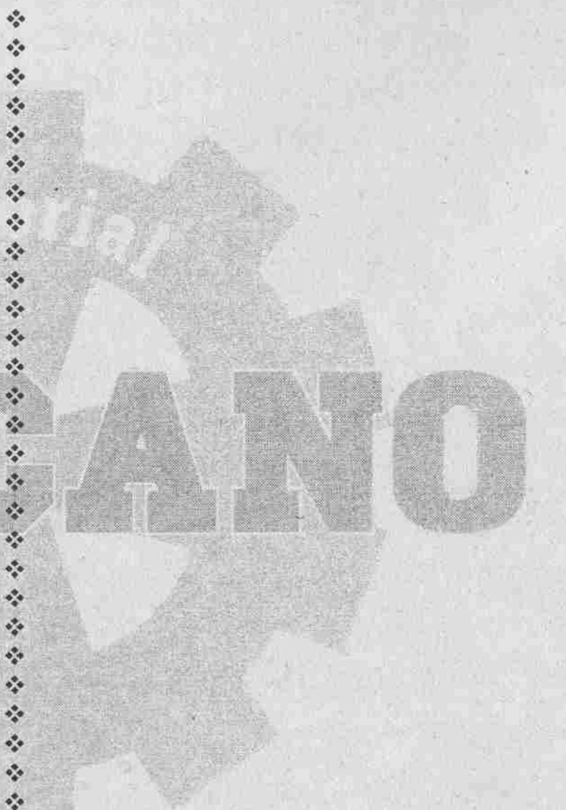
D) 41° E) 74°

PROBLEMA Nº 60

Se tiene el triángulo ABC; se ubican P en $\overline{AB}$, Q en $\overline{AC}$ y R en $\overline{BC}$, tal que $AP = QC$, $RC = AQ$ y $PQ = QR$. Si $m\measuredangle PQR = 2(m\measuredangle ABC)$. Calcule $m\measuredangle ABC$

A) 30° B) 36° C) 18°

D) 20° E) 45°





PROBLEMA Nº 61 [1er. Seminario 2008-II]

En el triángulo isósceles ABC (AB = BC) se traza la bisectriz interior AS, desde M se traza $\overline{SM}$ perpendicular a la bisectriz exterior trazada desde B, M en dicha bisectriz. Si AB = a y BM = b.

Calcule BS.

A) $a+b$ B) $\frac{a+b}{2}$ C) $a-b$

D) $a-2b$ E) $a+2b$

PROBLEMA Nº 62 [1er. Seminario 2008-II]

En el triángulo isósceles ABC (AB = BC) se cumple m∢ABC = 20°, sobre $\overline{BC}$ se ubica F, de modeo que BF = AC.

Calcule m∢BAF.

A) 5° B) 10° C) 15°

D) 20° E) 30°

PROBLEMA Nº 63 [1er. Seminario 2008-II]

Dado el triángulo ABC, se cumple m∢A = 2(m∢C), se traza la altura BP(P en $\overline{AC}$). Si AB = m y AC = n.

Calcule AP.

A) $\frac{m+n}{2}$ B) $\frac{m+2n}{2}$ C) $\frac{n-m}{2}$

D) $\frac{2m+n}{2}$ E) $\frac{3m-n}{2}$

PROBLEMA Nº 64 [1er. Seminario 2008-II]

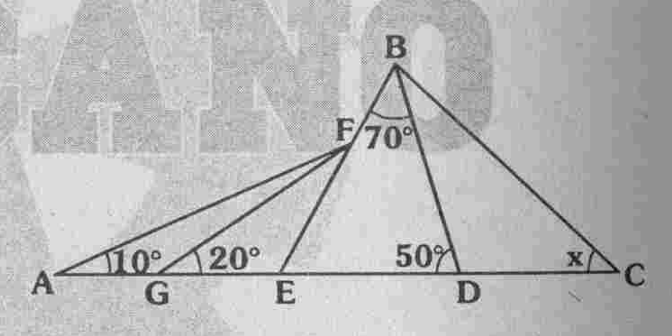
En un triángulo acutángulo ABC, m∢B = 2(m∢A) y la ceviaba CF es tal que BC = AF. Demostrar que:

m∢ACF = m∢BAC

PROBLEMA Nº 65 [1er. Seminario 2008-II]

En el gráfico, AE = EC y GE = ED.

Calcule x.



A) 60° B) 45° C) 30°

D) 22,5° E) 20°

PROBLEMA Nº 66 [Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC, la m∢BAC = 25°, m∢ACB = 5°, se ubica D exterior y relativo a $\overline{AC}$ tal que AD = BD, si m∢ABD = 85°.

Calcule m∢BDC.

A) 50° B) 60° C) 85°

D) 65° E) 80°

PROBLEMA Nº 67 [Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC, sobre $\overline{AC}$ se ubica M tal que $\overline{AM} \cong \overline{MC} \cong \overline{AB}$ luego se traza la mediana AQ del triángulo ABC y la mediana $\overline{QS}$ del triángulo AQM, si $m\measuredangle BAS = 56°$.

Calcule $m\measuredangle SQM$.

A) 14° B) 18° C) 28°
D) 45° E) 56°

PROBLEMA Nº 68 [Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC(AB = BC) se traza la bisectriz interior AF; luego en el triángulo AFC, se trazan las bisectrices interior y exterior del ángulo AFC, cortando en J y L a $\overline{AC}$, si AF = b.

Calcule JL.

A) b B) $b\sqrt{2}$ C) $b\sqrt{3}$
D) $\frac{3b}{2}$ E) 2b

PROBLEMA Nº 69 [Seminario 2008-I]

En el gráfico, AB = BC = CD

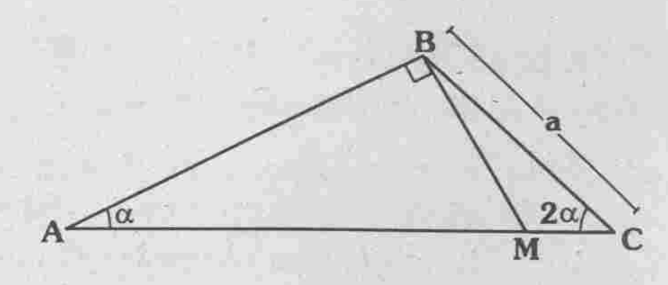
Calcule x.

A) 60°
B) 62°
C) 64°
D) 58°
E) 65°

B, C, 26°, 86°, A, x, D

PROBLEMA Nº 70 [1er. Seminario 98-II]

En el gráfico, C está en la prolongación de $\overline{AM}$, ¿entre que valores está AC?



A) $\left\langle 2a;\frac{5a}{2}\right\rangle$ B) $\left\langle \frac{5a}{2};3a\right\rangle$

C) $\left\langle \frac{14a}{5};\frac{7a}{2}\right\rangle$ D) $\langle 2a;3a\rangle$

E) $\left\langle 2a;\frac{13a}{4}\right\rangle$

PROBLEMA Nº 71 [1er. Seminario 98-II]

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior AM, luego se traza $\overline{MN}$ paralelo a $\overline{AC}$ (N en $\overline{AB}$) y la bisectriz ND del ángulo MNA (D en $\overline{AC}$).

Si: $m\measuredangle ABC - m\measuredangle ACB = 80°$ y

$m\measuredangle MDN = m\measuredangle BMD$.

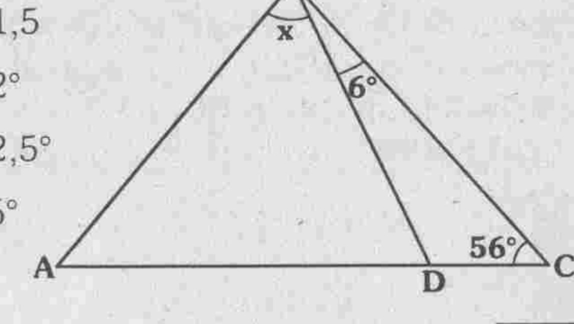
Calcule $m\measuredangle NDM$.

A) 60° B) 56° C) 66°
D) 70° E) 80°

PROBLEMA Nº 72 [1er. Seminario 98-II]

En el gráfico AD = BC, calcule x.

A) 60°
B) 61,5
C) 62°
D) 62,5°
E) 56°



PROBLEMA Nº 73 [1er. Seminario 98-II]

Dado el triángulo isósceles ABC(AB=BC),

a) Sobre la base se ubica M, demostrar que la suma de distancias de M sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, es igual a una de las alturas congruentes del triángulo isósceles.

b) Si el punto M se encuentra en la prolongación de la base, demuestre que la longitud de una de las alturas congruentes es igual a la diferencia de distancias a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

PROBLEMA Nº 74 [1er. Seminario 98-II]

Dos rectas paralelas L_1 y L_2 son cortadas por otras rectas paralelas L_3 y L_4 en los puntos A, B, C y D; siendo $\{A\} = \overleftrightarrow{L_2} \cap \overleftrightarrow{L_3}$. Si las distancias de A a $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_4}$ son "a" y "b" $(a < b)$; $\{D\} = \overleftrightarrow{L_2} \cap \overleftrightarrow{L_4}$, siendo F la intersección de las bisectrices de los ángulos en A y D.

Calcule la distancia de F a $\overleftrightarrow{L_1}$.

A) $\dfrac{a+b}{2}$ B) $a-b$ C) $\dfrac{2a+b}{2}$

D) $\dfrac{2a-b}{2}$ E) $\dfrac{2a-b}{3}$

PROBLEMA Nº 75 [1er. Seminario 98-II]

En el triángulo rectángulo ABC recto en B, la bisectriz interior AM corta a la altura BH en O. Sobre $\overline{OM}$ se ubica un punto de tal forma que las distancias de dicho punto al cateto BC y a la altura BH suman 7. Si $AB = 14$. Calcule AC.

A) 25 B) $14\sqrt{2}$ C) 38

D) 28 E) 30

PROBLEMA Nº 76 [1er. Seminario 98-II]

En el gráfico, $AC = CD$, $BM = MD$ y $BC = 8$.

Calcule MN.

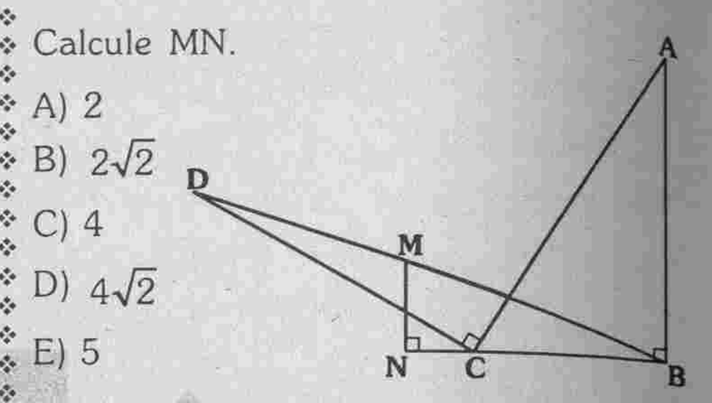
A) 2

B) $2\sqrt{2}$

C) 4

D) $4\sqrt{2}$

E) 5



PROBLEMA Nº 77

Por el vértice B del triángulo ABC se traza $\overline{BP}$ perpendicular a la bisectriz de A, luego por P. Se traza la paralela a $\overline{AC}$ que corta a $\overline{BC}$ en Q. Calcule la medida del segmento PQ. Sabiendo que:

$$AB = 6\mu \quad y \quad AC = 8\mu$$

A) 1μ B) 2μ C) 3μ

D) 4μ E) 5μ

PROBLEMA Nº 78 [1er. Seminario 97-II]

En el gráfico, $AB = DC$. Calcule x

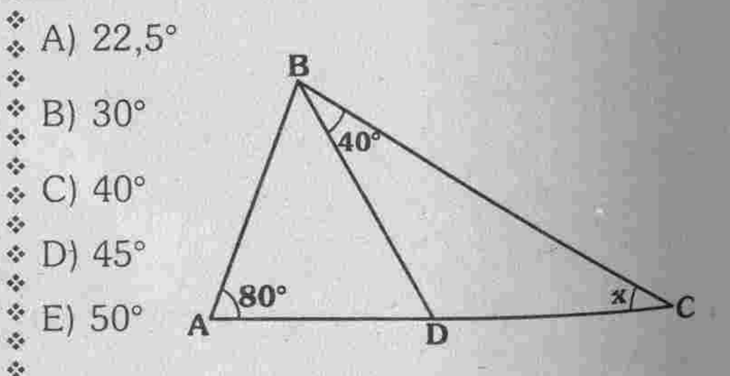
A) 22,5°

B) 30°

C) 40°

D) 45°

E) 50°



PROBLEMA Nº 79 [1er. Seminario 97-I]

En el gráfico, $AC = AD = BD$

Calcule x.

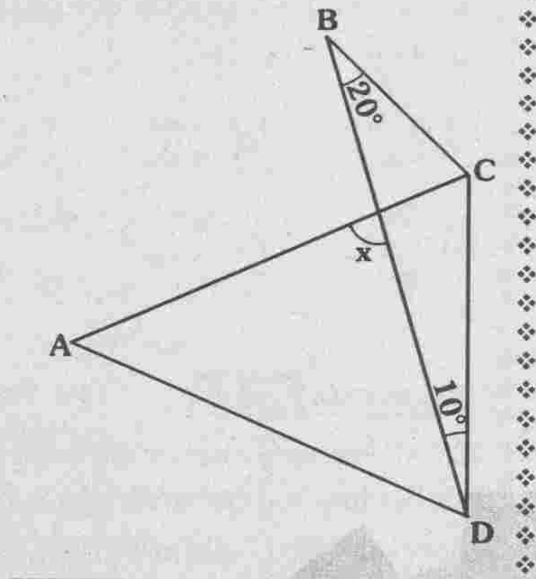
A) 60°

B) 65°

C) 70°

D) 75°

E) 80°



PROBLEMA Nº 80 [1er. Seminario 2008-I]

Se tiene el triángulo ABC, se ubica D exterior y relativo a $\overline{AC}$, tal que:

$m\measuredangle BAC = 20°$, $m\measuredangle CAD = 10°$,

$m\measuredangle ACB = 50°$ y $m\measuredangle ACD = 30°$

Calcule la medida del ángulo entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

A) 90° B) 75° C) 45°

D) 60° E) 53°

PROBLEMA Nº 81 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$, tal que $AB = CD$; si $m\measuredangle BAD = 100°$ y $m\measuredangle BCA = 20°$.

Calcule $m\measuredangle CBD$

A) 10° B) 15° C) 20°

D) 18° E) 22°30'

PROBLEMA Nº 82 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC, se cumple que $AB = 6$, $BC = 7$ y $AC = 8$. Por el vértice B, se trazan las perpendiculares $\overline{BP}$ a la bisectriz interior del ángulo A y $\overline{BQ}$ a la bisectriz exterior del ángulo C. ¿Cuánto mide $\overline{PQ}$?

A) 3,5 B) 4 C) 4,5

D) 5 E) 5,5

PROBLEMA Nº 83 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BQ, tal que:

$AB = QC$; $m\measuredangle A = 40°$ y $m\measuredangle C = 30°$

Calcule $m\measuredangle QBC$.

A) 55° B) 60° C) 45°

D) 30° E) 50°

PROBLEMA Nº 84 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC, $\overline{BM}$ es mediana, N es punto medio de $\overline{BM}$, la prolongación de $\overline{CN}$ interseca a $\overline{AB}$ en P. Si $PM = 3\mu$ y $m\measuredangle MBC = 90°$. Halle AC

A) 18μ B) 12μ C) 10μ

D) 15μ E) 6μ

PROBLEMA Nº 85 [1er. Seminario 2005-II]

ABC es un triángulo en el que $m\measuredangle C = 75°$ y la altura $\overline{BH}$, mide la mitad de $\overline{AC}$. Calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 75° B) 37° C) 30°

D) 45° E) 60°

PROBLEMA Nº 86 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC (recto en B), se cumple $m\measuredangle C = 15°$ se traza la altura BH y la mediana BM. Por H se traza $\overline{HF} \perp \overline{BM}$

que al prolongarse, intersea en P a $\overline{BC}$. Si $AC = b$. Calcule FP.

A) $\frac{b}{3}$ B) $\frac{b(\sqrt{3}-1)}{2}$

C) $\frac{b(\sqrt{3}+1)}{2}$ D) $\frac{b(2-\sqrt{3})}{8}$

E) $\frac{b}{2}$

PROBLEMA Nº 87 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC acutángulo se trazan las bisectrices interiores desde A y C, luego desde B se trazan las perpendiculares a dichas bisectrices BP y BQ respectivamente. Si $\frac{PQ}{AC} = \frac{1}{4}$

Halle la razón entre el perímetro del triángulo ABC y PQ.

A) 10 B) 2 C) 3

D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 88 [1er. Seminario 2005-II]

Dado el triángulo ABC, sobre AC se tiene el punto F de modo que $AF = 3(FC)$. En el triángulo ABF se traza la mediana AM cuya prolongación interseca a $\overline{BC}$ en N, si $AM = 17$. Calcule MN.

A) 1 B) 2 C) 3/2

D) 9/5 E) 17/7

PROBLEMA Nº 89 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B y $AB < BC$. Se ubica D en $\overline{BC}$ de modo que $DC = AB$ y $AB = a$. Halle la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.

A) a B) $\frac{a}{\sqrt{2}}$ C) 2a

D) $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{a}{2}$

PROBLEMA Nº 90 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo rectángulo ABC se trazan las cevianas interiores BD y BE de modo que: $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle EBC)$, $AB = DC$ y $BD = BE$. Calcule $m\measuredangle ABD$.

A) 45° B) $\frac{45°}{2}$ C) 37°

D) $\frac{53°}{2}$ E) $\frac{37°}{2}$

PROBLEMA Nº 91 [1er. Seminario 2005-II]

Dado el triángulo isósceles $ABC(AB = BC)$ sea P en la prolongación de $\overline{AB}$, de modo que $BP = AC$ y $m\measuredangle BPC = 30°$.

Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 60° B) 75° C) 30°

D) 72° E) 45°

PROBLEMA Nº 92 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo $ABC(AB = BC)$ sea P en la prolongación de $\overline{AC}$ tal que $BP=AC$ y $2(m\measuredangle A) - m\measuredangle BPC = 60°$.

Calcule $m\measuredangle B$.

A) 5° B) 7° C) 10°

D) 12° E) 15°

PROBLEMA Nº 93 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC se cumple $m\sphericalangle A = 30°$, se traza la ceviana interior CD de modo que CB=BD y CD=AB.

Calcule $m\sphericalangle DCA$.

A) 5° B) 7,5° C) 9°
D) 10° E) 12°

PROBLEMA Nº 94 [1er. Seminario 2007-II]

ABC es un triángulo isósceles ($\overline{AB} \cong \overline{BC}$) se ubica D en la región interior de modo que $m\sphericalangle BAD = 50°$, $m\sphericalangle DAC = 30°$ y $m\sphericalangle DCB = 25°$.

Calcule $m\sphericalangle DBC$.

A) 5° B) 7° C) 8°
D) 9° E) 10°

PROBLEMA Nº 95 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo isósceles $ABC(\overline{AB} \cong \overline{BC})$, se ubican M y N en $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, tal que:

$$m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle BCN = 30° \quad y$$
$$m\sphericalangle MBC = 70°$$

Calcule $m\sphericalangle BMN$.

A) 60° B) 65° C) 75°
D) 70° E) 80°

PROBLEMA Nº 96 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo isósceles ABC (AB = AC), se construye exteriormente el triángulo isósceles APB, tal que:

$$AP = PB = BC \quad y$$
$$m\sphericalangle APB = 2(m\sphericalangle ABC)$$

Calcule $m\sphericalangle ACB$.

A) 60° B) 80° C) 70°
D) 75° E) 65°

PROBLEMA Nº 97 [1er. Seminario 2007-II]

Se ubica M en el triángulo ABC ($M \in \overline{AC}$), tal que:

$$\frac{m\sphericalangle ABM}{5} = \frac{m\sphericalangle MBC}{3} = \frac{m\sphericalangle BAC}{2}$$

y AM = BC. Calcule $m\sphericalangle BCA$

A) 15° B) 30° C) 35°
D) 45° E) 60°

PROBLEMA Nº 98 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se trazan las cevianas interiores $\overline{BD}$ y $\overline{BE}$ de modo que AB = DC y BD = BE. Si $m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle EBC)$.

Calcule $m\sphericalangle ABD$.

A) 20° B) 22,5° C) 24°
D) 25° E) 26°

PROBLEMA Nº 99 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo escaleno ABC, se cumple:

$$AB = 3u \quad y \quad BC = 10u$$

Halle el menor valor entero de la longitud de la mediana relativa a $\overline{AC}$.

A) 3μ B) 4μ C) 5μ
D) 6μ E) 7μ

PROBLEMA Nº 100 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BM, tal que:

$AM = BC = 9\mu$ y

$m\sphericalangle ABM = m\sphericalangle BAC + m\sphericalangle CBM$

Calcule AB.

A) 4,9 B) 8 C) 9

D) 13,5 E) 18

PROBLEMA Nº 101 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$, tal que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Si $m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle BCA)$, entonces demuestre que: $\overline{BD} \cong \overline{CD}$

PROBLEMA Nº 102 [1er. Seminario 2007-II]

En el gráfico, $LM = LK$, $QM = KP$ y $m\sphericalangle MKP = mKNP$, entonces $m\sphericalangle RQN$ es:

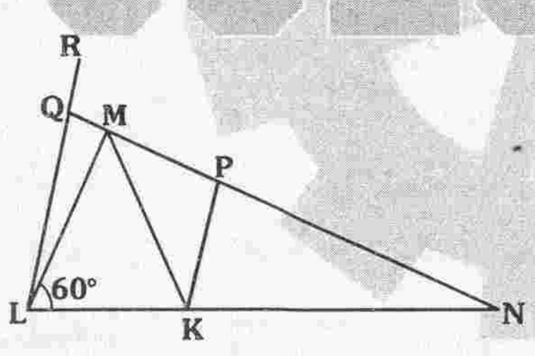
A) 100°

B) 110°

C) 115°

D) 120°

E) 135°



PROBLEMA Nº 103 [1er. Seminario 2007-II]

Sobre los dos lados AB y BC del triángulo ABC se construye exteriormente los triángulos rectángulos isósceles ABP y CBQ $AB = BP$ y $CB = BQ$. Por B se traza una recta perpendicular a $\overline{PQ}$, la cual corta a $\overline{AC}$ en M. Si $PQ = 8\mu$, calcule BM.

A) 8μ B) 6μ C) 4μ

D) 9μ E) 12μ

PROBLEMA Nº 104 [1er. Seminario 2007-II]

En el exterior y relativo a $\overline{AC}$ del triángulo acutángulo ABC se ubica el punto F y en las prolongaciones de $\overline{FA}$ y $\overline{FC}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente, tal que $PB = BC$, $QB = AB$ y los ángulos PBC y QBA son rectos entonces la medida del ángulo AFC.

A) 45° B) 60° C) 75°

D) 53° E) 90°

PROBLEMA Nº 105

En el triángulo ABC, obtuso en B, se traza la altura BH y la ceviana BP $(P \in \overline{CH})$, tal que $AP = BC$, $m\sphericalangle BCA = 2(m\sphericalangle PBH)$ y $m\sphericalangle ABH = 3(m\sphericalangle PBH)$.

Calcule $m\sphericalangle PBH$.

A) 16° B) 14° C) 15°

D) 18° E) 22°

PROBLEMA Nº 106 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{AF}$. Si $\overline{AF} \cong \overline{BC}$,

$m\sphericalangle ABC = 4(m\sphericalangle BAF)$ y

$2(m\sphericalangle FBC) = 3(m\sphericalangle BAF)$

entonces $m\sphericalangle BCA$ es:

A) 35° B) 40° C) 45°

D) 50° E) 60°

PROBLEMA Nº 107 [1er. Seminario 2007-II]

En el interior del triángulo rectángulo ABC se ubica P. Si $\overline{AP} \cong \overline{BC}$, $\overline{PB} \cong \overline{PC}$ y $m\sphericalangle PAB = m\sphericalangle ACP$, entonces $m\sphericalangle PCA$ es:

A) 20° B) 22,5° C) 30°

D) 36° E) 40°

PROBLEMA Nº 108 [1ra. Prueba C. 2007-I]

Sea R un punto interior al triángulo equilátero ABC de manera que:

$$m\sphericalangle BAR = \frac{m\sphericalangle CBR}{3} = \frac{m\sphericalangle ACR}{5}$$

Calcule $m\sphericalangle BAR$.

A) 5° B) 10° C) 15°

D) 20° E) 25°

PROBLEMA Nº 109 [1ra. Prueba C. 2006-I]

Se tiene el triángulo ABC, se traza la mediana BD, la prolongación de la mediana AE del triángulo ABD interseca a $\overline{BC}$ en F, entonces se cumple:

A) $FC = \frac{1}{2}(BF)$ B) $FC = BF$

C) $FC = 2(BF)$ D) $FC = 3(BF)$

E) $FC = 4(BF)$

PROBLEMA Nº 110 [1ra. Prueba C. 2006-I]

Se tiene el triángulo ABC, la mediatriz de $\overline{AC}$ interseca a $\overline{BC}$ en E, en dicha mediatriz se ubica P (P en la región interior del triángulo) de manera que $AB = AP = PC$, si:

$$\frac{m\sphericalangle B}{4} = \frac{m\sphericalangle BAP}{2} = m\sphericalangle BCP$$

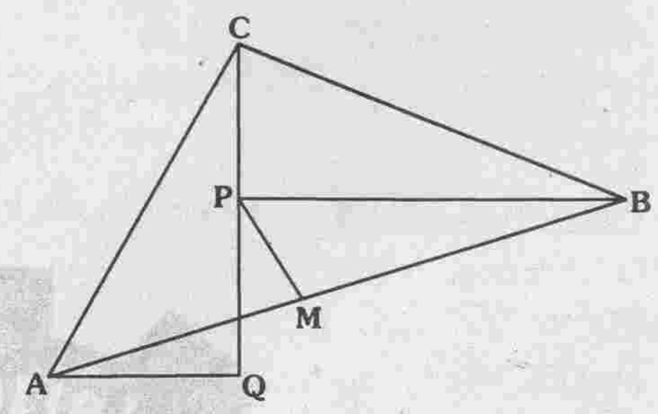
Calcule $m\sphericalangle BCP$.

A) 22° B) 23° C) 24°

D) 25° E) 26°

PROBLEMA Nº 111 [1ra. Prueba C. 2004-II]

En el gráfico, M es punto medio de $\overline{AB}$. Los segmentos BP y AQ son perpendiculares al segmento CQ. Si MP=L, entonces la longitud de $\overline{MQ}$ es:



A) $\frac{L}{3}$ B) $\frac{L}{2}$ C) L

D) $\frac{2L}{3}$ E) $\frac{3L}{4}$

PROBLEMA Nº 112 [1ra. Prueba C. 2004-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BP, tal que $\overline{AB} \cong \overline{PC}$. Si:

$$\frac{m\sphericalangle ABP}{7} = \frac{m\sphericalangle PBC}{1} = \frac{m\sphericalangle BCP}{2},$$

entonces, $m\sphericalangle ABC$ es:

A) 60° B) 70° C) 75°

D) 80° E) 90°

PROBLEMA Nº 113 [1er. Seminario 2001-II]

Dado el triángulo ABC, donde AB=2, 5; BC = 8,5 ; se traza la mediana BR de modo que BR pertenece los naturales. Calcule BR.

A) 7 B) 4 C) 2

D) 8 E) 7

PROBLEMA Nº 114 [1er. Seminario 2007-I]

En el triángulo ABC, se traza la mediana BM. Si $m\sphericalangle ABM = 105°$ y $m\sphericalangle MBC = 30°$.

Calcule $m\sphericalangle C$.

A) 15° B) 18° C) 25°

D) 30° E) 45°

PROBLEMA Nº 115 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana BQ. Si $\overline{AB} \cong QC$ y $m\sphericalangle BAC = 90° + x$; $m\sphericalangle QBC = x$ y $m\sphericalangle BCA = 2x$.

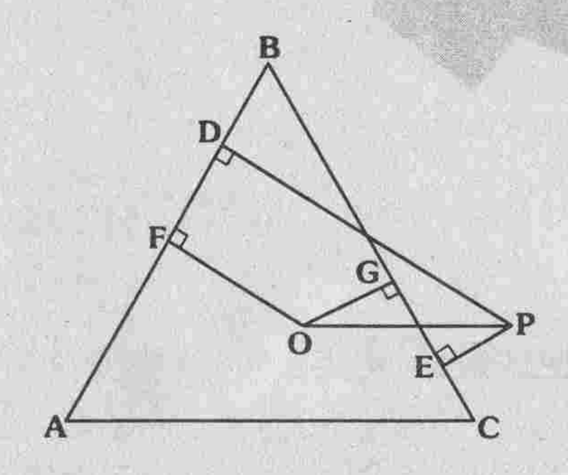
Calcule x.

A) 10° B) 12° C) 15°

D) 20° E) 25°

PROBLEMA Nº 116 [1er. Seminario 2007-II]

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero, $\overline{PO} // \overline{AC}$, $OF = a$, $OG = b$ y $PE = C$, entonces la longitud de $\overline{PD}$ es:



A) $a + b - c$ B) $a + b + c$

C) $a + 2b + c$ D) $2a + b - c$

E) $2a + 2b - 3c$

PROBLEMA Nº 117 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$. Si $F \in \overline{EC}$, $\overline{BF} \cap \overline{AD} = \{G\}$, $\overline{FM} \perp \overline{AD}$ $(M \in \overline{AD})$, $m\sphericalangle EBF = m\sphericalangle FBC$ y $BE - BD = k$.

Calcule FM.

A) $\frac{k}{2}$ B) $\frac{k}{3}$ C) $\frac{4k}{5}$

D) k E) $\frac{3k}{2}$

PROBLEMA Nº 118 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo ABC, P y Q están en $\overline{BC}$ y M es punto medio de $\overline{AC}$. Si $\overline{AB} \cong \overline{PQ}$ y $\overline{BP} \cong \overline{QC}$, calcule $m\sphericalangle PMQ$.

A) 60° B) 75° C) 90°

D) 120° E) 135°

PROBLEMA Nº 119 [1er. Seminario 2007-II]

En el triángulo acutángulo ABC, se ubica el punto D exterior y relativo a $\overline{BC}$ tal que $AB = BC = CD$.

Si $m\sphericalangle ABC = 2(m\sphericalangle ADC)$.

Calcule $m\sphericalangle DAC$.

A) 15° B) 18° C) 22,5°

D) 30° E) 32°

PROBLEMA Nº 120 [1er. Seminario 2008-I]

En el interior del triángulo ABC se ubica 0, tal que OB=AC y las medidas de los ángulos ABO, CBO y ACB son proporcionales a 4; 5 y 13, además $\overline{AO}$ es bisectriz del ángulo BAC.

Calcule $m\sphericalangle ABO$.

A) $16°$ B) $15°$ C) $20°$

D) $18°$ E) $12°$

PROBLEMA Nº 121 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC, se traza la ceviana iinterior BD, si $AD = BC$ y

$$\frac{m\sphericalangle BAC}{2} = \frac{m\sphericalangle ABD}{5} = \frac{m\sphericalangle DBC}{3}$$

Calcule $m\sphericalangle BCA$.

A) $6°$ B) $8°$ C) $30°$

D) $12°$ E) $15°$

PROBLEMA Nº 122 [1er. Seminario 2007-I]

Un punto en la región interior de un triángulo equilátero, dista 1μ, 2μ y 3μ de los lados. Entonces el lado del triángulo mide (en u).

A) $3\sqrt{3}$ B) 6 C) $4\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{2}$ E) 5

PROBLEMA Nº 123 [1er. Seminario 2007-I]

ABC es un triángulo acutángulo, se traza la ceviana interior $\overline{BD}$ de manera que $\overline{BD} \cong \overline{AC}$. Si $m\sphericalangle ACB = m\sphericalangle DBC + 2r$ y $m\sphericalangle DBC = m\sphericalangle BAC - r$. Calcule $m\sphericalangle ABD$.

A) r B) $\frac{r}{2}$ C) 2r

D) $\frac{2r}{3}$ E) $\frac{3r}{4}$

PROBLEMA Nº 124 [1er. Seminario 2006-I]

El ángulo exterior en B del triángulo ABC mide $50°$, si las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ cortan a $\overline{AC}$ en P y Q. Halle $m\sphericalangle PBQ$.

A) $70°$ B) $75°$ C) $80°$

D) $85°$ E) $90°$

PROBLEMA Nº 125 [1er. Seminario 2006-II]

En el triángulo ABC se ubica el punto exterior Q, tal que $\overline{BQ}$ interseca a $\overline{AC}$. Si: $m\sphericalangle ABQ = 6\alpha$; $m\sphericalangle BAC = 2\alpha$; $m\sphericalangle BCA = \alpha$; $\overline{AQ} \cong \overline{QC}$ y $m\sphericalangle BCA = m\sphericalangle ACQ$, entonces "$\alpha$" es:

A) $10°$ B) $12°$ C) $15°$

D) $16°$ E) $18°$

PROBLEMA Nº 126 [1er. Seminario 2006-II]

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, la bisectriz del ángulo exterior trazado de A interseca a la prolongación de la altura BH en F. Si $AB + AH = 4$ y $HF = 3$. Halle BH.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 3,5 E) 4

PROBLEMA Nº 127 [1er. Seminario 2006-II]

En el gráfico, $DA = BD$, $m\sphericalangle AMD = 50°$ y $AE = BC + EC$. Halle $m\sphericalangle ABC$.

A) $70°$

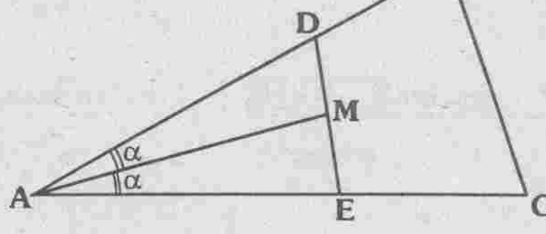
B) $80°$

C) $85°$



D) $90°$

E) $95°$



PROBLEMA Nº 128 [1er. Seminario 2006-II]

En el triángulo ABC se ubican M en $\overline{BC}$, P y Q en $\overline{AC}$ tal que $\overline{AP} \cong \overline{PQ}$ y $\overline{AB} \cong \overline{QC}$. Si M es punto medio de $\overline{BC}$ y $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle PMQ) = 2(m\measuredangle MCQ)$, entonces $m\measuredangle PMQ$ es:

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 45°

PROBLEMA Nº 129 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC, $m\measuredangle B = 90°$ se traza la ceviana interior $\overline{AF}$ de manera que $m\measuredangle BAF = 12°$, $G \in \overline{AC}$ y $m\measuredangle AFG = m\measuredangle C = 54°$. Si $BF = a$. Calcule FG.

A) 2a B) $\frac{4a}{3}$ C) 3a
D) $\frac{3a}{2}$ E) $\frac{5a}{3}$

PROBLEMA Nº 130 [1er. Seminario 2005-II]

En el lado AC del triángulo ABC se construye exteriormente el triángulo rectángulo ACD (recto en D) de manera que $m\measuredangle ECB = 2(m\measuredangle CAD)$, E está en la prolongación de $\overline{DC}$. Si $AD + DC = CB$. Calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 30° B) 45° C) 35°
D) 60° E) 40°

PROBLEMA Nº 131 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC, se cumple $m\measuredangle A = 22°$ y $m\measuredangle C = 8°$. Se construye exteriormente el triángulo ADC, tal que:

$m\measuredangle A = 22°$, $m\measuredangle ACD = 23°$ y $BC = 2$

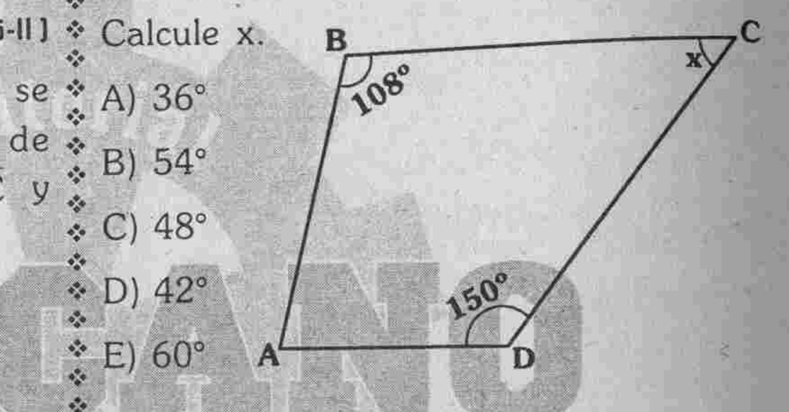
Calcule DC.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 132 [1er. Seminario 2005-II]

En el gráfico, $AB = BC = CD$

Calcule x.



A) 36°
B) 54°
C) 48°
D) 42°
E) 60°

PROBLEMA Nº 133 [1er. Seminario 2005-II]

En el triángulo ABC (AB=BC) se traza la mediana AM y se prolonga hasta H de modo que:

$m\measuredangle AHC = 90°$, $m\measuredangle MAC = m\measuredangle BCH$

y $MH = a$

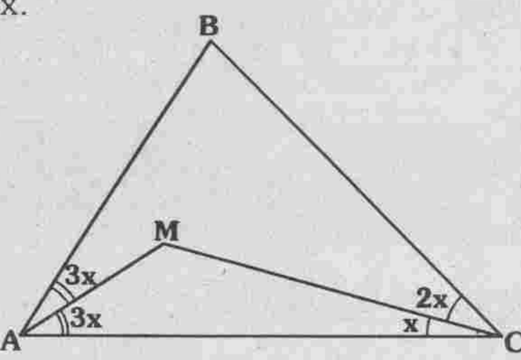
Calcule AM.

A) 2a B) $\frac{4a}{3}$ C) 4a
D) $\frac{3a}{2}$ E) 6a

PROBLEMA Nº 134 [1er. Seminario 2005-II]

En el gráfico, $MC = BC$.

Calcule x.




A) 2,5°

B) 4°

C) 3°


D) 4,5°

E) 7,5°

PROBLEMA Nº 135 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo isósceles ABC(AB = BC) se ubica D punto exterior tal que $\overline{BD}$ interseca a $\overline{AC}$. Si:

$m\sphericalangle ABD = m\sphericalangle BDC = 2(m\sphericalangle ADB)$ y

$m\sphericalangle DBC = 3(m\sphericalangle ABD)$

entonces $m\sphericalangle ADB$ es:

A) 5° B) 8° C) 10°

D) 12° E) $\dfrac{15°}{2}$

PROBLEMA Nº 136 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la ceviana interior CD, en el triángulo ADC se traza la ceviana interior. DE. Si: $m\sphericalangle BCD = 10°$, $m\sphericalangle DCA = 20°$ y $DE = 2(DB)$. Calcule $m\sphericalangle CDE$.

A) 50° B) 60° C) 62°

D) 65° E) 75°

PROBLEMA Nº 137 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC los ángulos internos en A y B miden 18° y 99° respectivamente, si D es un punto de la bisectriz interior trazada desde A. Si BC = CD, calcule $m\sphericalangle BCD$.

A) 36° B) 38° C) 40°

D) 42° E) 44°

PROBLEMA Nº 138 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la ceviana interior AP y se traza $\overline{PE}$ $(E \in \overline{AC})$.

Si: $m\sphericalangle PAE = 2(m\sphericalangle BAP)$;

$m\sphericalangle APE = m\sphericalangle PCE$ y $BP = 1$.

Halle EP.

A) 2 B) 1,8 C) 1,5

D) 1,25 E) 1

PROBLEMA Nº 139 [1er. Seminario 2008-I]

Demostrar que en un triángulo, los extremos de un lado equidistan de la recta que contiene a la mediana relativa a dicho lado.

PROBLEMA Nº 140 [1er. Seminario 2008-I]

En el triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{BM}$ tal que AB = MC, si $m\sphericalangle A = \alpha$ y $m\sphericalangle ABM = 90° - \dfrac{3\alpha}{2}$.

Calcule $m\sphericalangle C$.

A) $\dfrac{\alpha}{2}$ B) α C) $\dfrac{2\alpha}{2}$

D) 2α E) 3α

Problemas Propuestos
Ciclo Semestral

PROBLEMA Nº 141

En el gráfico, los triángulos NTH y ACB son congruentes y $AH = HC$.

Calcule x.

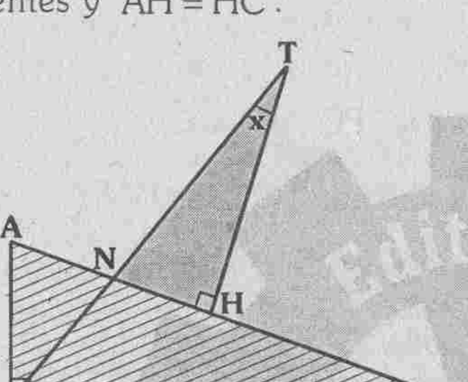
A) 30°

B) 20

C) 18°

D) 36°

E) 23°



PROBLEMA Nº 142

Del gráfico $AP = QC$, calcule x.

A) 35°

B) 20°

C) 15°

D) 25°

E) 30°

B
P
α
α
Q
20°
45°
x
A
C

PROBLEMA Nº143

Del gráfico, $AC = AP + BP$. Calcule la medida del ángulo determinado por $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{PC}$.

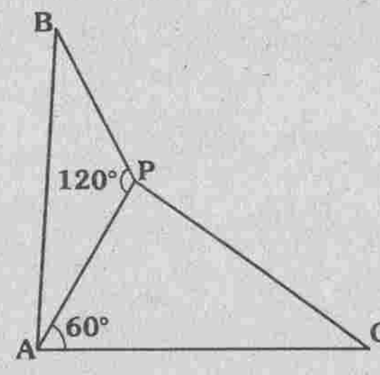
A) 120°

B) 100°

C) 90°

D) 25°

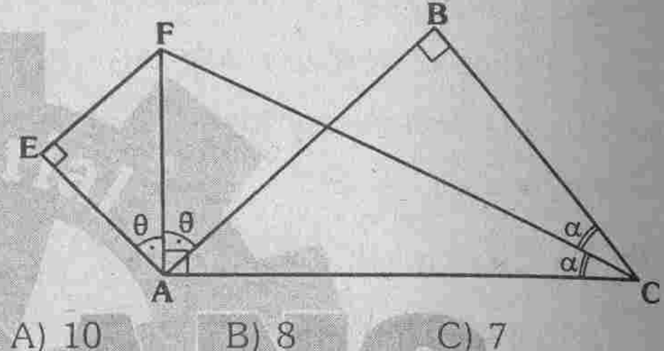
E) 70°



PROBLEMA Nº 144

Del gráfico, $AC = 13$ y $AB = 12$

Calcule EF



A) 10 B) 8 C) 7

D) 6 E) 9

PROBLEMA Nº 145

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$ tal que $m\measuredangle ACB = 80°$; $m\measuredangle BAD = 40°$, $AD = BC$ y $AB = DC$.

Calcule $m\measuredangle DBC$.

A) 20° B) 30° C) 24°

D) 36° E) 18°

PROBLEMA Nº 146

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{AD}$, se ubica E en $\overline{AD}$ tal que $m\measuredangle BAD = m\measuredangle ECD$, $AB = EC$ y $CD = AE$. Calcule $m\measuredangle BDA$.

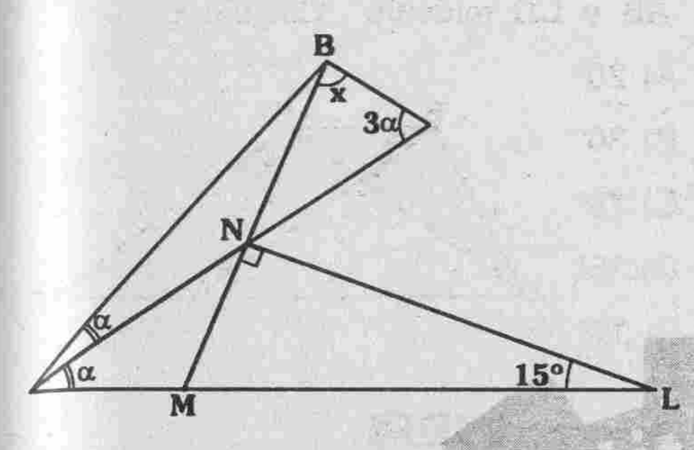
A) 80° B) 40° C) 60°

D) 50° E) 30°

PROBLEMA Nº 147

Del gráfico, $ML = 2(BN)$.

Calcule x.



A) 50° B) 40° C) 30°

D) 60° E) 53°

PROBLEMA Nº 148

En el triángulo ABC se cumple que $m\sphericalangle ABC = 100°$, en $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ se ubican los puntos M y N respectivamente. Tal que $AM = MC$ y $AN = NB + BC$.

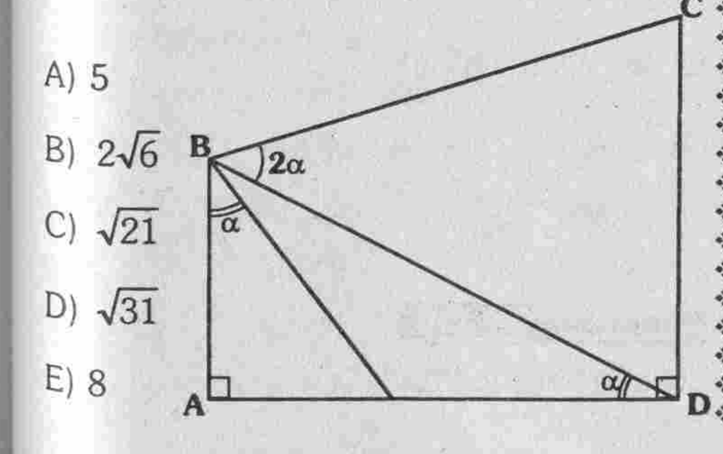
Calcule $m\sphericalangle ANM$.

A) 60° B) 70° C) 80°

D) 50° E) 40°

PROBLEMA Nº 149

Del gráfico, $AE = ED = 2$. Calcule BC



A) 5

B) $2\sqrt{6}$

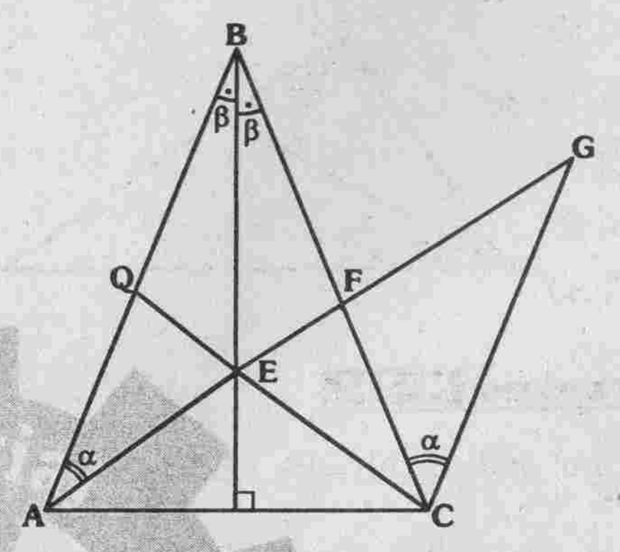
C) $\sqrt{21}$

D) $\sqrt{31}$

E) 8

PROBLEMA Nº 150

En el gráfico, $AE = a$, $CG = b$ y $\alpha + 3\beta = 90°$. Calcule EQ



A) $2a - b$ B) $b - a$ C) $2b - a$

D) $3a - b$ E) $2(b - a)$

PROBLEMA Nº 151

En el triángulo ABE, se ubican M y C en $\overline{BE}$, tal que $\overline{CD} \perp \overline{AE}$ ($D \in \overline{AE}$), $AB = 2(BM) = 2(MC)$, $m\sphericalangle BAE = 75°$, $m\sphericalangle DCE = 45°$ y $MD = 3\sqrt{2}$.

Calcule AB.

A) 6 B) 8 C) $4\sqrt{2}$

D) $6\sqrt{2}$ E) 5

PROBLEMA Nº 152

Se tiene el triángulo ABC, se trazan las cevianas interiores AM y BN de modo que $AB = BN$, $AM = MC$ y $BM = NC$.

Calcule $m\sphericalangle BCA$.

A) 30° B) 40° C) 50°

D) 60° E) 80°

PROBLEMA Nº 153

En el gráfico, $BC = 2(AP)$.

Calcule x.

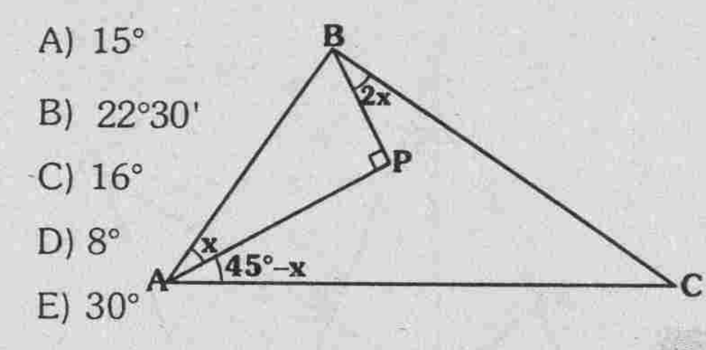
A) 15°

B) 22°30'

C) 16°

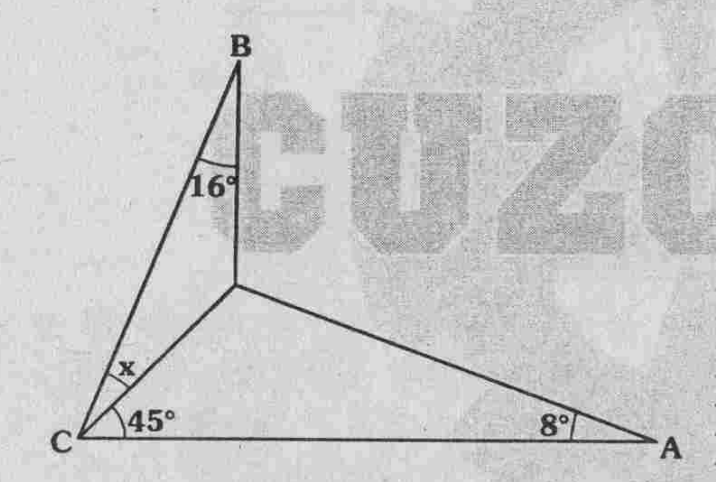
D) 8°

E) 30°



PROBLEMA Nº 154

En el gráfico, $AL = BL + BC$, calcule x.



A) 37° B) 53° C) 45°

D) 30° E) 60°

PROBLEMA Nº 155

En el triángulo rectángulo isósceles ABC, recto en B, la mediatriz de $\overline{AB}$ interseca en P a la recta perpendicular a $\overline{AC}$ trazada por C.

Calcule $m\measuredangle BPC$.

A) 37°/2 B) 53°/2 C) 30°

D) 45° E) 15°

PROBLEMA Nº 156

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes, $\overline{AD} // \overline{BC}$ y el ángulo entre $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ mide 96°. Calcule x

A) 20°

B) 30°

C) 28°

D) 35°

E) 32°

PROBLEMA Nº 157

En el triángulo ABC, se traza la altura BH en cuya prolongación se ubica D. Si: $m\measuredangle BAC = 50°$, $m\measuredangle ACB = 20°$ y $m\measuredangle DAC = 30°$. Calcule $m\measuredangle ACD$.

A) 5° B) 10° C) 7,5°

D) 15° E) 20°

PROBLEMA Nº 158

Se ubica P en la región interior del triángulo equilátero ABC, tal que AP=a, BP=b y PC=c. Si $b > c$ indique la relación que siempre se cumple:

A) $a < b - c$

B) $a^2 < b^2 + c^2$

C) $b - c < a < b + c$

D) $a^2 < b^2 - c^2$

E) $a^2 > b^2 + c^2$

PROBLEMA Nº 159

En el triángulo ABC, se cumple:

$m\measuredangle BAC = 23°$ y $2(AB) = 5(BC)$

Calcule $m\measuredangle ACB$.

A) 30° B) 37° C) 53°

D) 60° E) 76°

PROBLEMA Nº 160

En el triángulo equilátero ABC, de centro O, se ubica M y N en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si MB=NC y ON = a.

Calcule MN.

A) a B) $a\sqrt{2}$ C) $a\sqrt{3}$

D) 2a E) $\frac{3}{2}a$

PROBLEMA Nº 161

En el gráfico, AB = 3 y HC=1.

Calcule x.

A) 37°

B) $\frac{37°}{2}$

C) 53°

D) $\frac{53°}{2}$

E) 8°

PROBLEMA Nº 162

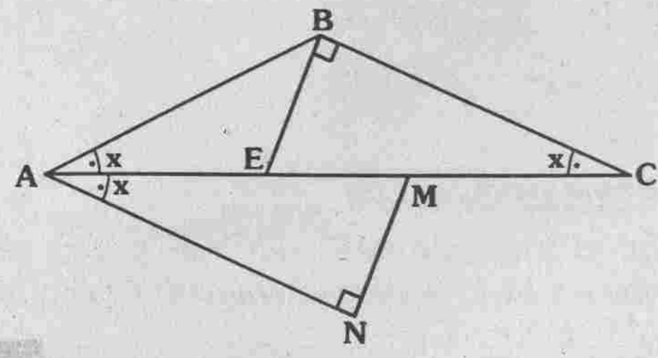
En el gráfico ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$, luego se traza $\overline{AH}$ perpendicular a $\overline{BD}$ (H en $\overline{BD}$). Si BH = 9, AC = 15 y $m\measuredangle HAC = 37°$. Calcule AH.

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

PROBLEMA Nº 163

En el gráfico, BE = 4, MN = 3 y AM=MC. Calcule x.



A) 30° B) 45° C) 8°

D) 37° E) $\frac{37°}{2}$

PROBLEMA Nº 164

En el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, se trazan las cevianas interiores BM y CN, tal que:

$m\measuredangle MBC = 50°$ y

$m\measuredangle BCN = m\measuredangle ABM = 30°$

Calcule $m\measuredangle MNC$.

A) 10° B) 20° C) 30°

D) 35° E) 40°

PROBLEMA Nº 165

Se tiene el triángulo ABC, en el cual se traza la bisectriz interior AM, tal que $m\measuredangle AMB = 45°$, $m\measuredangle ABC = 127°$ y AB + AC = 25. Calcule BC.

A) 5 B) 6 C) 4

D) 8 E) 10

PROBLEMA Nº 166

En el triángulo ABC, $m\measuredangle BAC = 45°$ y

$m\measuredangle ACB = 30°$. Se traza la mediana AM, tal que AM=6. Calcule la distancia de M hacia $\overline{AB}$.

A) 2 B) 2,5 C) 3
D) $3\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 167

En el triángulo ABC, en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican M y N respectivamente tal que AM=MN=NC.

Si: $\frac{m\measuredangle BAC}{7} = \frac{m\measuredangle AMN}{10} = \frac{m\measuredangle ACN}{5}$,

calcule $m\measuredangle ABC$.

A) 72° B) 45° C) 60°
D) 40° E) 80°

PROBLEMA Nº 168

En el triángulo ABC, se cumple:

$$m\measuredangle BAC = 16° \text{ y } 7(AB) = 20(BC)$$

Calcule $m\measuredangle BCA$.

A) 30° B) 53° C) 45°
D) 37° E) 60°

PROBLEMA Nº 169

En la región exterior relativo a $\overline{AB}$ del triángulo equilátero ABC, se ubica P, tal que $m\measuredangle PBC = 90°$, si $PB = \sqrt{3}$ y $AC = 6$. Calcule la distancia de P hacia $\overleftrightarrow{AC}$.

A) $5\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $\frac{5}{2}\sqrt{3}$ E) $\frac{7}{2}\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 170

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BM, tal que $BM = AC = 10$.

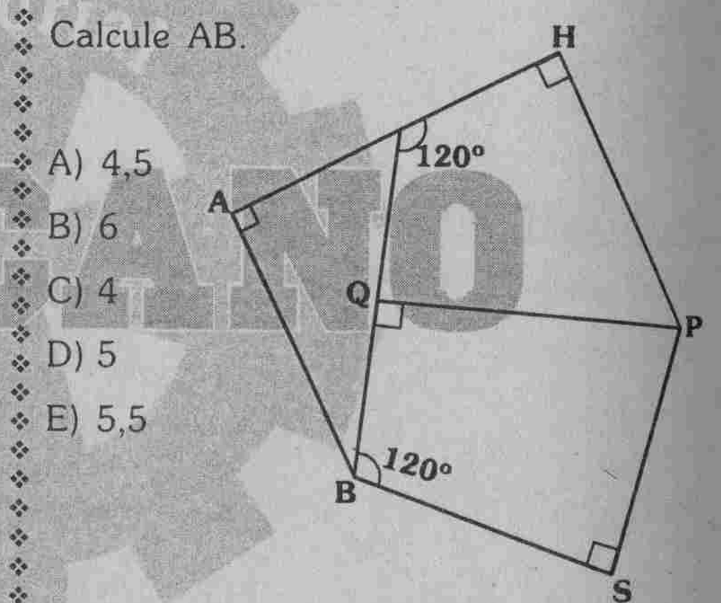
Si: $m\measuredangle BCA = 2(m\measuredangle ABM) + m\measuredangle MBC$,

Calcule BC.

A) 2,5 B) 4 C) 5
D) 7,5 E) 10

PROBLEMA Nº 171

En el gráfico, HP=5, SP=6 y PQ=7. Calcule AB.



A) 4,5
B) 6
C) 4
D) 5
E) 5,5

PROBLEMA Nº 172

En el triángulo ABC, se cumple:

$$m\measuredangle BCA = 3(m\measuredangle BAC) \text{ y}$$
$$AB = BC(\sqrt{2}+1)$$

Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 30° B) 22°30'
C) 15° D) 45°
E) 26°30'

PROBLEMA Nº 173

En el gráfico, $AD = BC = 3(DB)$, calcule x.

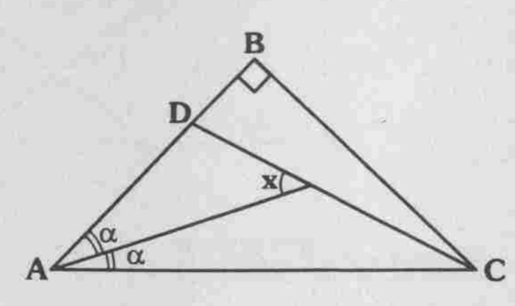
A) 30°

B) 37°

C) 45°

D) 53°

E) 60°



PROBLEMA Nº 174

En la región exterior relativa a $\overline{BC}$ del triángulo ABC, se ubica P de modo que $m\measuredangle PCA = 90°$, $m\measuredangle PCB = m\measuredangle PAC = 53°$, $BC = AC = 5$.

Calcule $m\measuredangle PAB$.

A) 15° B) $\frac{53°}{2}$ C) 30°

D) $\frac{37°}{2}$ E) 37°

PROBLEMA Nº 175

En el gráfico, D y N son puntos medios de $\overline{AP}$ y $\overline{BC}$, si $8(ND) = 5(PC)$. Calcule la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{ND}$ y $\overleftrightarrow{AB}$.

A) 30°

B) 60°

C) 53°

D) 45°

E) 37°

PROBLEMA Nº 176

En el gráfico, AB=6, BC=10, PM=4 y AM=MC. Calcule x.

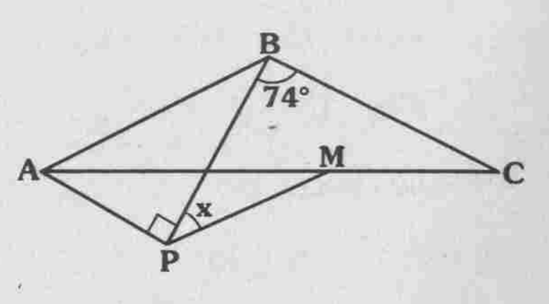
A) 69°

B) 37°

C) 74°

D) 53°

E) 60°



PROBLEMA Nº 177

Según el gráfico, los triángulos ABC, AFE y CDE son equiláteros. Si AC=12, calcule el menor valor entero de BF+BD.

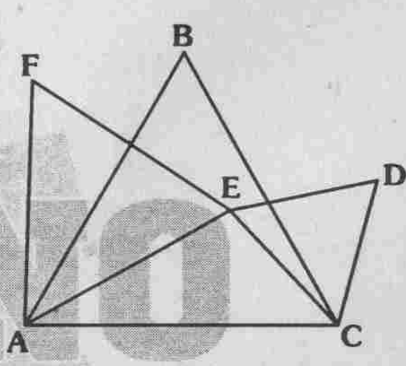
A) 11

B) 12

C) 13

D) 15

E) 18



PROBLEMA Nº 178

En el gráfico, AB=BC, PQ=3 y DA=5.

Calcule θ .

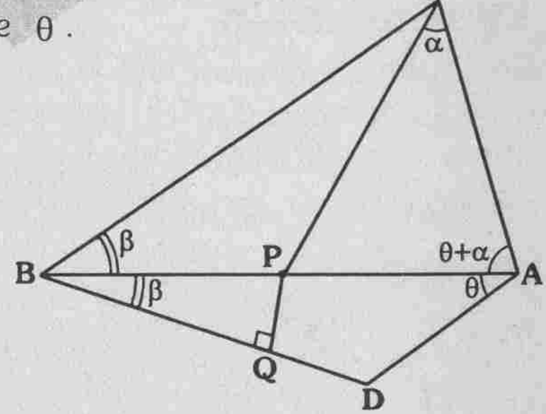
A) 30°

B) 37°

C) 53°

D) 74°

E) 60°



PROBLEMA Nº 179

Se tiene el triángulo ABC recto en B, se ubica N en $\overline{AC}$, M en $\overline{NC}$ y Q en la región exterior relativa a $\overline{BC}$.

Si: $BN = CQ$, $MN = MQ$, $AM = MC$, $m\sphericalangle ABN = 10°$ y $m\sphericalangle MQC = 80°$.

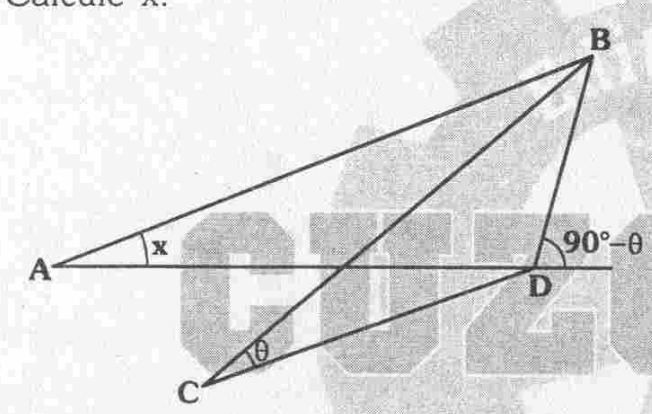
Calcule $m\sphericalangle ACB$.

A) 25° B) 30° C) 15°
D) 10° E) 20°

PROBLEMA Nº 180

En el gráfico, $AB = BC$ y $BD = CD$.

Calcule x.



A) 18° B) 18°30' C) 30°
D) 26°30' E) 45°

PROBLEMA Nº 181

En la región interior del triángulo rectángulo isósceles ABC, recto en B, se ubica P en la región interior, tal que $m\sphericalangle BPA = 90°$, $AP = 5$ y $BP = 2$.

Calcule PC.

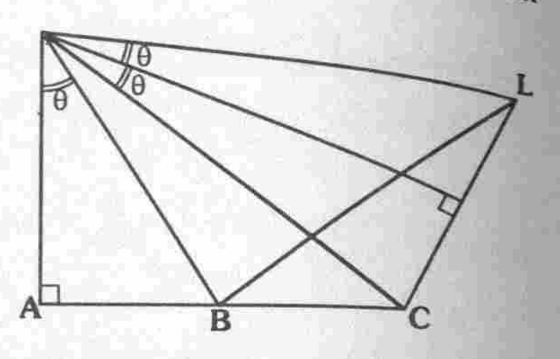
A) 7 B) $\sqrt{13}$ C) 5
D) $\sqrt{11}$ E) $\sqrt{10}$

PROBLEMA Nº 182

En el gráfico, $BC + 2(AB) = 10$.

Calcule LB.

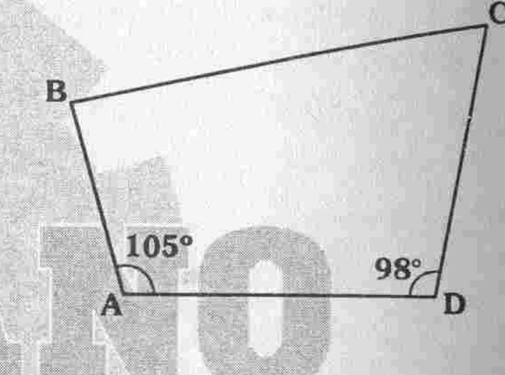
A) 5
B) 7,5
C) 10
D) 6
E) 8



PROBLEMA Nº 183

En el gráfico, $AB = 6$, $AD = 6\sqrt{2}$ y $CD = 10$. Calcule CB.

A) $2\sqrt{37}$
B) $2\sqrt{39}$
C) $\sqrt{37}$
D) $\sqrt{39}$
E) $\sqrt{29}$



PROBLEMA Nº 184

En el triángulo ABC se traza la mediana AM y $\overline{BH} \perp \overline{AM}$ (H en $\overline{AM}$). Calcule cuantos valores enteros puede tomar AB, si $AC = 6$ y $AB = 2(MH)$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 1

PROBLEMA Nº 185

En el triángulo ABC se traza la mediana BM y luego $\overline{MH} \perp \overline{AB}$ (H en $\overline{AB}$), si $AH = 7$, $HB = 1$ y $BC = 10$.

Calcule $m\sphericalangle ABM$.

A) 74° B) 76° C) 53°
D) 75° E) 51°

PROBLEMA Nº 186

En el triángulo rectángulo ABC recto en B, en la prolongación de la ceviana interior AD se ubica Q, si $BD = 1$; $DC = 2$; $QB = 3$ y $m\measuredangle BCA = 60°$. Calcule $m\measuredangle CBQ$.

A) 45° B) 53° C) 60°
D) 75° E) 37°

PROBLEMA Nº 187

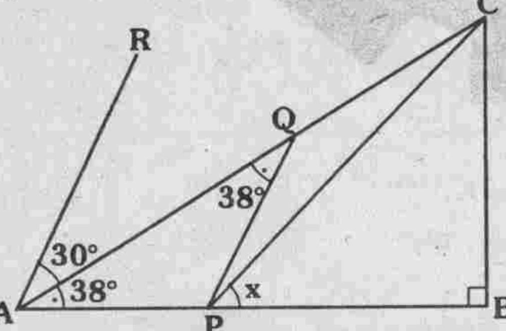
En el triángulo ABC se cumple $m\measuredangle BAC = 20°$, se ubica D en la región exterior relativa a $\overline{AC}$, tal que $BC = CD$ y $m\measuredangle CAD = 40°$, $m\measuredangle ACD = 30°$ y $m\measuredangle ABC > 90°$. Calcule $m\measuredangle ACB$.

A) 16° B) 18° C) 15°
D) 20° E) 10°

PROBLEMA Nº 188

En el gráfico, Q equidista de $\overline{AR}$ y $\overline{BC}$. Calcule x.

A) 51°
B) 53°
C) 55°
D) 57°
E) 59°



PROBLEMA Nº 189

En el triángulo equilátero ABC; en $\overline{BC}$ y la prolongación de $\overline{CA}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente, tal que $AQ = BP$, $\overline{PQ}$ interseca a $\overline{AB}$ en M. Calcule $m\measuredangle BMP$, si $MB = 2(AM)$.

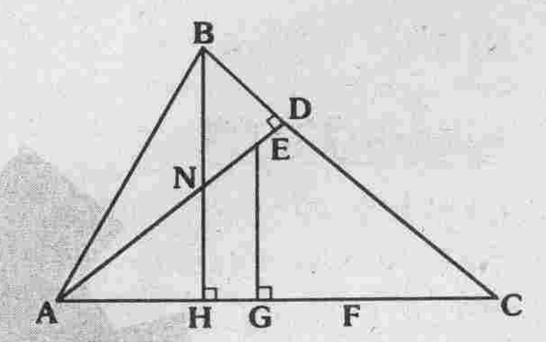
A) 22,5 B) 26,5° C) 30°
D) 37° E) 45°

PROBLEMA Nº 190

En el gráfico, $BH = 20$; $AH = 8$; $AN = NB$ y $AE = AF$.

Calcule EG.

A) 8
B) 9
C) 10
D) 12
E) 15



PROBLEMA Nº 191

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$, si $BD = AC$ y

$$6(m\measuredangle ABD) = 3(m\measuredangle BAC) = 4(m\measuredangle BCA)$$

Calcule $m\measuredangle BCA$.

A) 72° B) 54° C) 36°
D) 28° E) 68°

PROBLEMA Nº 192

En el triángulo ABC se traza la mediana $\overline{AM}$ y $\overline{BD} \perp \overline{AM}(D \in \overline{AM})$; $m\measuredangle ABD = 3(m\measuredangle MAC)$; además: $AB = 2(DM)$.

Calcule $m\measuredangle MAC$

A) 18° B) 15° C) 20°
D) 12° E) 10°

PROBLEMA Nº 193

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BM}$, tal que $BM = AC$;

$$\frac{m\sphericalangle MBC}{2} = \frac{m\sphericalangle ABM}{3} = \frac{m\sphericalangle BCA}{8}.$$

Calcule $m\sphericalangle MBC$.

A) 10° B) 18° C) 20°
D) 35° E) 24°

PROBLEMA Nº 194

En el triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la mediana $\overline{CM}$ y la altura $\overline{BH}$ $(H \in \overline{AC})$, $m\sphericalangle BMC = m\sphericalangle BCA$ además $BH = 12$. Calcule CM.

A) 12 B) 18 C) 20
D) 24 E) 16

PROBLEMA Nº 195

En el triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la ceviana interior $\overline{AE}$ tal que: $m\sphericalangle EAC = 2(m\sphericalangle EAB)$ y $AC = AE + 2(EB)$

Calcule $m\sphericalangle ACB$.

A) 36° B) 15° C) 18°
D) 24° E) 25°

PROBLEMA Nº 196

En el triángulo rectángulo ABC recta en B se traza la ceviana interior $\overline{AS}$ y la bisectriz interior $\overline{CP}$; $m\sphericalangle BAS = 40°$ $m\sphericalangle SAC = 30°$. Calcule $m\sphericalangle BSP$.

A) 50° B) 30° C) 40°
D) 20° E) 70°

PROBLEMA Nº 197

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$ si:

$m\sphericalangle BAD = 20°$, $m\sphericalangle DAC = 10°$,
$m\sphericalangle ABE = 40°$ y $m\sphericalangle BCA = 30°$

Calcule $m\sphericalangle DEC$.

A) 15° B) 18° C) 50°
D) 20° E) 30°

PROBLEMA Nº 198

En el triángulo ABC donde $AB = BC$ se ubica el punto M en su región interior,

$m\sphericalangle MCA = 10°$, $m\sphericalangle MAC = 20°$,
$m\sphericalangle MCB = 40°$

Calcule $m\sphericalangle MBC$.

A) 60° B) 50° C) 40°
D) 70° E) 80°

PROBLEMA Nº 199

En el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$ se trazan las cevianas interiores $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$, tal que: $m\sphericalangle MBC = 50°$ y $m\sphericalangle BCN = m\sphericalangle ABM = 30°$.

Calcule $m\sphericalangle MNC$.

A) 30° B) 60° C) 50°
D) 40° E) 20°

PROBLEMA Nº 200

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BM}$, $m\sphericalangle BAC = 30°$, $m\sphericalangle BMA = 40°$, $AM = BC$.

Calcule $m\sphericalangle BCA$.

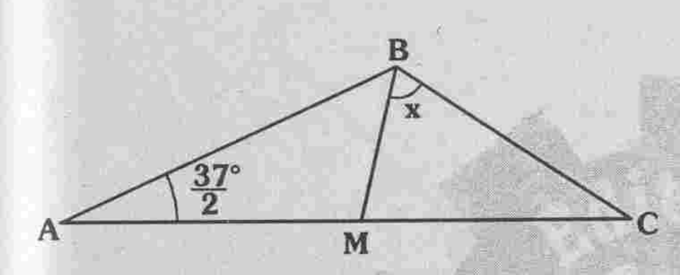
A) 30° B) 20° C) 18°
D) 36° E) 25°

Problemas Propuestos

Ciclo Semestral Intensivo

PROBLEMA Nº 201

En el gráfico, $AM = MC$ y $BC = 2(BM)$. Calcule x.

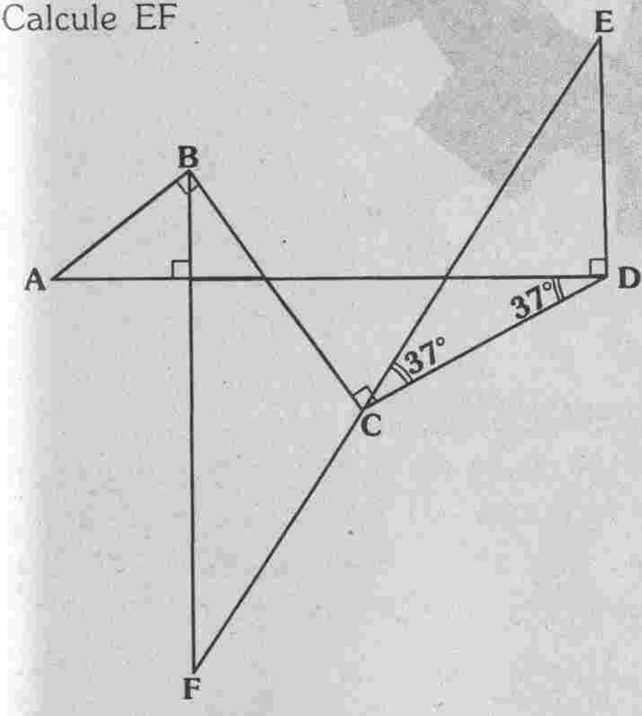


A) 143° B) 127° C) 120°
D) 90° E) 150°

PROBLEMA Nº 202

En el gráfico, $BC = 2(BH) = 2$.

Calcule EF

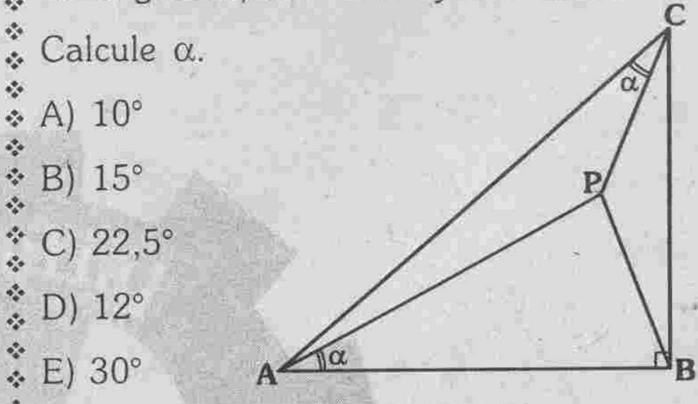


A) 12,5 B) 5 C) 50/7
D) 13 E) 15/4

PROBLEMA Nº 203

En el gráfico, $PA = AB$ y $PC = PB$.

Calcule α.



A) 10°
B) 15°
C) 22,5°
D) 12°
E) 30°

PROBLEMA Nº 204

En el triángulo ABC, $AB = BC = 2\sqrt{10}$, se ubican los puntos D, E y F en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{EC}$ respectivamente tal que $DE = EF$; $\overline{AE} \perp \overline{DF}$; $\overline{ED} \perp \overline{AB}$, por B se traza una recta que interseca perpendicularmente a la prolongación de $\overline{AE}$ en H y a la prolongación de $\overline{AC}$ en G.

Si $AG = 8$ y $EH = \sqrt{2}$, calcule EB.

A) 3 B) $\sqrt{10}$ C) $2\sqrt{5}$
D) 4 E) $2\sqrt{3}$

PROBLEMA Nº 205

En el gráfico, las regiones sombreadas son congruentes y $\overleftrightarrow{QR}$ y $\overleftrightarrow{BA}$ se cortan.

Si: $AB = BC$ y $PR = 3(AP)$.

Calcule x.

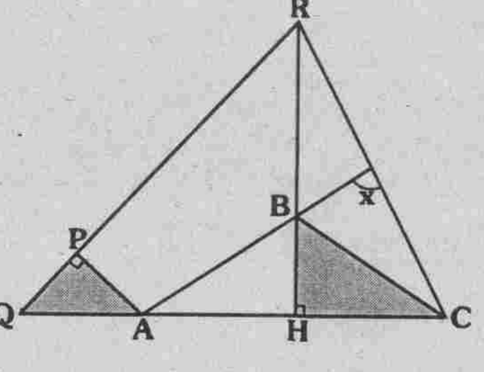
A) 80°30'

B) 82°

C) 71°30'

D) 73°30'

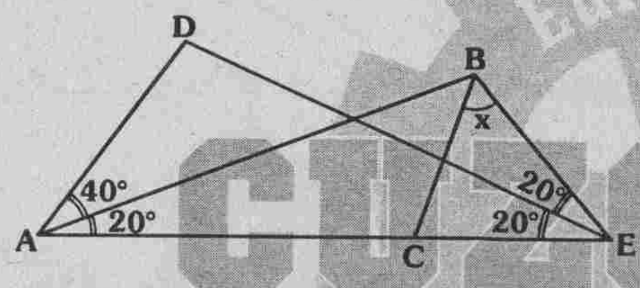
E) 72°30'



PROBLEMA Nº 206

En el gráfico, AD = EC.

Calcule x.



A) 30° B) 50° C) 70°

D) 40° E) 60°

PROBLEMA Nº 207

En el gráfico, BC = AD. Calcule x

A) 5°

B) 6°

C) 7°

D) 8°

E) 10°

PROBLEMA Nº 208

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BP, tal que m∢ABP = 70° y m∢BAC = 80°. Si AB = PC.

Calcule m∢PBC.

A) 20° B) 12° C) 18°

D) 10° E) 15°

PROBLEMA Nº 209

Del gráfico, AB = CE = AE + 2 y BE = $\sqrt{10}$. Calcule x.

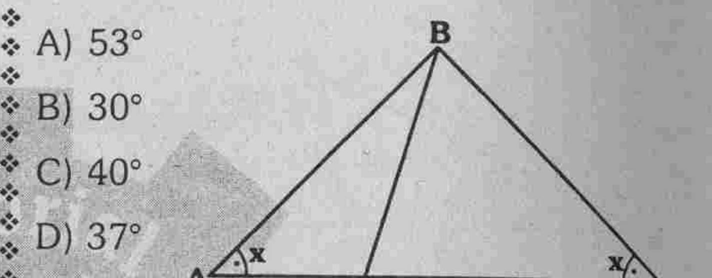
A) 53°

B) 30°

C) 40°

D) 37°

E) 52°



PROBLEMA Nº 210

En el triángulo ABC, se trazan las cevianas interioes $\overline{BP}$ y $\overline{CQ}$, tal que $\overline{BQ} = \overline{CP}$, sean M y N puntos medios de $\overline{BP}$ y $\overline{CQ}$ respectivamente.

Si m∢BAC = 2(m∢MNQ).

Calcule m∢BQC.

A) 60° B) 120° C) 90°

D) 75° E) 45°

PROBLEMA Nº 211

En el triángulo ABC, la prolongación de la altura $\overline{AH}$ interseca a la mediatriz de $\overline{AC}$ en P. Si: m∢BPC = 90° y m∢ABC = 2(m∢BCA).

Calcule m∢BAC.

A) 70° B) 80° C) 90°

D) 100° E) 110°

PROBLEMA Nº 212

En el triángulo equilátero ABC, en $\overline{AB}=\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos D, E y L respectivamente, luego se ubican el punto medio M de $\overline{ED}$. Si $AL=AD+LC$ y la suma de distancias de E y D hacia $\overleftrightarrow{AC}$ es K. calcule LM.

A) K B) $\frac{K}{2}$ C) $\frac{K}{3}$

D) $K\frac{\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{3}{2}K$

PROBLEMA Nº 213

Se tiene el triángulo rectángulo isósceles ABC, recto en B, en la región eterior relativo a $\overline{BC}$ se ubica E de modo que BC=EB y AE=10. Calcule la distancia de A a $\overline{EC}$.

A) 6 B) 8 C) 5

D) $5\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 214

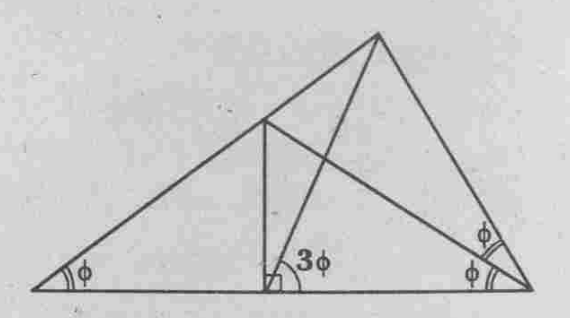
En el triángulo rectángulo ABC se trazan las cevianas interiores $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$, tal que AP=CQ=10 y $m\measuredangle PAB = m\measuredangle BCQ = 15°$. Calcule la distancia entre los puntos medios de $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$.

A) 10 B) 5 C) $5\sqrt{2}$

D) $5\sqrt{3}$ E) $\frac{5}{2}$

PROBLEMA Nº 215

Del gráfico, calcule ϕ.



A) 10°
B) 12°
C) 15°
D) 20°
E) 18°

PROBLEMA Nº 216

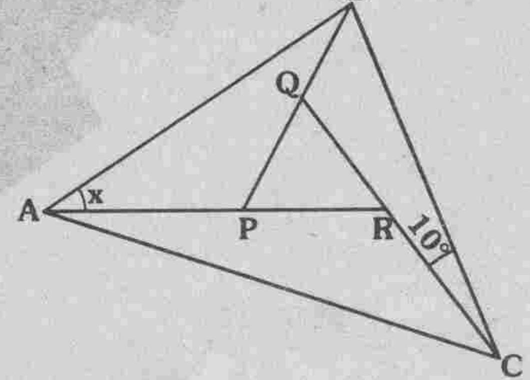
En un triángulo dos de sus lados miden $\sqrt{5}$ y $\sqrt{2}$, el ángulo entre ellos mide 18°30'. Calcule la medida del ángulo opuestos al lado que mide $\sqrt{2}$.

A) 26°30' B) 30° C) 45°

D) 18°30' E) 37°

PROBLEMA Nº 217

En el gráfico, el triángulo PQR es equilátero. Si $PQ=QB=PA$ y $RC=PQ+AB$. Calcule x.



A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 60°

PROBLEMA Nº 218

Se tiene el ángulo AOB, se traza la bisectriz OP, tal que AP=AB y $m\measuredangle APB=60°$. ¿Qué tipo de triángulo es APB?

A) Isósceles B) Equilátero

C) Rectángulo D) Escaleno

E) Obtusángulo

PROBLEMA Nº 219

En el triángulo ABC, se ubica S en la región interior y M es punto medio de $\overline{BC}$, si, $m\sphericalangle BAS = 40°$; $m\sphericalangle SAC = 30°$, $m\sphericalangle ASB = 90°$ y $m\sphericalangle SBC = 20°$.

Calcule $m\sphericalangle SMB$.

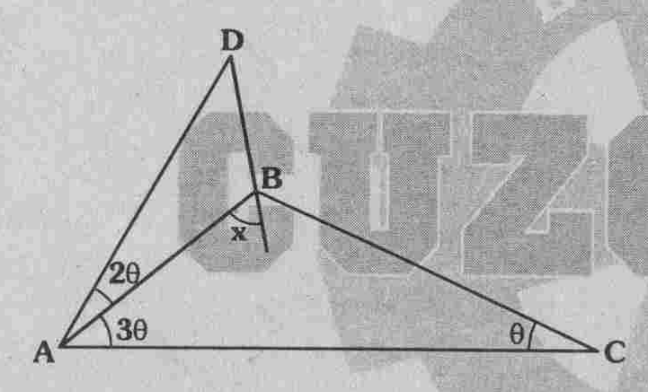
A) 60° B) 40° C) 30°

D) 50° E) 70°

PROBLEMA Nº 220

En el gráfico, $BC = AB + AD$.

Calcule x en función de θ.



A) 4θ B) $\frac{5}{2}\theta$ C) 3θ

D) $\frac{9}{2}\theta$ E) $\frac{7}{2}\theta$

PROBLEMA Nº 221

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BP, luego en $\overline{BC}$ se ubica Q, tal que : $AB = PC$, $AP = QC$ y $m\sphericalangle BAP = m\sphericalangle BPQ$.

Calcule $\frac{m\sphericalangle ABP}{m\sphericalangle PBQ}$.

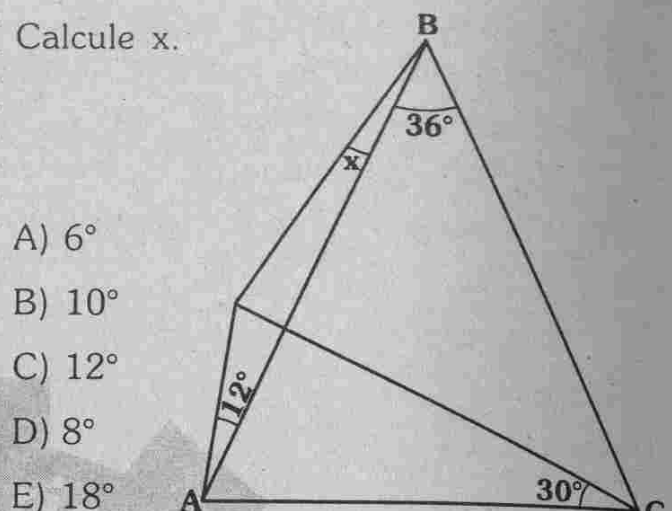
A) 1/2 B) 1 C) 2/3

D) 2/5 E) 3/4

PROBLEMA Nº 222

En el gráfico, $AB = BC$.

Calcule x.



A) 6°

B) 10°

C) 12°

D) 8°

E) 18°

PROBLEMA Nº 223

En el triángulo ABC, se cumple:

$m\sphericalangle BAC = 90° - 6\theta$ y

$m\sphericalangle ABC = 90° + 2\theta$

se ubica P en la región interior tal que $AB = AP$, $m\sphericalangle APC = 60° + x$, $m\sphericalangle BCP = m\sphericalangle PCA$. Calcule x.

A) 70° B) 80° C) 90°

D) 50° E) 100°

PROBLEMA Nº 224

Se tiene el triángulo ABC, en la región exterior rrelativa a $\overline{AB}$ se ubica P tal que $AB = AC = PC$; $mBPC = 40°$ y $m\sphericalangle BCP = 30°$.

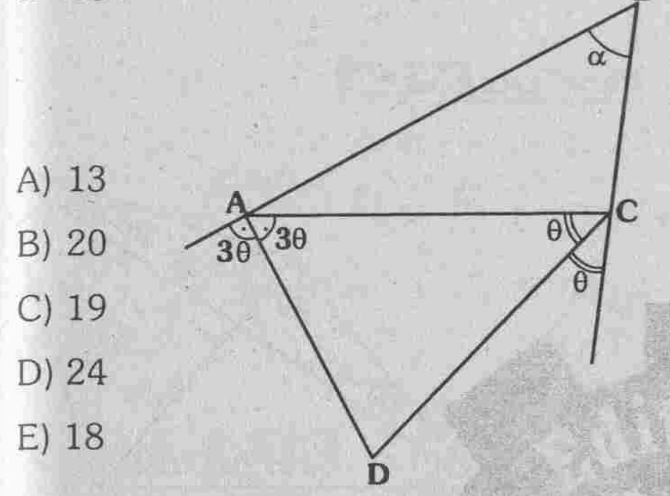
Calcule $m\sphericalangle PCA$.

A) 30° B) 40° C) 50°

D) 35° E) 25°

PROBLEMA Nº 225

En el gráfico, $\alpha < 60°$ y $CD = 38$. Calcule la mayor distancia entera del punto D a $\overline{AC}$.



A) 13
B) 20
C) 19
D) 24
E) 18

PROBLEMA Nº 226

Se tiene ell triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AC}$, en donde $m\measuredangle ABC = 30°$, se traza la ceviana interior $\overline{CQ}$ tal que $AC = \sqrt{2}(BQ)$. Calcule $m\measuredangle BCQ$.

A) 15° B) 16° C) 30°

D) $\frac{37°}{2}$ E) $\frac{53°}{2}$

PROBLEMA Nº 227

En la región interior del triángulo ABC se ubica P, tal que $m\measuredangle PAC = 48°$; $m\measuredangle PCA = 18°$; $m\measuredangle APB = 120°$ y $AC = BP$.

Calcule $m\measuredangle PBC$.

A) 10° B) 15° C) 18°

D) 24° E) 36°

PROBLEMA Nº 228

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior AM y la ceviana BN. Si: $MN = 4$; $m\measuredangle AMN = 22°$; $m\measuredangle AMB = 37°$ y $m\measuredangle BAC = 16°$.

Calcule MB.

A) 2 B) $3\sqrt{3}$ C) 3

D) 4 E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 229

En la región interior del triángulo acutángulo ABC se ubica P, tal que $PA + PB + PC$ es mínimo.

Calcule $m\measuredangle CPB$.

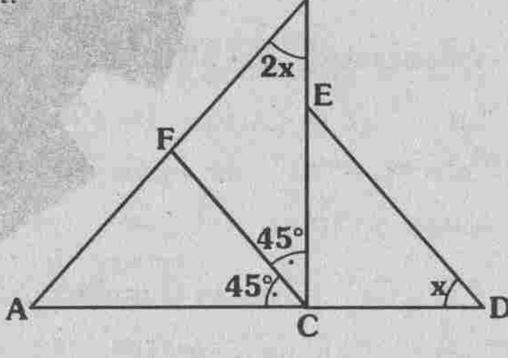
A) 90° B) 75° C) 120°

D) 135° E) 127°

PROBLEMA Nº 230

En el gráfico, $FB = ED$ y $BE = CD$.

Calcule x.



A) 30°
B) 40°
C) 45°
D) 60°
E) 53°

PROBLEMA Nº 231

En la región exterior del triángulo isósceles ABC(AB = BC) y relativo a $\overline{BC}$ se ubica D de modo que $AD = AC$, $m\measuredangle ADB = 90°$ y $m\measuredangle ABC = 2(m\measuredangle BAD)$.

Calcule $m\measuredangle DCB$.

A) 8° B) 10° C) 15°

D) 18° E) 20°

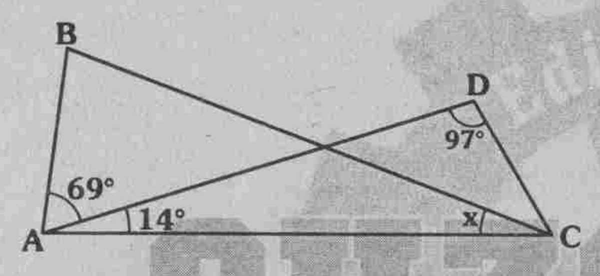
PROBLEMA Nº 232

En el triángulo ABC se traza la mediana BM, luego se traza $\overline{MH}$ perpendicular a $\overline{BC}$ (H en $\overline{BC}$). Si $BC = 2(BM)$ y $2(MC) = 5(MH)$. Calcule $m\sphericalangle AMB$

A) 30° B) 45° C) 37°
D) 53° E) 60°

PROBLEMA Nº 233

En el gráfico, $AB = CD$. Calcule x



A) 30° B) 14° C) 28°
D) 36° E) 20°

PROBLEMA Nº 234

En la prolongación de $\overline{CB}$ del triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$ se ubica E, luego se traza $\overline{EH} \perp \overline{AC}$ (H en $\overline{AC}$). Si $AE = QC$ (Q es la intersección de $\overline{EH}$ y $\overline{AB}$). Calcule $m\sphericalangle ABE$.

A) 80° B) 90° C) 120°
D) 45° E) 75°

PROBLEMA Nº 235

En el triángulo ABC se cumple $AC = 2(BC)$, se traza la bisectriz interior CF y la ceviana interior $\overline{BL}$ del triángulo FBC. Si $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle LBC$.

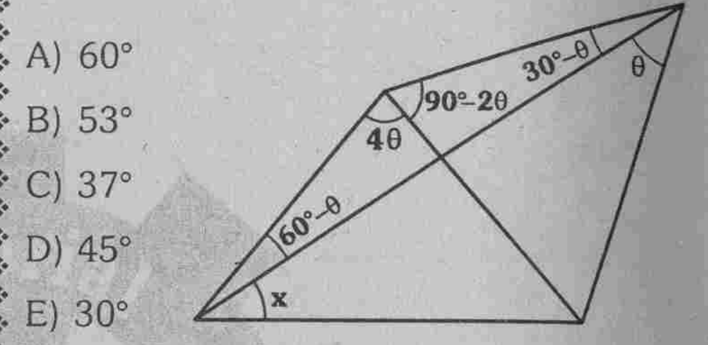
Calcule $\frac{LC}{FL}$

A) 1 B) 3/4 C) 2
D) 1/4 E) 5/3

PROBLEMA Nº 236

Del gráfico, calcule x.

A) 60°
B) 53°
C) 37°
D) 45°
E) 30°



PROBLEMA Nº 237

En el triángulo ABC se cumple $m\sphericalangle ACB = 29°$ y $\frac{AB}{BC} = 0,68$.

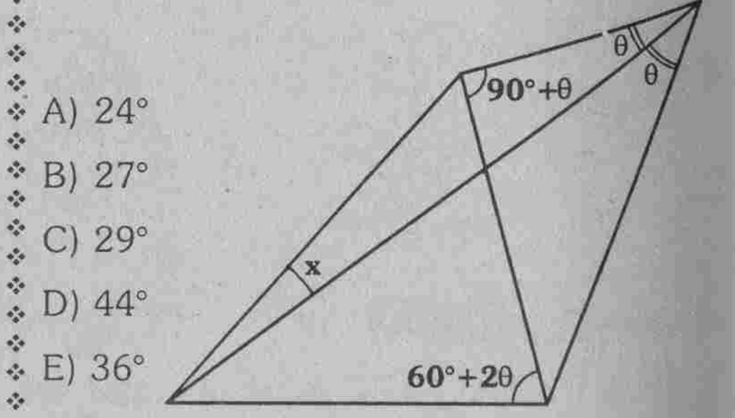
Calcule $m\sphericalangle BAC$.

A) 30° B) 31° C) 45°
D) 46° E) 52°

PROBLEMA Nº 238

Del gráfico, calcule el mayor valor entero de x.

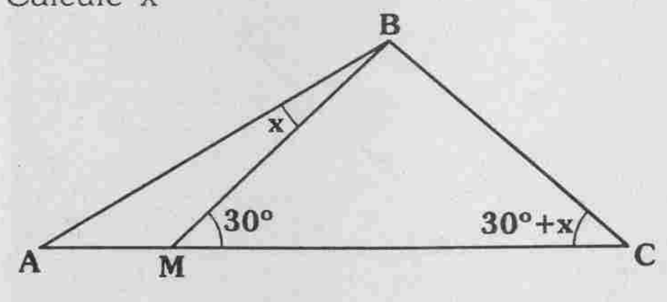
A) 24°
B) 27°
C) 29°
D) 44°
E) 36°



PROBLEMA Nº 239

En el gráfico, AB=MC.

Calcule x



A) 5° B) 10° C) 20°

D) 12° E) 15°

PROBLEMA Nº 240

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (AB=BC), se ubica P en el región interior del triángulo. Si m∢PBA = 5x, m∢PAC = 2x y m∢PCB = 3x.

Calcule x.

A) 10° B) 9° C) 5°

D) 12° E) 15°

PROBLEMA Nº 241

En la región interior del triángulo ABC se ubica P tal que AB = AP, m∢PBC = 18°30'; m∢BAP = 37° y m∢PAC = 8°. Calcule m∢PCB

A) 8° B) 15° C) 30°

D) 22°30' E) 26°30'

PROBLEMA Nº 242

En el triángulo ABC, se ubica P en la región interior tal que:

m∢BAP = m∢PAC = 14° y

m∢PCB = 2(m∢PCA) = 32°

Calcule m∢ABP.

A) 18° B) 30° C) 37°

D) $\frac{53°}{2}$ E) $\frac{37°}{2}$

PROBLEMA Nº 243

En el triángulo ABC, se traza la mediana AM. Si m∢ACB = 30° y m∢BAM = 2(m∢MAC).

Calcule m∢CAM.

A) 15° B) 22,5° C) 18°

D) 16° E) 14°

PROBLEMA Nº 244

En el gráfico, AB = AT = TC. Calcule x.

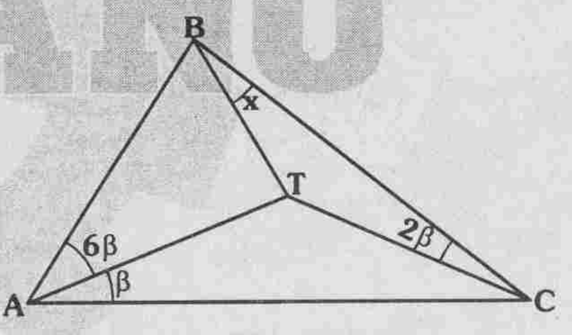
A) 10°

B) 15°

C) 12°

D) 8°

E) 20°



PROBLEMA Nº 245

En el triángulo ABC se trazan las cevianas interiores $\overline{AQ}$ y $\overline{PQ}$ tal que:

m∢BAQ = 3(m∢QAC) = 3(m∢PCA)

= 3(m∢PCB) = 60°

entonces:

A) AQ = CP B) PB = CQ

C) AQ > CP D) AB = CP

E) AQ = BC

PROBLEMA Nº 246

En el gráfico, calcule x.

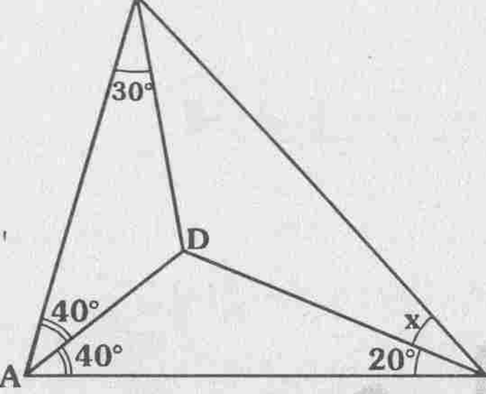
A) 10°

B) 15°

C) 30°

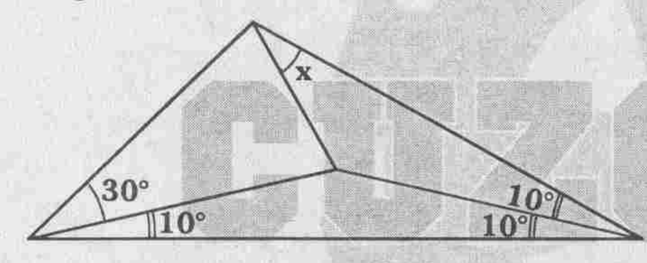
D) 20°

E) 22°30'



PROBLEMA Nº 247

Del gráfico, calcule x.

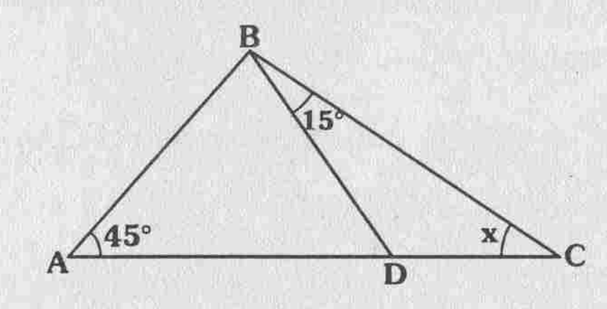


A) 10° B) 20° C) 30°

D) 40° E) 50°

PROBLEMA Nº 248

En el gráfico, AD=BC, calcule x.



A) 10° B) 15° C) 30°

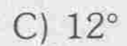
D) $\frac{53°}{2}$ E) $\frac{37°}{2}$

PROBLEMA Nº 249

En el gráfico, $BC = 4(HD)$, calcule x.

A) 10°

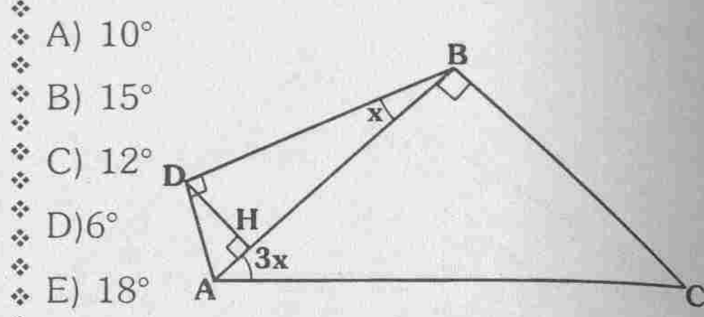
B) 15°



C) 12°

D) 6°

E) 18°



PROBLEMA Nº 250

En el gráfico, $BM = AC$ y $AB = MC + MB$

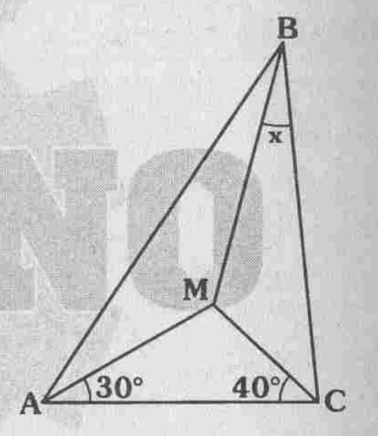
A) 10°

B) 20°

C) 30°

D) 40°

E) 60°



PROBLEMA Nº 251

En el triángulo ABC se traza la mediana BM.

Si: $m\measuredangle BAC = 45°$ y

$m\measuredangle MBC = 90° - 2(m\measuredangle ACB)$

Calcule $m\measuredangle ACB$.

A) 18° B) 20° C) 26,5°

D) 30° E) 18,5°

PROBLEMA Nº 252

En el triángulo ABC, se ubica E y D en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.

Si $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle ACB)$, $ED = DC$ y $AB = AD = EC$.

Calcule $m\measuredangle ACB$.

A) 10° B) 20° C) 15°

D) 30° E) 36°

PROBLEMA Nº 253

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior BP, tal que $m\measuredangle BPC = 60°$ y $AB = BP + PC$.

Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 15° B) 30° C) 45°/2

D) 20° E) 40°

PROBLEMA Nº 254

Demostrar que en el triángulo rectángulo cuyos catetos miden 44 y 117 sus ángulos agudos miden 21° y 69°.

PROBLEMA Nº 255

En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubica D en la región exterior relativa a $\overline{AC}$ tal que $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle CAD)$, $m\measuredangle ADC = 90°$ y la altura $\overline{DH}$ del triángulo ADC mide 4. Calcule BC.

A) 4 B) 2 C) 6

D) 8 E) 12

PROBLEMA Nº 256

En el gráfico, $AB = EC$ y $AD = 5$.

Calcule ED.

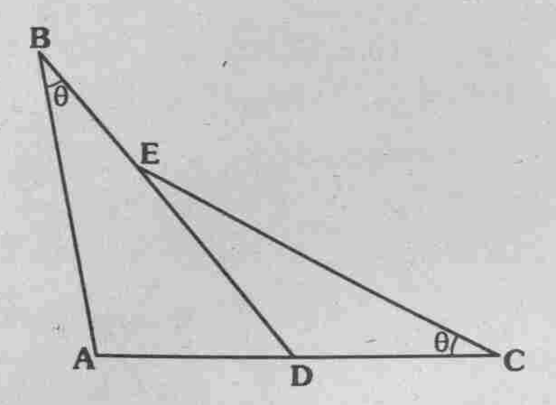
A) 6

B) 2,5

C) 5

D) 10

E) 7,5



PROBLEMA Nº 257

En el gráfico, $AB = BD$, $AD = DC$ y $\theta + \alpha = 3x$. Calcule x

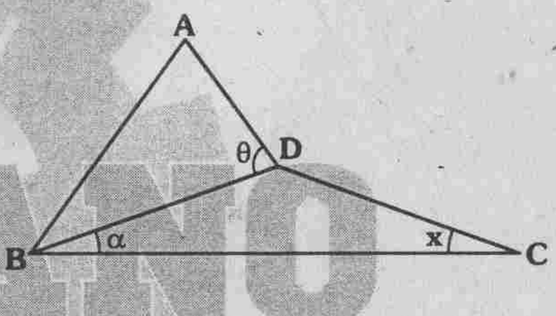
A) 37°

B) 10°

C) 15°

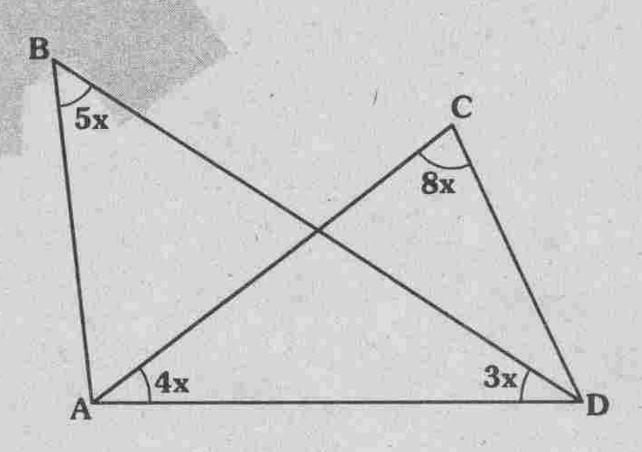
D) 20°

E) 30°



PROBLEMA Nº 258

En el gráfico, $AB = CD$. Calcule x



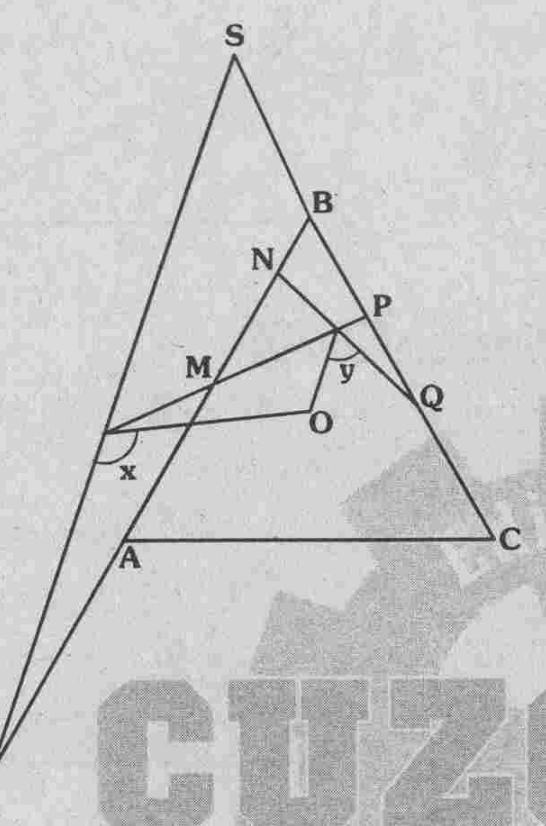
A) 5° B) 8° C) 10°

D) 7,5° E) 15°

PROBLEMA Nº 259

En el gráfico el triángulo ABC es equilátero

de centro O. Si AR=SB, AM=BP y MN=PQ. Calcule x+y.



A) 90° B) 180° C) 120°

D) 135° E) 136°

PROBLEMA Nº 260

Se tienen 64 triángulos congruentes (regiones triangulares) de cartulina los cuales tienen perímetro "P", se desea formar con todos ellos un nuevo triángulo de las mismas medidas angulares.

Indique el perímetro del nuevo triángulo.

A) 12 P B) 24P C) 32P

D) 8P E) 64P



Problemas Propuestos

Ciclo Repaso

PROBLEMA Nº 261

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si dos triángulos tienen sus ángulos respectivamente de igual medida, entonces son congruentes.

II. Si dos triángulos que tienen sus lados de igual longitud respectivamente son congruentes.

III. Se tienen los triángulos ABC y MNL, si $AB = MN$, $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle NML$ y $m\sphericalangle ACB = m\sphericalangle NLM$, entonces son congruentes.

A) VFF B) FVV C) VVV
D) FFV E) FVF

PROBLEMA Nº 262

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si dos triángulos equiláteros tiene igual perímetro, son congruentes.

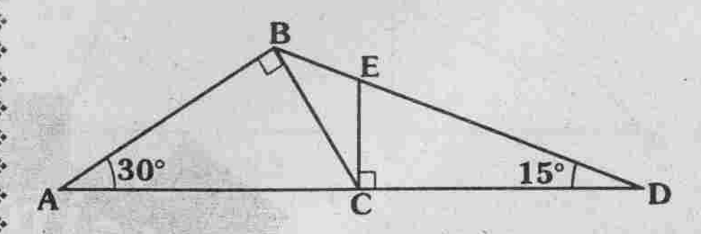
II. Dos triángulos isósceles tienen igual base y un ángulo de igual medida, son congruentes.

III. Dos triángulos rectángulos tienen un lado en común y un ángulo agudo son congruentes.

A) VFV B) VFF C) FFV
D) VVV E) FVF

PROBLEMA Nº 263

En el gráfico, calcule $\dfrac{ED}{AB}$



A) 1 B) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$
D) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ E) $2\sqrt{6}$

PROBLEMA Nº 264

Se tiene el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$ se ubica E en $\overline{BC}$, luego se traza $\overline{EH} \perp \overline{AC}$ $(H \in \overline{AC})$, Q es la intersección de $\overline{EH}$ y $\overline{AB}$, si $AE = QC$.

Calcule $m\sphericalangle ABE$.

A) 80° B) 90° C) 110°
D) 100° E) 79°

PROBLEMA Nº 265

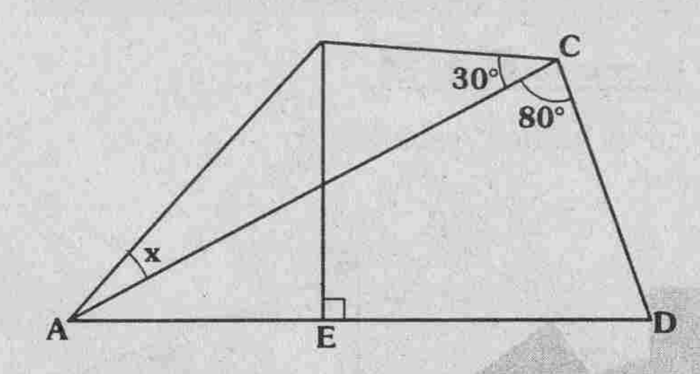
En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BM, tal que $m\sphericalangle BAC = 2\alpha$; $m\sphericalangle ACB = \alpha$; $m\sphericalangle ABM = 90° + \alpha$ y $AM = BC$. Calcule α.

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 18° E) 25°

PROBLEMA N° 266

En el gráfico, AC = AD y AE = ED.

Calcule x.

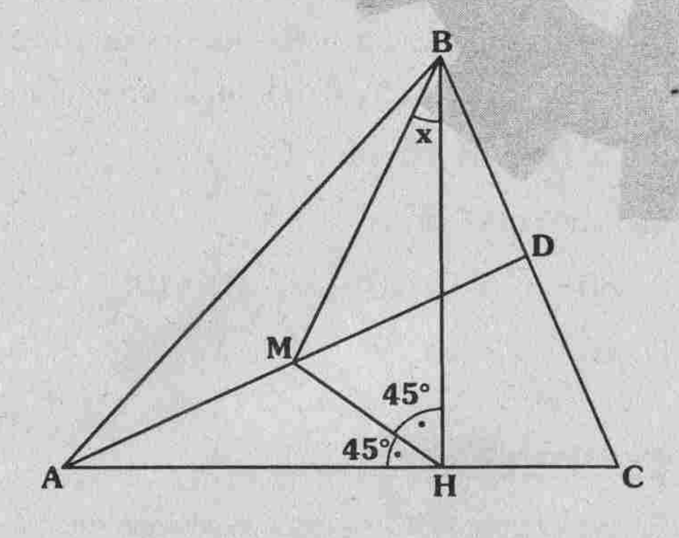


A) 50° B) 30° C) 40°

D) 20° E) 55°

PROBLEMA N° 267

Según el gráfico, BD = DC y AM = MD, calcule x.

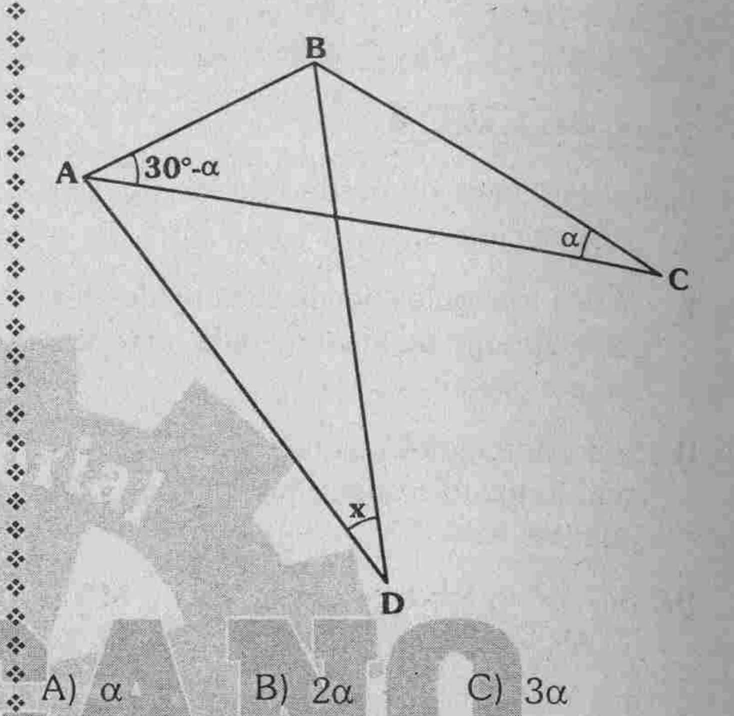


A) 30° B) $\frac{53°}{2}$ C) 16°

D) 8° E) $\frac{37°}{2}$

PROBLEMA N° 268

En el gráfico, calcule x en función de α si AD = DB = AC.

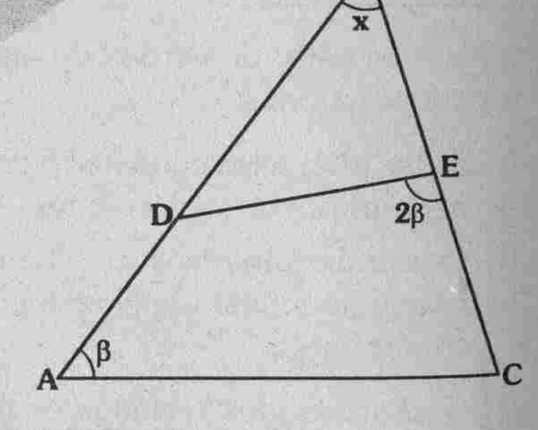


A) α B) 2α C) 3α

D) 45° − α E) 60° − α

PROBLEMA N° 269

Del gráfico, AD = DE = EC, calcule x.



A) 30°

B) 45°

C) 90°

D) 60°

E) 75°

PROBLEMA N° 270

En el triángulo isósceles ABC(AB = BC), se ubican los puntos R y M en $\overline{AC}$, si AR = RM = MC y m∢RBM = 2(m∢ACB).

Calcule m∢BAC.

A) 18° B) 36° C) 30°

D) 45° E) 54°

PROBLEMA Nº 271

En el triángulo ABC, se ubica D en la región interior, tal que BC = CD ;

m∢BCD = 90° − 7(m∢DCA) y

m∢BAD = m∢DAC = 2(m∢DCA)

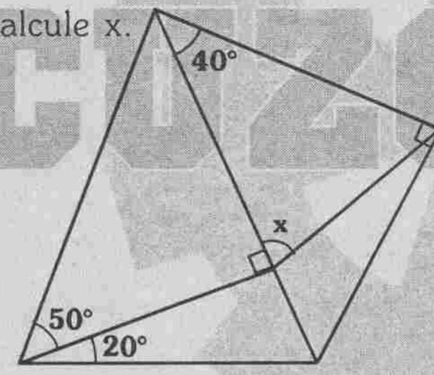
Calcule m∢ABC.

A) 70° B) 90° C) 80°

D) 100° E) 110°

PROBLEMA Nº 272

Del gráfico, calcule x.



A) 60°

B) 70°

C) 80°

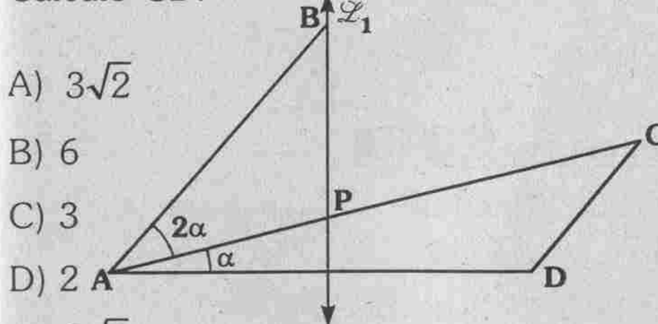
D) 75°

E) 85°

PROBLEMA Nº 273

Dell gráfico, $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{AD}$; AB = PC y BP = 6.

Calcule CD.



A) $3\sqrt{2}$

B) 6

C) 3

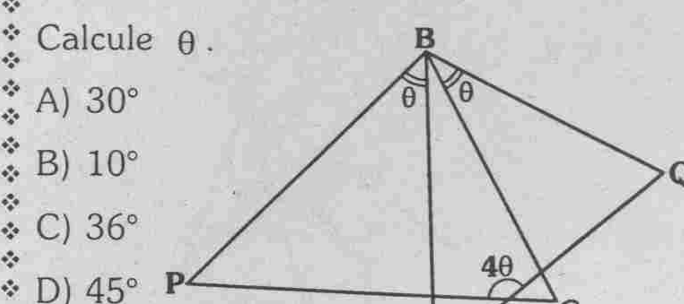
D) 2

E) $2\sqrt{2}$

PROBLEMA Nº 274

Del gráfico PB=AB y BQ=BC.

Calcule θ.



A) 30°

B) 10°

C) 36°

D) 45°

E) 20°

PROBLEMA Nº 275

En el triángulo ABC recto en B, exterior y relativo al lado BC se ubica el punto D, tal que m∢BDC = 90° − m∢BAC ; además AC = CD , AB = 3.

Calcule la distancia de C hasta $\overline{BD}$.

A) 4 B) 6 C) 9

D) 3 E) 2

PROBLEMA Nº 276

En el triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, se traza la altura $\overline{AH}$, en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ se ubica el punto Q, tal que:

m∢ABC = m∢CBQ ; m∢BQC = 90°

Calcule $\dfrac{m\measuredangle HAC}{m\measuredangle HQC}$

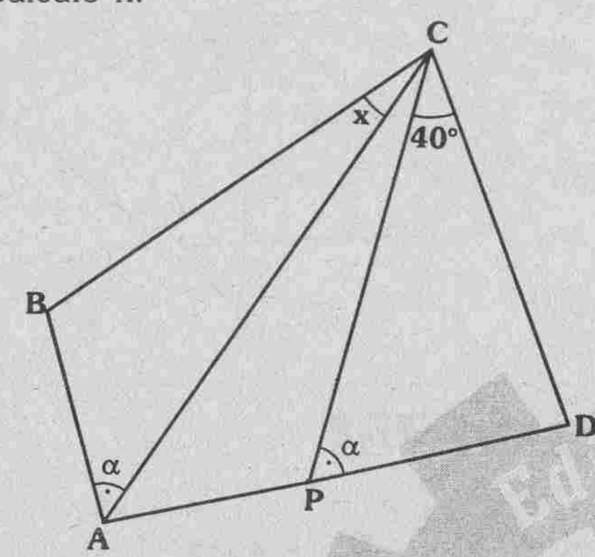
A) $\dfrac{3}{2}$ B) $\dfrac{2}{3}$ C) 2

D) 1 E) $\dfrac{1}{2}$

PROBLEMA Nº 277

Del gráfico, $AB = PD$ y $AC = PC + CD$.

Calcule x.

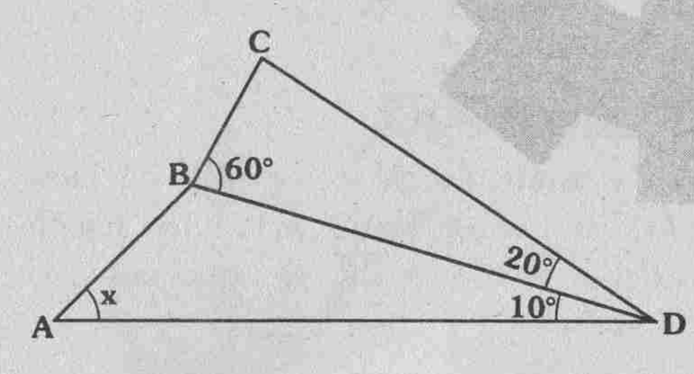


A) 10° B) 20° C) 25°

D) 30° E) 40°

PROBLEMA Nº 278

En el gráfico, $AB = BC$. Calcule x.



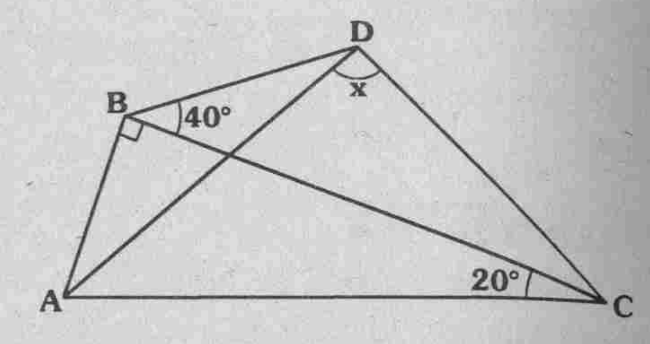
A) 30° B) 15° C) $\frac{53°}{2}$

D) 37° E) $\frac{37°}{2}$

PROBLEMA Nº 279

En el gráfico, $AC = 2(BD)$.

Calcule x.



A) 40° B) 80° C) 60°

D) 90° E) 120°

PROBLEMA Nº 280

En el triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$ tal que $HC = 3(AH)$,

Si: $m\measuredangle BAC = 2(m\measuredangle BCA)$

Calcule $m\measuredangle BCA$.

A) 15° B) 20° C) 10°

D) 30° E) 40°

PROBLEMA Nº 281

En un triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$ se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$ en la cual se ubica el punto E de tal modo que $BE = 4(AC) = 8$, si M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CE}$ respectivamente.

Calcule MN.

A) $3\sqrt{2}$ B) $\sqrt{17}$ C) 4

D) $\sqrt{7}$ E) $2\sqrt{10}$

PROBLEMA Nº 282

En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$ ($H \in \overline{AC}$), si $HC = 4(AH)$ y $m\measuredangle ABH = 2(m\measuredangle BCA)$.

Calcule $m\measuredangle BAC$.

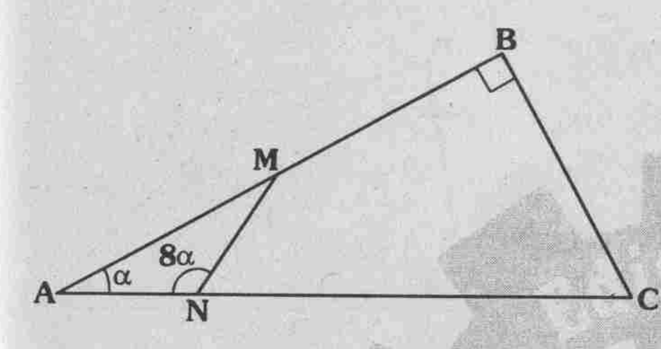
A) 53° B) 30° C) 14°

D) 37° E) 75°

PROBLEMA Nº 283

Del gráfico, $AM=MB$ y $NC=3(AN)$.

Calcule, α.

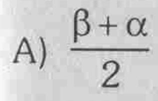


A) 10° B) 12° C) 15

D) 18° E) 20°

PROBLEMA Nº 284

Del gráfico $AB=PC$, $BM=MP$ y $AN=NC$. Calcule x



A) $\dfrac{\beta+\alpha}{2}$

B) $\beta-\alpha$

C) $\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

D) $\alpha+\beta$

E) $2\alpha+\beta$

PROBLEMA Nº 285

Del gráfico, $AB=PC$, $AC=16$.

Calcule AP.

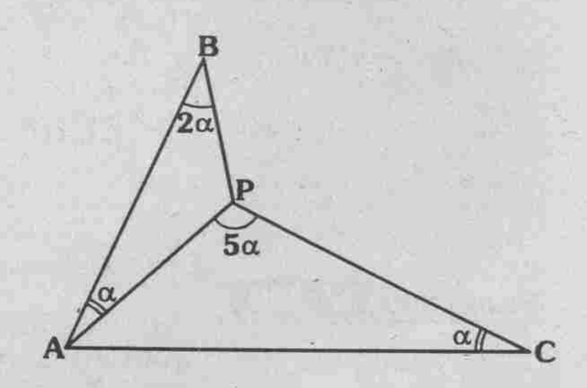
A) 4

B) 8

C) 12

D) 10

E) 16



PROBLEMA Nº 286

En el gráfico, $AH=HQ$; $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ es mediatriz de $\overline{BC}$.

Calcule x.

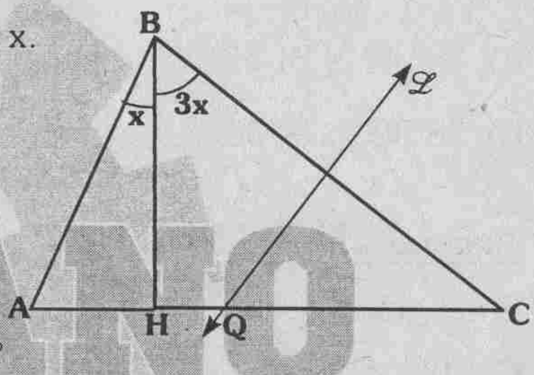
A) 15°

B) 20°

C) 18°

D) 16°

E) 18,5°



PROBLEMA Nº 287

En el gráfico, $AB=PC$.

Calcule x

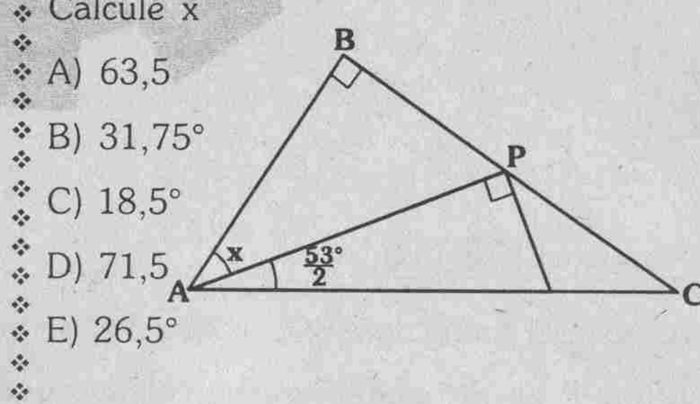
A) 63,5

B) 31,75°

C) 18,5°

D) 71,5

E) 26,5°



PROBLEMA Nº 288

En el triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$ tal que $AD=BC$ y

$$\frac{m\measuredangle BAC}{6}=\frac{m\measuredangle ABD}{7}=m\measuredangle DBC$$

Calcule $m\sphericalangle DBC$.

A) 8° B) 9° C) 10°

D) 11° E) 12°

PROBLEMA Nº 289

En el triángulo rectángulo ABC recto en B, $m\sphericalangle BAC = 53°$ en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos R, P y M tal que $\overline{PM}$ es perpendicular a $\overline{BC}$ y $AR = AM = MC$.

Calcule $m\sphericalangle MRP$.

A) 28°30' B) 53° C) 40°30'

D) 38°30' E) 30°

PROBLEMA Nº 290

En el gráfico, $AC = 12$, $ED = 2$.

Calcule AB.

A) 7

B) 8

C) 6

D) 5

E) 4

PROBLEMA Nº 291

Se tiene el triángulo ABC, se ubica Q en $\overline{AC}$ y P en la región exterior relativa a $\overline{BC}$ tal que los triángulos ABC y QPC sean congruentes si:

$$m\sphericalangle ABC = 4(m\sphericalangle BCA) = 4(m\sphericalangle QPC) = 80°$$

Calcule $m\sphericalangle BQP$.

A) 40° B) 50° C) 60°

D) 70° E) 80°

PROBLEMA Nº 292

En el gráfico, $AB = BC = CD$.

Calcule α.

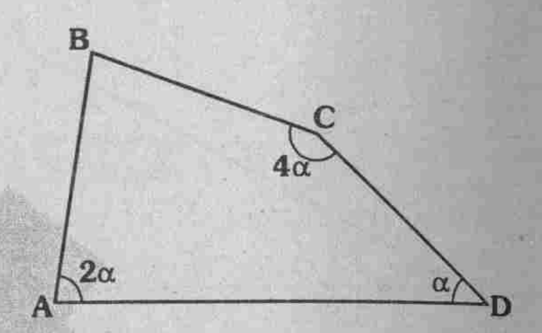
A) 20°

B) 60°

C) 30°

D) 50°

E) 40°



PROBLEMA Nº 293

En el triángulo ABC donde $AB=4$, $BC=7$ y $AC=9$, se ubica P en la bisectriz del ángulo exterior en B; P y Q están en la región exterior relativo a $\overline{BC}$, tal que $\overline{PQ} // \overline{AB}$ y

$$m\sphericalangle APC = m\sphericalangle BQC = 90°$$

Calcule PQ.

A) 0,5 B) 1 C) 1,5

D) 2 E) 2,5

PROBLEMA Nº 294

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior AM, $AC = AB + MC$ y $m\sphericalangle BAC = 2(m\sphericalangle BCA)$.

Ccalcule $m\sphericalangle ABC$.

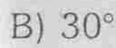
A) 25° B) 68° C) $\frac{720°}{7}$

D) 35° E) 48°

PROBLEMA Nº 295

Del gráfico, calcule x.

A) $30° - \alpha$



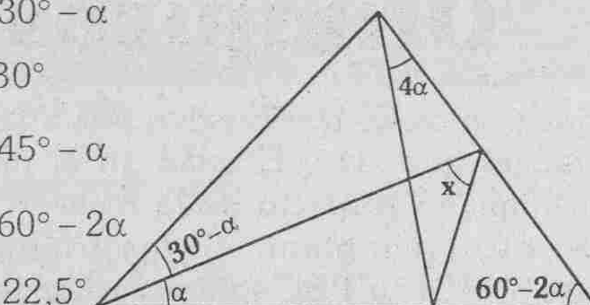
B) $30°$

C) $45° - \alpha$

D) $60° - 2\alpha$



E) $22,5°$



PROBLEMA Nº 296

En el triángulo ABC se traza la mediana BF, si se cumple que:

$$AF = AB \quad y \quad m\measuredangle FBC = 14°$$

Calcule $m\measuredangle BAC$.

A) 105° B) 106° C) 120°

D) 90° E) 108°

PROBLEMA Nº 297

En el triángulo ABC se cumple:

$$m\measuredangle BAC = 23° \quad y \quad 5(AC) = 8(AB)$$

Calcule $m\measuredangle ACB$.

A) 22° B) 30° C) 37°

D) 45° E) 67°

PROBLEMA Nº 298

Se tiene el triángulo ABC, en los lados BC y AC se ubican los puntos M y N respectivamente.

Si: $BM = MC$, $NC = AB + AN$ y

$$m\measuredangle ABC + m\measuredangle BCA = 120°$$

Calcule $m\measuredangle MNC$.

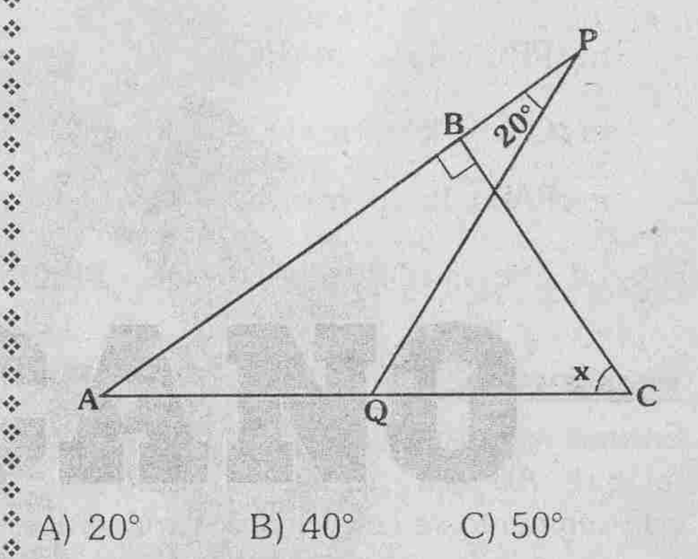
A) 20° B) 30° C) 40°

D) 15° E) 50°

PROBLEMA Nº 299

En el gráfico, $AQ = QC = BP$.

Calcule x.



A) 20° B) 40° C) 50°

D) 60° E) 70°

PROBLEMA Nº 300

Dado el triángulo ABC, en $\overline{AC}$ y en la región exteriorrelativa a $\overline{AC}$ se ubican los puntos D y E respectivamente de modo que el triángulo DCE es equilátero.

Si $AD = BC$, $m\measuredangle BCA = 60°$ y $EB = a$.

Calcule AB.

A) a B) $\frac{a}{2}$ C) $\frac{3a}{2}$

D) $\frac{5a}{4}$ E) 2a



Problemas Propuestos Olímpicos

PROBLEMA Nº1 [17º - IMO]

Dado cualquier triángulo ABC, se construye los triángulos exteriores ABR, BCP y CAQ sobre los lados de modo que:

$m\sphericalangle PBC = 45°$, $m\sphericalangle PCB = 30°$,

$m\sphericalangle QAC = 45°$, $m\sphericalangle QCA = 30°$,

$m\sphericalangle RAB = 15°$ y $m\sphericalangle RBA = 15°$,

pruebe que $m\sphericalangle QRP = 90°$ y $QR = RP$.

PROBLEMA Nº2

En una recta se ubican los puntos A y B, tal que $AB = 2a$. Tomando como base este segmento se construye los triángulos isósceles ACB, AC'B y AC"B siendo las longitudes de sus respectivas alturas a; 2a y 3a respectivamente y relativas a $\overline{AB}$. Demuestre que las medidas de los ángulos de vértices C, C' y C" suman 180°.

PROBLEMA Nº3

En triángulo isósceles ABC de base $\overline{AC}$, se ubica P y Q en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Demostrar que existe el triángulo cuyas longitudes de los lados son AQ, CP y PQ.

PROBLEMA Nº4

Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, P y B, luego se ubican los puntos C, D y E exteriores a la recta, tal que D y E están en el mismo semiplano respecto de la recta y C en el otro semiplano. Si los triángulos ACB, ADP y PBE son isósceles de bases $\overline{AB}$, $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ respectivamente.

Si: $m\sphericalangle ACB = m\sphericalangle ADP = m\sphericalangle PEB = 120°$.

Demuestre que el triángulo CDE es equilátero.

PROBLEMA Nº5

En el triángulo ABC se consideran los puntos A', B' y C' en el interior de los lados BC, CA y AB, respectivamente tales que:

$$m\sphericalangle AC'B' = m\sphericalangle B'A'C$$

$$m\sphericalangle CB'A' = m\sphericalangle A'C'B$$

$$\text{y} \quad m\sphericalangle BA'C' = m\sphericalangle C'B'A$$

Demuestre que A', B' y C' son puntos medios de los lados correspondientes.

PROBLEMA Nº6 [42º - IMO 2001]

ABC es un triángulo, X está situado en $\overline{BC}$ y $\overline{AX}$ biseca al ángulo A. Y está situado en $\overline{CA}$ y $\overline{BY}$ biseca al ángulo B. El ángulo en A mide 60° $AB + BX = AY + YB$.

Halle todos los valores posibles para el ángulo en B.

PROBLEMA Nº7

ABC es un triángulo acutángulo, O es su circuncentro, P es el pie de la perpendicular de A a $\overline{BC}$.

Si: $m\sphericalangle BCA \geq m\sphericalangle ABC + 30°$.

Pruebe que: $m\sphericalangle CAB + m\sphericalangle COP < 30°$.

PROBLEMA Nº8

Se tiene el triángulo rectángulo ABC (recto en B), se ubica D en $\overline{BC}$ y Q en $\overline{AC}$ tal que:

$$\overline{DQ} \perp \overline{AC} \quad , \quad m\sphericalangle ADQ = 2(m\sphericalangle BAD)$$

$$y \quad 2(AB) = AD + 2(DQ)$$

Calcule $m\sphericalangle BAD$.

PROBLEMA Nº9

Sea P un punto en el interior del triángulo equilátero ABC, tal que $PA = 5$; $PB = 7$ y $PC = 8$. Halle la longitud del lado del triángulo.

PROBLEMA Nº10

En el triángulo ABC, se cumple $m\sphericalangle ABC = 90°$ y AB=BC. Se ubica D en el interior de dicho triángulo tal que:

$$AB = DC \quad y \quad m\sphericalangle DAC = m\sphericalangle DCB$$

Calcule $m\sphericalangle DAC$.

PROBLEMA Nº11

Sea el cuadrilátero convexo ABCD, se trazan exteriormente los triángulos equiláteros ABM y CDP luego trazamos interiormente los triángulos equiláteros BCN y DAQ. Demostrar que el cuadrilátero MNPQ es un paralelogramo.

PROBLEMA Nº12

Sea ABC un triángulo, con $m\sphericalangle ABC = 45°$, desde A se traza el segmento AD (con D en $\overline{BC}$) de forma que $DC = 2(BD)$ y $m\sphericalangle BAD = 15°$. ¿Cuánto mide el ángulo BCA?

PROBLEMA Nº13

En el triángulo isósceles ABC (AB=BC) se traza la bisectriz interior AM (M en $\overline{BC}$), si $AC = BM + AM$. Calcule $m\sphericalangle BAM$.

PROBLEMA Nº 14 [2008- Olimpiada Rioplatence]

Sea ABC un triángulo obtusángulo en C tal que $2B\hat{A}C = A\hat{B}C$. Sea P un punto sobre el lado AB tal que BP=2BC. Sea M punto medio de AB(M está entre P y B). Probar que la perpendicular al lado AC, trazada por M, corta a PC en su punto medio.

PROBLEMA Nº 15

Se tiene el hexágono convexo ABCDEF tal que:

$$AB=DE \; , \; BC=FE \; y \; CD=AF$$

Si $m\sphericalangle BAF + m\sphericalangle BCD + m\sphericalangle FED = 360°$.

Demostrar que los ángulos opuestos en el hexágono son congruentes.



ANEXOS

CONGRUENCIA DE FIGURAS

Tratemos de acercarnos a la definición, analicemos primero el caso de los polígonos.

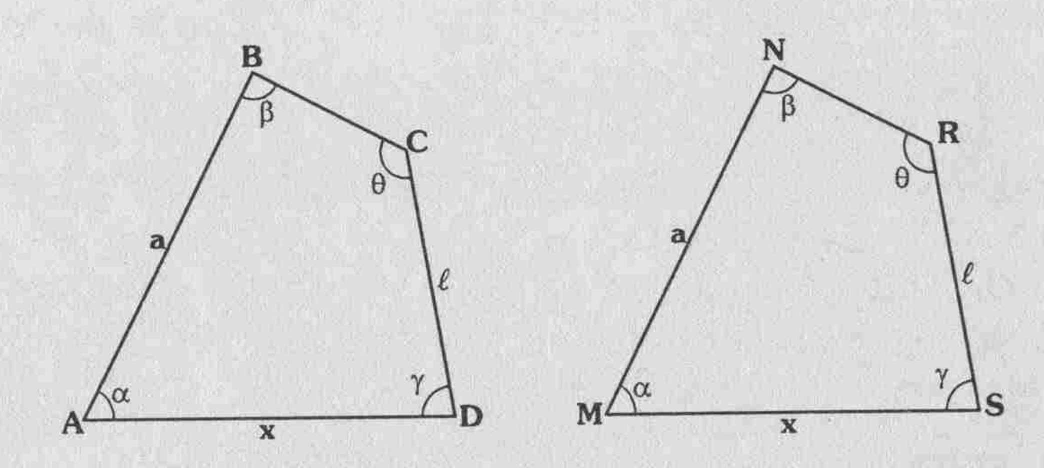
Dos polígonos $P_1P_2P_3....P_n$ y $Q_1Q_2Q_3....Q_n$ son congruentes si:

$$P_1P_2 = Q_1Q_2 \;;\; P_2P_3 = Q_2Q_3 \;;\; .... \;;\; P_nP_1 = Q_nQ_1$$

y

$$m\hat{P}_1 = m\hat{Q}_2 \;;\; .... \;;\; m\hat{P}_n = m\hat{Q}_n$$

Ejemplo:



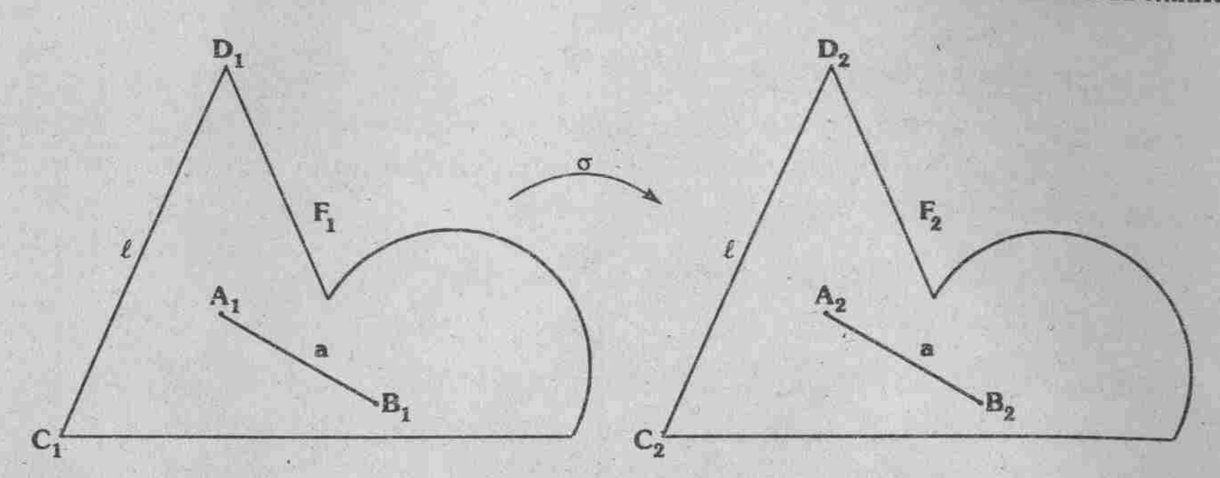
En el gráfico : $\triangle ABCD \cong \triangle MNRS$

No es difícil referirse a la congruencia de polígonos con elementos geométricos, en cambio para referirnos a la congruencia de figuras en general es necesario algunos conceptos del cálculo superior.

DEFINCIÓN DE FIGURAS CONGRUENTES

Sean F_1 y F_2 dos figuras, del plano o del espacio. Se dice que F_1 y F_2 son congruentes, cuando existe una correspondencia biyectiva $\sigma : F_1 \to F_2$, entre los puntos de F_1 y los puntos de F_2, con la siguiente propiedad:

Si A_1 y B_1 son puntos arbitrarios de F_1 y $\sigma(A_1) = A_2$, $\sigma(B_1) = B_2$ son sus correspondientes en F_2, entonces $A_1B_1 = A_2B_2$



La correspondencia biyectiva de $\sigma : F_1 \to F_2$ con la propiedad señalada, se llama congruencia entre F_1 , pues $\sigma : F_1 \to F_2$, la función inversa $\sigma^{-1} : F_2 \to F_1$ también es una congruencia.

ACERCA DE LA DISTANCIA

Axioma de distancia :

A cada par de puntos le corresponde un único número real no negativo.

Definición :

La distancia entre dos puntos es el número obtenido mediante el axioma de la distancia. Si los puntos son P y Q, entonces indicaremos la distancia por PQ.

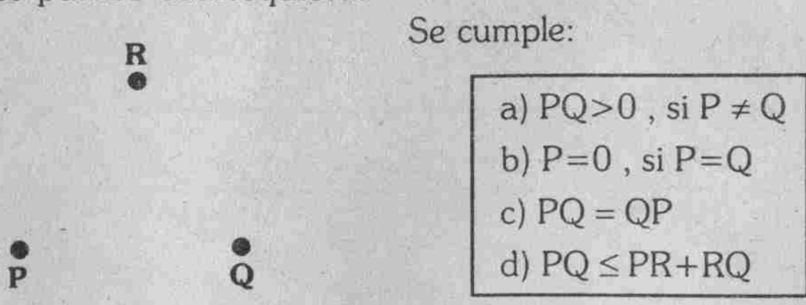
Admitimos la posibilidad de que P=Q, es decir de que P y Q sean el mismo punto, en este caso, PQ=0.

La distancia se define en relación a un par de puntos y no depende del orden, en consecuencia: PQ=QP.

En diversos problemas, se utilizan distintas unidades como centímetros, pies, pulgada, etc. todos los teoremas serán aplicables a cualquiera de estas unidades, siempre que se utilice sólo una unidad cada vez que se apliquen un teorema (no podemos cambiar las unidades en medio de un teorema).

Propiedades:

Sean P, Q y R tres puntos cualesquiera:

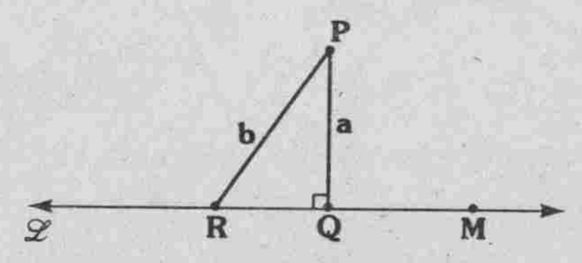


Se cumple:

a) $PQ>0$, si $P \neq Q$
b) $P=0$, si $P=Q$
c) $PQ = QP$
d) $PQ \leq PR+RQ$

Distancia entre una recta y un punto :

La distancia entre una recta y un punto fuera de ella es la longitud del segmento perpendicular desde el punto a la recta. La distancia entre una recta y un punto de la misma recta se define como cero.



Denotemos: $d_{(P, \mathscr{L})}$, distancia entre P y $\mathscr{L}$ en el gráfico:

$$P \notin \mathscr{L} \Rightarrow d_{(P\,;\,\mathscr{L})} = a > 0$$

$$M \in \mathscr{L} \Rightarrow d_{(M\,;\,\mathscr{L})} = 0$$

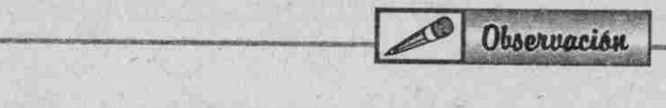
Teorema :

El segmento más corto que une un punto a una recta es el segmento perpendicular.

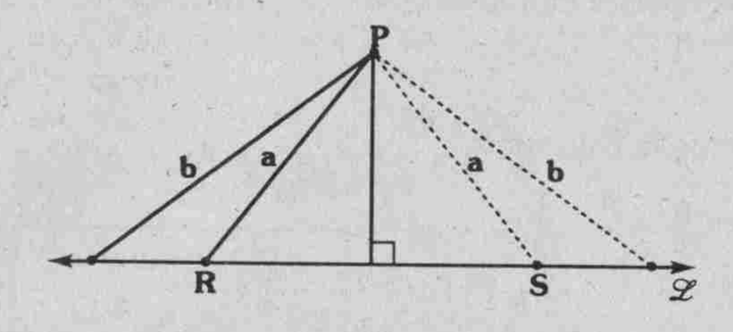
O de otro modo: se dan una recta $\mathscr{L}$ y un punto P fuera de ella, si $PQ \perp \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, $(Q \in \overleftrightarrow{\mathscr{L}})$ y R es otro punto de $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, entonces $PQ < PR$

Prueba :

La prueba es directa, pues en ⊿RQP, por teorema de la correspondencia: a<b



Sean una recta $\mathscr{L}$ y los puntos P y R tal que $P \notin \overleftrightarrow{\mathscr{L}} \wedge R \notin \overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, si $\overline{RP}$ no es perpendicular a $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$, entonces existe otro punto "S" en $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ tal que PR=PS





La Geometría como ciencia del espacio

El estudio del espacio desde un punto de vista matemático está íntimamente relacionado con la descripción y el análisis de la "forma". Intentar buscar una definición de forma abstracta sería entrar en una visión filosófica fuera de nuestro alcance. Cuando aquí hablamos de forma nos referimos al "aspecto" que pueden tener los objetos que estructuran el espacio.

La noción de "aspecto" a que nos hemos referido anteriormente es una aproximación intuitiva e ingenua con el único objetivo de tener una representación mental de lo que sería una entidad abstracta de los objetos, donde no se consideran ni la "materia" de que están constituidos, ni el tamaño o dimensión, ni la textura, ni el color, etc.

En el análisis de la forma hoy se distingue lo que es la configuración figural de lo que es la representación gráfica. La configuración figural expresa la imagen de la forma que tenemos en la mente, mientras que la representación gráfica es el modelo arbitrario o comercial de expresar esta imagen en un soporte físico ya sea una hoja de papel, la pantalla del ordenador o la reproducción física de un modelo tridimensional.

Lo que es la forma en sí, haciendo abstracción de los constituyentes de la materia y de las dimensiones de su tamaño, viene determinado por su configuración figural: es decir, la disposición de los elementos geométricos en lo que podemos llamar la estructura de la forma. Por otra parte, la representación es un modo convencional de "ver" o describir la forma.

El estudio de las formas poniendo énfasis en lo que hemos llamado configuración figural es uno de los puntos de entrada en el conocimiento geométrico.

Este enfoque permite relacionar los valores culturales, sociales y antropológicos del uso y la concepción de la forma en la sociedad, con las

perspectivas de la educación geométrica. Explícitamente, al situarnos en la descripción de una forma, en sus aspectos figurales, estamos inicializando las habilidades propias de la educación geométrica. Este punto de vista permite aproximaciones a la educación geométrica integrando distintas disciplinas y contextos culturales: la forma en el arte, en la ciencia, en la literatura, etc.

La organización sistemática que nos proporciona el estudio de las configuraciones figuradas, marca las líneas organizadoras de lo que conocemos como ciencia del espacio. Así, podemos decir que la visión de la Geometría como ciencia del espacio, supone focalizar los aspectos geométricos en el análisis figural podemos distinguir distintas categorías. Por ejemplo, la categoría estructural analiza la forma viendo cómo está construida. Cómo se disponen los elementos que la constituyen. Sería, por ejemplo, en el caso de una forma poliédrica, cómo están dispuestas las caras que forman todo el poliedro.

En la descripción del grado de simetría de una forma (o de la definición de la forma como lugar geométrico) empleamos la noción de distancia y éste sería un caso de lo que podemos considerar como una categoría dinámica.

El tipo de relaciones, tanto cualitativas como cuantitativas entre los elementos de las figuras, por ejemplo, la relación entre caras, vértices y aristas de un poliedro, la caracterización de su convexidad o concavidad, las relaciones angulares, etc., constituyen las categorías que podemos llamar discretas. Finalmente, todo lo relativo a la extensión y dimensión (longitudes, áreas y volumen) serían casos de la categoría de medidas.

Estas categorías -estructural, dinámica, discreta y de medida -nos marcan los grandes ejes donde podemos vertebrar y organizar la enseñanza - aprendizaje de la Geometría entendida como la ciencia del espacio.

(Unas reflexiones sobre geometría y educación pag. 24–25 /
¿Porqué Geometría? Claudi Alsina Catalá : – Josep Fortuny Aynemí
– Rafael Pérez Gómez)

CLAVES DE RESPUESTAS

ANUAL

1. A	10. A	19. A	28. A	37. B	46. A	55. D
2. D	11. B	20. B	29. C	38. E	47. C	56. C
3. A	12. E	21. D	30. A	39. D	48. B	57. C
4. E	13. C	22. E	31. A	40. D	49. B	58. B
5. C	14. D	23. C	32. B	41. D	50. B	59. D
6. C	15. B	24. A	33. E	42. E	51. B	60. B
7. C	16. C	25. E	34. D	43. A	52. A	
8. B	17. C	26. B	35. C	44. B	53. E	
9. B	18. D	27. E	36. A	45. C	54. D	

CEPRE-UNI

61. D	71. D	81. A	91. A	101. *	111. C	121. C	131. A
62. B	72. C	82. C	92. E	102. D	112. D	122. C	132. C
63. C	73. *	83. E	93. D	103. C	113. B	123. A	133. E
64. *	74. D	84. A	94. A	104. E	114. A	124. C	134. E
65. E	75 D	85. A	95. D	105. D	115. A	125. C	135. C
66. A	76. C	86. D	96. D	106. D	116. B	126. B	136. B
67. C	77. A	87. A	97. B	107. C	117. D	127. B	137. D
68. E	78. C	88. E	98. B	108. B	118. C	128. C	138. A
69. C	79. E	89. B	99. B	109. C	119. D	129. A	139. *
70. D	80. A	90. B	100. C	110. C	120. D	130. B	140. B

SEMESTRAL

141. C	150. B	159. E	168. B	177. C	185. B	193. C
142. D	151. A	160. C	169. D	178. B	186. C	194. B
143. A	152. D	161. A	170. E	179. E	187. E	195. A
144. B	153. B	162. C	171. C	180. C	188. D	196. B
145. A	154. A	163. A	172. B	181. B	189. C	197. D
146. C	155. B	164. C	173. D	182. C	190. D	198. A
147. D	156. C	165. A	174. D	183. A	191. B	199. D
148. D	157. B	166. C	175. C	184. E	192. A	200. B
149. B	158. C	167. C	176. A			

SEMESTRAL INTENSIVO

201. D	210. C	219. A	228. E	237. C	246. D	255. D
202. C	211. C	220. A	229. C	238. C	247. B	256. C
203. E	212. D	221. B	230. A	239. B	248. C	257. E
204. B	213. E	222. A	231. A	240. B	249. B	258. C
205. C	214. B	223. C	232. D	241. E	250. B	259. B
206. E	215. C	224. B	233. B	242. B	251. C	260. D
207. E	216. A	225. E	234. B	243. A	252. E	
208. D	217. C	226. A	235. A	244. E	253. A	
209. D	218. B	227. D	236. E	245. B	254. A	

REPASO

261. B	267. E	273. B	279. D	285. B	291. D	297. B
262. B	268. B	274. C	280. D	286. C	292. E	298. B
263. D	269. D	275. D	281. B	287. B	293. B	299. C
264. B	270. C	276. D	282. A	288. B	294. C	300. A
265. B	271. E	277. B	283. D	289. C	295. B	
266. D	272. B	278. A	284. D	290. D	296. B	

Bibliografía

- **Olivera Diaz, Carlos** — Geometría Plana
2da. edición
- **Pogorelov, A.V. (1974)** — Geometría Elemental.
Editorial MIR Moscú
- **Martín Isaacs** — Geometría Universitaria
Internacional Thomson Editores S.A. de C.V.
México - 2002
- **I. Shariguin** — Problemas de Planimetría
Editorial MIR - 1989
- **Pedro Puig Adam** — Curso de Geometría Métrica
Editorial Nuevas Gráficas - Madrid - 1961
- **Edwin Moise - Floyd Downs** — Geometría - Serie Matemática Moderna IV
Editorial Norma - Fondo Educativo
Interamericano S.A. 1972
- **Hans Rademacher - Erna Toeplitz** — Números y Figuras.
Alianza Editorial S.A. Madrid 1970
- **Radmila Bujajick - José Gómez Ortega** — Geometría / Cuaderno de Olimpiadas
Matemáticas
Instituto de Matemáticas UNAM - 2004

Páginas web consultadas:

- http:/www.campus-oei.org/oim/revistaoim/
- http:/www.mscs.mu.edu/~paul/puzzle/
- http:/www.fmat.cl/
- http:/www.forumgeometricorum.com/